

# Numerical Aspects of Mach Reflection Simulation for the Unsteady Flow over a Compression Ramp

D. S. Yatsukhno

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,*

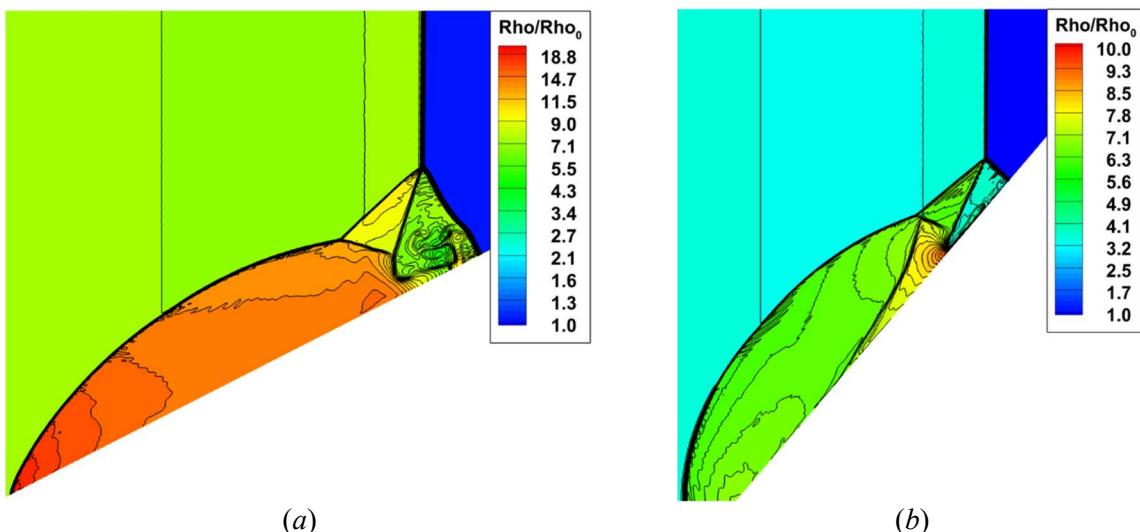
*Moscow, 119526, Russia*

yatsukhno-ds@rambler.ru

## Abstract

The paper presents the numerical results of the verification calculations of the flow around a compression ramp with a surface inclination angle in the range from  $20^\circ$  to  $49^\circ$  by an air or argon flow. University of Toronto shock tube experimental data [Deschambault R.L. and Glass I.I. An update on non-stationary oblique shock-wave reflections: actual isopycnics and numerical experiments // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 131] were used as initial data for numerical simulation. The complex Mach and double Mach reflection computational data comparison was performed under conditions different numerical models using. The different numerical schemes feature effect shock wave structures receiving was estimated.

Keywords: incident shock wave, reflected shock wave, Mach step, contact discontinuity, regular reflection, Mach reflection, arbitrary discontinuity decay, limiter, approximation order



Non-dimensional density distribution for case 5 (a) and case 9 (b) obtained by the TVD-limiters and 5<sup>th</sup> order interpolation scheme

УДК 533.6

# Численные аспекты моделирования маховского отражения при нестационарном обтекании угла сжатия

Д. С. Ящухно

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1*

*yatsukhno-ds@rambler.ru*

## Аннотация

В рамках данной работы представлены результаты верификационных расчетов обтекания угла сжатия с углом наклона поверхности в диапазоне от  $20^\circ \div 49^\circ$  потоком воздуха или аргона. Для численного моделирования были выбраны исходные данные, соответствующие циклу стендовых экспериментов, выполненных на ударной трубе университета Торонто [Deschambault R.L. and Glass I.I. JFM, 1983]. Выполнено сравнение расчетных данных для случаев переходного и двойного маховских отражений, полученных с применением различных численных моделей. Данна оценка влияния различных элементов использованных численных схем на точность воспроизведения наблюдаемых в эксперименте газодинамических структур.

**Ключевые слова:** падающая ударная волна, отраженная ударная волна, ножка Маха, контактный разрыв, регулярное отражение, маховское отражение, распад произвольного разрыва, лимитер, порядок аппроксимации

## 1. Введение

Маховское отражение представляет собой разновидность взаимодействия набегающей ударной волны с обтекаемой поверхностью, приводящей к образованию сложных полей течения, включающих собственно исходную ударную волну, отраженную ударную волну, ножку Маха и контактный разрыв. В зависимости от конкретного типа маховского отражения [1–2], а также сочетания исходных данных (геометрия задачи, параметры набегающего потока, свойства газа) формирующиеся ударно-волновые конфигурации могут включать дополнительные газодинамические структуры, детальное исследование которых представляет непосредственный интерес с точки зрения оценки влияния на получаемые результаты различных численных схем и их отдельных элементов: способов аппроксимации естественных или консервативных переменных, метода решения задачи о распаде произвольного разрыва и т.д. В работе [3] исследовалось двойное и тройное маховское отражение на клине с использованием TVD-модификации схемы Маккормака, что позволило получить режим отрицательного маховского отражения с множественными тройными конфигурациями. В статье [4] выполнено численное моделирование отражения ударной волны от стенки с применением взвешенных существенно неосциллирующих схем WENO высокого порядка точности, реализованных в покомпонентной и в характеристической форме, на неструктурированных сетках. Расчетное исследование перехода между регулярным и маховским отражением с учетом модели турбулентности Спаларта – Алмараса было осуществлено в рамках работы [5]. Исследование влияния вязкостных эффектов на маховское отражение от двух симметрично расположенных клиньев было проведено в работе [6] с использованием схем WENO 5-го порядка точности, а также метода прямого статистического моделирования DSMC. Следует

также отметить, что вопросы моделирования вязких течений имеют особую важность в условиях взаимодействия ударных волн с пограничным слоем, которое исследовалось, в частности, в работах [7, 8]. В работах [9, 10] анализировались процессы регулярного и маховского отражения в широком диапазоне чисел Маха как при адиабатических граничных условиях, так и с учетом изменения температуры стенки. В работе [11] исследовался переход от маховского отражения к регулярному при взаимодействии сильных ударных волн с цилиндрическими поверхностями. В статье [12] представлены результаты исследования двойного маховского отражения ударных волн для условий, соответствующим интенсивным физико-химическим превращениям в газе.

В данной работе представлены результаты численного моделирования маховского отражения на структурированных конечно-объемных сетках, полученные с использованием двухмерных уравнений Эйлера, в рамках процедуры численного интегрирования которых реализованы различные подходы к повышению пространственного порядка аппроксимации. Кроме того, выполнен сравнительный анализ двух приближенных методов решения задачи о распаде произвольного разрыва на получаемые ударно-волновые структуры. Нужно также отметить, что данная статья в целом посвящена апробации двухмерной конечно-объемной методики повышенного порядка точности, восходящей к более ранним работам по пространственной вычислительной аэродинамике [13–23].

## 2. Постановка задачи, основные уравнения, численный метод

Двухмерная нестационарная система уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{F}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{F}_y) = 0 \quad (1)$$

Исходные уравнения (1) включают в себя:  $\mathbf{w}$  – вектор-столбец консервативных переменных;  $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$  – проекции вектора-столбца конвективного невязкого потока;  $x, y, t$  – пространственные координаты и время. Искомые векторные величины определяются как

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho u v \\ \rho u H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 \\ \rho v H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность;  $u, v$  – проекции вектора скорости;  $E$  – удельная полная энергия;  $H$  – удельная полная энталпия;  $p$  – давление. Замыкающими соотношениями для данной системы являются уравнение состояния совершенного газа и калорическое уравнение состояния

$$p = \rho \frac{R_0}{\mu} T, \quad (4)$$

$$U = c_V T \quad (5)$$

Связь между кинетической и полной энергией определяется как

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (6)$$

В соотношениях (4)–(6)  $R_0$  – универсальная газовая постоянная;  $\mu$  – молекулярная масса;  $T$  – температура;  $U$  – удельная внутренняя энергия;  $c_V$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме;  $\gamma$  – показатель адиабаты. В рамках данной численной модели учитывалась температурная зависимость теплоемкости, которая определялась по следующей формуле [24]

$$c_p(T) = c_p^{T_{ref}} \left( T/T_{ref} \right)^\varphi \quad (7)$$

Здесь  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $c_p^{T_{ref}}$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении для характерной температуры;  $T_{ref} = 300$  К – характерная температура;  $\varphi = 0.1$ .

Численное интегрирование системы уравнений (1) выполнялось с использованием метода конечных объемов. В ходе расчетов использовались структурированные конечно-объемные четырехугольные сетки, включающие от 1.2 млн. до 2 млн. элементов. На поверхности клина задавались граничные условия проскальзывания. Сама поверхность считалась адиабатической.

В рамках процедуры повышения пространственного порядка аппроксимации выполнялась реконструкция вектора естественных переменных с использованием полинома 3-го или 5-го порядка [25]. Расчет значений компонент вектора естественных переменных в конечном объеме выполняется с использованием следующих формул [25]

$$\Phi_L = \bar{\Phi}_i + 0.5\varphi(r_L) \Delta\Phi_{i-1/2}, \quad (8)$$

$$\Phi_R = \bar{\Phi}_{i+1} - 0.5\varphi(r_R) \Delta\Phi_{i+3/2} \quad (9)$$

Здесь  $\Phi = (\rho, u, v, p)^T$  – вектор естественных переменных. На рис. 1 представлена схема расположения конечных объемов на структурированной четырехугольной сетке.

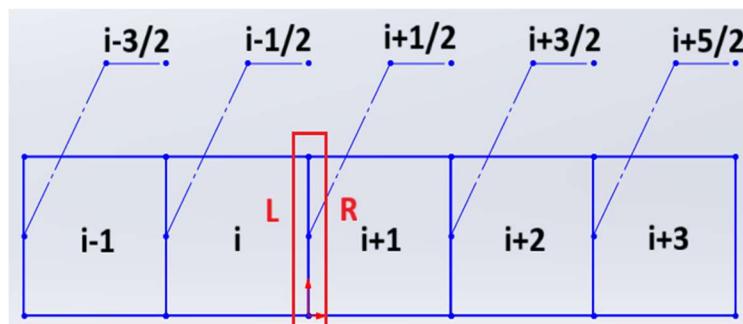


Рис. 1. Схема расположения конечных объемов на структурированной четырехугольной сетке (дробные индексы соответствуют граням между соседними объемами)

В соотношениях (8)–(9)  $\Phi_L$  – значение естественной переменной в конечном объеме текущего элемента;  $\Phi_R$  – значение естественной переменной в конечном объеме соседнего элемента;  $\bar{\Phi}_i$ ,  $\bar{\Phi}_{i+1}$  – значения естественной переменной в центре текущего и соседнего конечного объема;  $\varphi(r_L)$ ,  $\varphi(r_R)$  – TVD-лимитеры, которые определяются как [25, 26]

$$\varphi(r_L) = \max \left[ 0, \min \left( 2, 2r_{L,i}, \beta_L \right) \right], \quad (10)$$

$$\varphi(r_R) = \max \left[ 0, \min \left( 2, 2r_{R,i+1}, \beta_R \right) \right] \quad (11)$$

В данной формуле в случае использовании полинома 3-го порядка

$$\beta_L = \frac{1+2r_{L,i}}{3}, \quad (12)$$

$$\beta_R = \frac{1+2r_{R,i+1}}{3} \quad (13)$$

Для полинома 5-го порядка коэффициенты  $\beta_L$  и  $\beta_R$  имеют вид

$$\beta_L = \frac{-2/r_{L,i-1} + 11 + 24r_{L,i} - 3r_{L,i}r_{L,i+1}}{30}, \quad (14)$$

$$\beta_R = \frac{-2/r_{R,i+2} + 11 + 24r_{R,i+1} - 3r_{R,i}r_{R,i+1}}{30} \quad (15)$$

В соотношениях (12)–(15)

$$\begin{aligned} r_{L,i-1} &= \frac{\Delta\Phi_{i-1/2}}{\Delta\Phi_{i-3/2}}, & r_{L,i} &= \frac{\Delta\Phi_{i+1/2}}{\Delta\Phi_{i-1/2}}, & r_{L,i+1} &= \frac{\Delta\Phi_{i+3/2}}{\Delta\Phi_{i+1/2}}, \\ r_{R,i+2} &= \frac{\Delta\Phi_{i+3/2}}{\Delta\Phi_{i+5/2}}, & r_{R,i+1} &= \frac{\Delta\Phi_{i+1/2}}{\Delta\Phi_{i+3/2}}, & r_{R,i} &= \frac{\Delta\Phi_{i-1/2}}{\Delta\Phi_{i+1/2}}, \end{aligned}$$

$$\Delta\Phi_{i-1/2} = \Phi_i - \Phi_{i-1}, \quad \Delta\Phi_{i-3/2} = \Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}, \quad \Delta\Phi_{i+1/2} = \Phi_{i+1} - \Phi_i,$$

$$\Delta\Phi_{i+3/2} = \Phi_{i+2} - \Phi_{i+1}, \quad \Delta\Phi_{i+5/2} = \Phi_{i+3} - \Phi_{i+2}$$

Расчет уточненных значений на гранях конечных объемов выполняется с использованием следующих соотношений [25]

$$\Phi_{L,\frac{1}{2}} = \Phi_L + \frac{\max[0, (\Phi_R - \Phi_L)(\Phi_{L,\text{superbee}} - \Phi_L)]}{(\Phi_R - \Phi_L)|\Phi_{L,\text{superbee}} - \Phi_L|} \cdot \min\left[a \frac{|\Phi_R - \Phi_L|}{2}, |\Phi_{L,\text{superbee}} - \Phi_L|\right], \quad (16)$$

$$\Phi_{R,\frac{1}{2}} = \Phi_R + \frac{\max[0, (\Phi_L - \Phi_R)(\Phi_{R,\text{superbee}} - \Phi_R)]}{(\Phi_L - \Phi_R)|\Phi_{R,\text{superbee}} - \Phi_R|} \cdot \min\left[a \frac{|\Phi_L - \Phi_R|}{2}, |\Phi_{R,\text{superbee}} - \Phi_R|\right] \quad (17)$$

Здесь  $\Phi_{L,\text{superbee}}$  и  $\Phi_{R,\text{superbee}}$  – значения естественных переменных, полученные с использованием лимитера Superbee [25] по формулам (8)–(9);  $a = 1 - \min[1, \max(|M_L|, |M_R|)]^2$ ;  $M_L$ ,  $M_R$  – числа Маха в текущем и соседнем конечном объеме.

В работе [25] также изложен подход, основанный на использовании схемы с многомерными лимитерами, которые вводятся с использованием следующих формул:

$$\Phi_L = \bar{\Phi}_i + 0.5\varphi(r_{L,i}, \alpha_L, \beta_L)\Delta\Phi_{i-1/2} = \bar{\Phi}_i + 0.5 \max[0, \min(\alpha_L r_{L,i}, \alpha_L, \beta_L)] \Delta\Phi_{i-1/2}, \quad (18)$$

$$\Phi_R = \bar{\Phi}_{i+1} - 0.5\varphi(r_{R,i+1}, \alpha_R, \beta_R)\Delta\Phi_{i+3/2} = \bar{\Phi}_{i+1} - 0.5 \max[0, \min(\alpha_R r_{R,i+1}, \alpha_R, \beta_R)] \Delta\Phi_{i+3/2} \quad (19)$$

Параметры  $\alpha_L$  и  $\alpha_R$  зависят от направления и для направления  $i$  определяются как

$$\alpha_L = g \left[ \frac{2 \max(1, r_{L,i}) \left( 1 + \max \left( 0, \frac{\tan \theta_{i+1}}{r_{R,i+1}} \right) \right)}{1 + \tan \theta_i} \right], \quad \alpha_R = g \left[ \frac{2 \max(1, r_{R,i+1}) \left( 1 + \max \left( 0, \frac{\tan \theta_i}{r_{L,i}} \right) \right)}{1 + \tan \theta_{i+1}} \right] \quad (20)$$

Здесь  $r_{L,i} = \frac{\Delta \Phi_{i+1/2,j}}{\Delta \Phi_{i-1/2,j}}$ ,  $r_{R,i+1} = \frac{\Delta \Phi_{i+1/2,j}}{\Delta \Phi_{i+3/2,j}}$ ,  $\tan \theta_i = \left| \frac{\bar{\Phi}_{i,j+1} - \bar{\Phi}_{i,j-1}}{\bar{\Phi}_{i+1,j} - \bar{\Phi}_{i-1,j}} \right|$ .

Для направления  $j$  имеют место аналогичные соотношения

$$\alpha_L = g \left[ \frac{2 \max(1, r_{L,j}) \left( 1 + \max \left( 0, \frac{\tan \theta_{j+1}}{r_{R,j+1}} \right) \right)}{1 + \tan \theta_j} \right], \quad \alpha_R = g \left[ \frac{2 \max(1, r_{R,j+1}) \left( 1 + \max \left( 0, \frac{\tan \theta_j}{r_{L,j}} \right) \right)}{1 + \tan \theta_{j+1}} \right] \quad (21)$$

Здесь  $r_{L,j} = \frac{\Delta \Phi_{i,j+1/2}}{\Delta \Phi_{i,j-1/2}}$ ,  $r_{R,j+1} = \frac{\Delta \Phi_{i,j+1/2}}{\Delta \Phi_{i,j+3/2}}$ ,  $\tan \theta_j = \left| \frac{\bar{\Phi}_{i+1,j} - \bar{\Phi}_{i-1,j}}{\bar{\Phi}_{i,j+1} - \bar{\Phi}_{i,j-1}} \right|$ .

В соотношениях (20)–(21) используется следующая функция:

$$g(x) = \max[1, \min(2, x)] \quad (22)$$

На рис. 2 показана схема расположения конечных объемов при расчетах с использованием многомерных лимитеров.

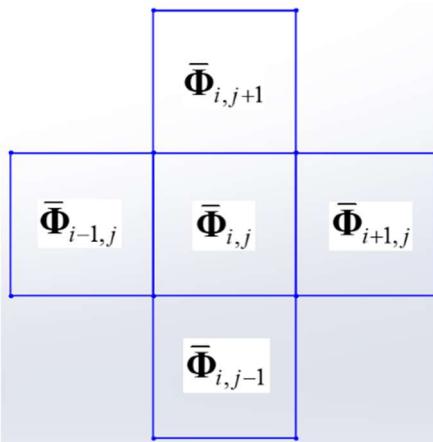


Рис. 2. Схема расположения конечных объемов на структурированной четырехугольной сетке для расчета параметров с использованием многомерного лимитера

В сравнительных расчетах, кроме схем, основанных на уравнениях (8)–(22), также используется более простая в реализации MUSCL-схема [27]

$$\Phi_L = \bar{\Phi}_i + 0.25\varepsilon [(1+k)\Delta \Phi_{i+1/2} + (1-k)\Delta \Phi_{i-1/2}], \quad (23)$$

$$\Phi_R = \bar{\Phi}_{i+1} - 0.25\varepsilon [(1+k)\Delta \Phi_{i+1/2} + (1-k)\Delta \Phi_{i+3/2}] \quad (24)$$

Здесь  $\varepsilon = 1$ ,  $k = 0$ .

Для приближенного решения задачи о распаде произвольного разрыва используется SLAU2 схема, в общем случае обеспечивающая получение четких газодинамических структур с подавлением возникающих неустойчивостей в широком диапазоне чисел Маха. В соответствии с этой схемой вектор невязкого потока на гранях конечного объема имеет вид [28]

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \vec{\Psi}_L + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \vec{\Psi}_R + \tilde{p} \vec{N}, \quad (25)$$

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_L \left( V_{nL} + |\bar{V}_n|^+ \right) + \rho_R \left( V_{nL} + |\bar{V}_n|^+ \right) - \frac{\chi}{c_{1/2}} \Delta p \right\}, \quad (26)$$

$$\tilde{p} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\beta_+|_{\alpha=0} - \beta_-|_{\alpha=0}}{2} (p_L - p_R) + \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + u_R^2 + v_R^2}{2}} \cdot (\beta_+|_{\alpha=0} + \beta_-|_{\alpha=0} - 1) \bar{\rho} c_{1/2}, \quad (27)$$

$$|\bar{V}_n|^+ = (1 - g) |\bar{V}_n| + g |V_{nL}|, \quad (28)$$

$$|\bar{V}_n|^- = (1 - g) |\bar{V}_n| + g |V_{nR}|, \quad (29)$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho_L |V_{nL}| + \rho_R |V_{nR}|}{\rho_L + \rho_R}, \quad (30)$$

$$\chi = (1 - \tilde{M})^2, \quad (31)$$

$$\tilde{M} = \min \left( 1, \frac{1}{c_{1/2}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + u_R^2 + v_R^2}{2}} \right), \quad (32)$$

$$\beta_{\pm}|_{\alpha=0} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)), & |M| \geq 1 \\ \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M), & |M| < 1 \end{cases} \quad (33)$$

$$V_{nL} = u_L n_x + v_L n_y, \quad V_{nR} = u_R n_x + v_R n_y, \quad (34)$$

$$\Delta p = p_R - p_L, \quad (35)$$

$$c_{1/2} = 0.5 (c_L + c_R), \quad (36)$$

$$\bar{\rho} = 0.5 (\rho_L + \rho_R), \quad (37)$$

$$g = -\max [\min(M_L, 0), -1] \cdot \min [\max(M_R, 0), 1] \quad (38)$$

В уравнение (25) входят вектор консервативных переменных  $\vec{\Psi} = (1, u, v, H)^T$  и вектор нормали  $\vec{N} = (0, n_x, n_y, 0)^T$ . В уравнениях (26)–(38)  $p_L, p_R, \rho_L, \rho_R, u_L, u_R, v_L, v_R, c_L, c_R$  – давление, плотность, компоненты вектора скорости, скорость звука в текущем и соседнем объемах,  $n_x, n_y$  – направляющие косинусы вектора нормали,  $M$  – местное число Маха.

В рамках данной работы было выполнено сравнение влияния на получаемые газодинамические структуры различных методов приближенного решения задачи Римана. Помимо схемы SLAU2 [28] также использовалась схема AUSM+up [29], обладающая значительной точностью разрешения ударно-волновых конфигураций. В соответствии с данной схемой поток массы определяется как

$$\dot{m} = M_{1/2} c_{1/2} \begin{cases} \rho_L, & M_{1/2} \geq 0 \\ \rho_R, & M_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- + M_p, \quad (40)$$

$$M_{L,R}^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|), & \text{при } |M| > 1 \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2, & \text{при } |M| \leq 1 \end{cases} \quad (41)$$

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{p_R - p_L}{\rho_{1/2} c_{1/2}^2}, \quad (42)$$

$$\tilde{p} = \beta_+|_\alpha p_L + \beta_-|_\alpha p_R + p_u, \quad (43)$$

$$\beta_\pm|_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 \pm \text{sign}(M)), & |M| \geq 1 \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2, & |M| < 1 \end{cases}, \quad (44)$$

$$p_u = -K_u \cdot \beta_+|_\alpha \cdot \beta_-|_\alpha \cdot (\rho_L + \rho_R) (f_a c_{1/2}) (V_{nR} - V_{nL}), \quad (45)$$

$$\alpha = \frac{3}{16}(-4 + 5f_a^2), \quad f_a = M_o(2 - M_o), \quad (46)$$

$$M_o^2 = \min \left[ 1, \max \left( \bar{M}^2, M_\infty^2 \right) \right], \quad \bar{M}^2 = \frac{V_{nL}^2 + V_{nR}^2}{2c_{1/2}^2}, \quad (47)$$

$$K_p = 0.25, \quad K_u = 0.75, \quad \sigma = 1 \quad (48)$$

### 3. Результаты расчетов

Из набора экспериментальных данных [30] (см. таблицу 1) были рассмотрены тестовые случаи, соответствующие переходному и двойному маховскому отражениям. Для всех тестовых случаев был выполнен цикл расчетов с использованием следующих численных методов:

- 1) Схема 1. Метод конечного объема 1-го порядка пространственной аппроксимации.
- 2) Схема 2. Метод конечного объема с использованием MUSCL-схемы [27].
- 3) Схема 3. Метод конечного объема с использованием интерполяционного полинома 3-го порядка, TVD-лимитеров minmod и Superbee в рамках подхода [25].
- 4) Схема 4. Метод конечного объема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка, TVD-лимитеров minmod и Superbee в рамках подхода [25].
- 5) Схема 5. Метод конечного объема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка, многомерных TVD-лимитеров minmod и Superbee в рамках подхода [25].
- 6) Схема 6. Метод конечного объема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка, многомерных TVD-лимитеров minmod и Superbee в рамках подхода [25] с использованием схемы AUSM+up.

Для приближенного решения задачи Римана в схемах 1–5 использовалась SLAU2 [28] схема, а в схеме 6 – AUSM+up [29] схема.

Таблица 1

## Исходные данные для расчетов в соответствии с условиями стеновых экспериментов [30]

№	Газ	Тип отражения	Угол наклона, град	$M_s$	$p_0$ , торр	$T_0$ , К	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>
4	Воздух	Переходное маховское	20 <sup>0</sup>	7.19	60	298.5	$9.29 \times 10^{-5}$
5	Воздух	Двойное маховское	27 <sup>0</sup>	8.70	30.8	299.2	$4.76 \times 10^{-5}$
9	Аргон	Двойное маховское	49 <sup>0</sup>	7.10	15	296.3	$3.29 \times 10^{-5}$

Перед анализом полученных результатов также следует перечислить ключевые газодинамические структуры, наблюдаемые в эксперименте, и подлежащие воспроизведению в расчете. Принципиальная схема переходного маховского отражения для тестового случая № 4 показана на рис. 3. В результате взаимодействия ударной волны с поверхностью обтекаемого клина формируется дугообразная отраженная ударная волна (2), плавно переходящая в прямую линию в окрестности тройной точки, из которой в свою очередь исходят падающая ударная волна (1) и ножка Маха (3). Последним элементом картины переходного маховского отражения является неустойчивый контактный разрыв (4), имеющий спиралевидную форму.

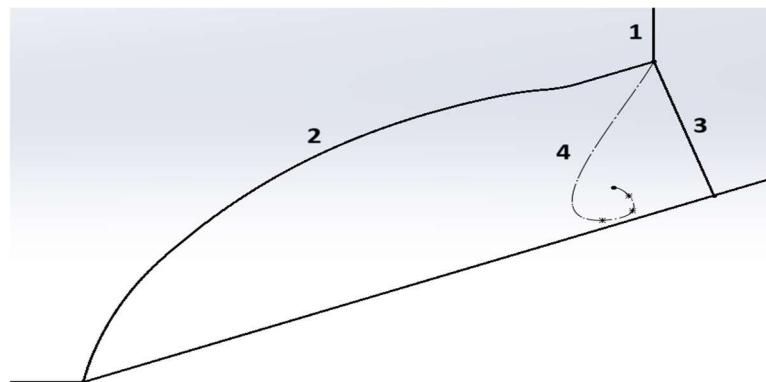
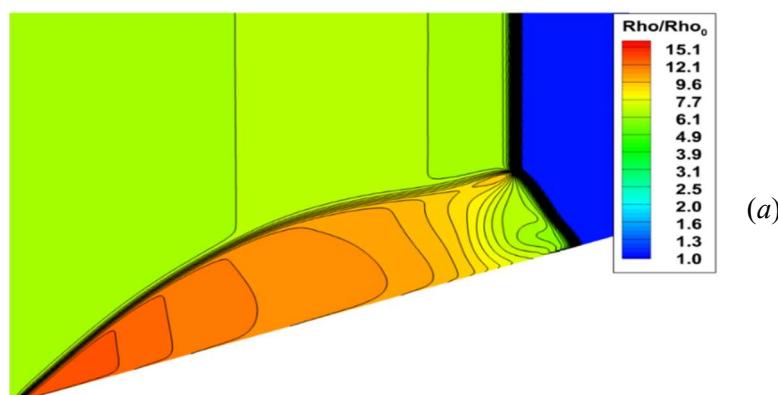


Рис. 3. Двойное маховское отражение в аргоне: 1 – падающая ударная волна; 2 – отраженная ударная волна; 3 – ножка Маха; 4 – контактный разрыв

Результаты применения схемы 1 (рис. 4, а) демонстрируют относительно корректное воспроизведение только ударных волн и ножки Маха, не выделяя при этом контактный разрыв. Схема 2 (рис. 4, б) позволяет численно визуализировать контактный разрыв, что, однако, сопровождается проявлением численных неустойчивостей как в окрестности фронта падающей волны, так и в ударном слое.



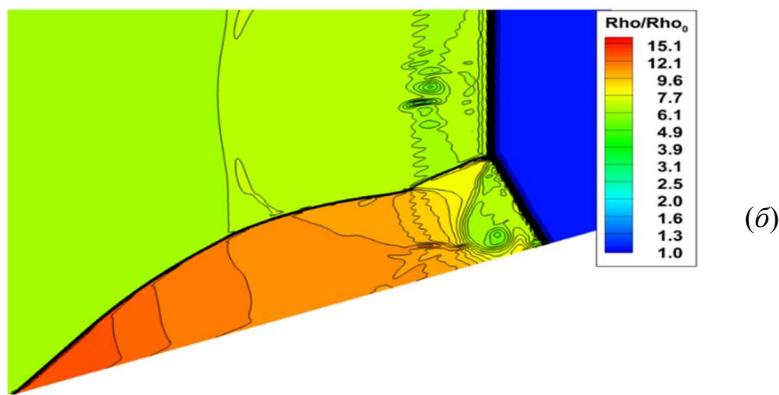


Рис. 4. Результаты численного моделирования переходного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 4. Распределение безразмерной плотности: (a) схема 1-го порядка аппроксимации; (б) MUSCL-схема без применения лимитеров

При проведении расчетов с использованием интерполяционных полиномов 5-го порядка (схема 4, рис. 5, б) удается значительно лучше разрешить контактный разрыв, чем с интерполяционными полиномами 3-го порядка (схема 3, рис. 5, а). Использование TVD-лимитеров в схемах 3–4 позволяет также в значительной степени скорректировать осцилляции поля течения. Применение схем 5 и 6 демонстрирует полученные различия для SLAU2 и AUSM+up схем, которые наиболее отчетливо проявляются в области, ограниченной ножкой Маха и спиралевидным контактным разрывом (рис. 6, а, б).

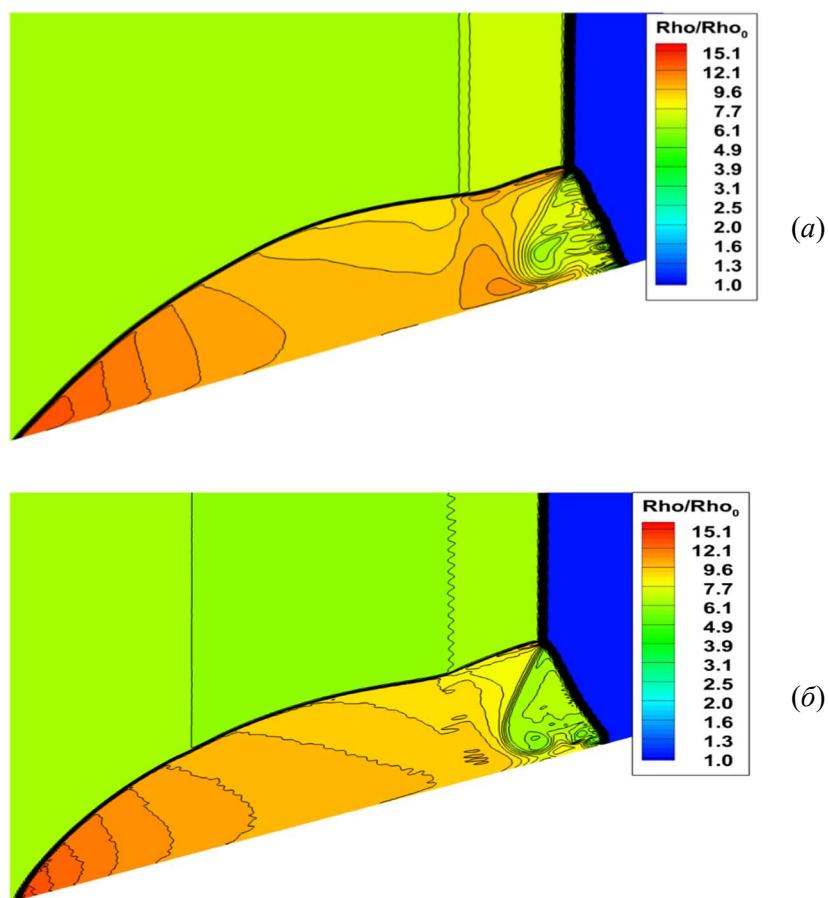


Рис. 5. Результаты численного моделирования переходного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 4. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 3-го порядка; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка

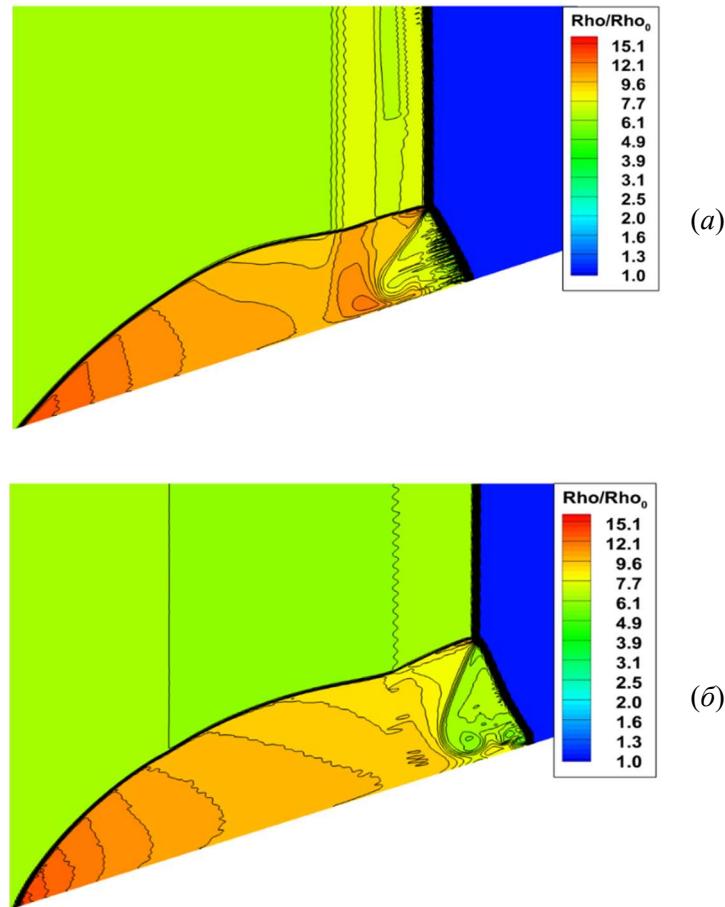


Рис. 6. Результаты численного моделирования переходного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 4. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка и многомерных TVD-лимитеров; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка, многомерных TVD-лимитеров, а также схемы AUSM+up

На рис. 7 показана схема двойного маховского отражения в воздушном потоке для условий тестового случая № 5. По сравнению с переходным маховским отражением изменяется форма отраженной ударной волны (2), которая приобретает точку излома, из которой выходит дополнительная ножка Маха (4).

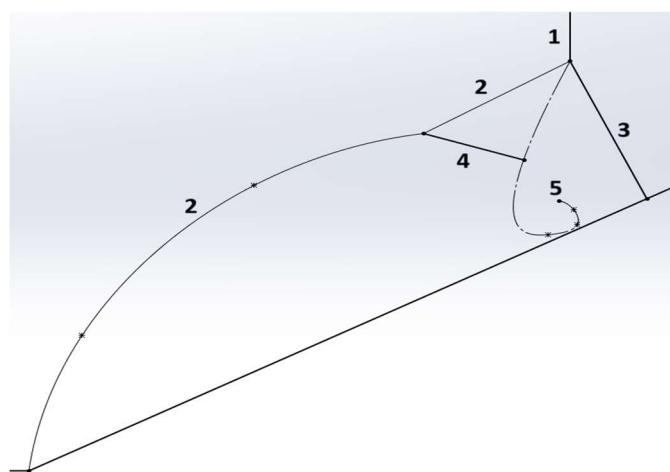


Рис. 7. Двойное маховское отражение в воздухе: 1 – падающая ударная волна; 2 – отраженная ударная волна; 3, 4 – ножки Маха; 5 – контактный разрыв

Расчеты выполненные с использованием схемы 1 (рис. 8, *а*), хотя и демонстрируют гладкость изолиний безразмерной плотности, тем не менее не позволяют выявить точную форму контактного разрыва (5 на рис. 7) и определить структуру дополнительной ножки Maxa (4 на рис. 7). Эта проблема в значительной степени преодолевается при проведении численного моделирования по схеме 2 (рис. 8, *б*). При этом контактный разрыв имеет достаточно размытые контуры. Главная проблема проявляется в деформации основной ножки Maxa (3 на рис. 7), что представляет собой одно из проявлений неустойчивости численной схемы.

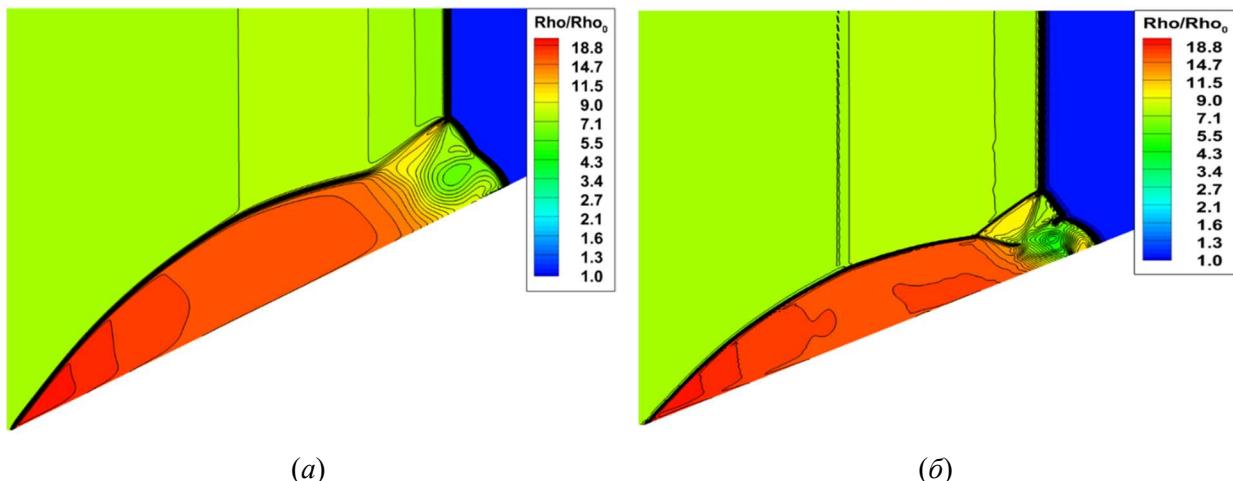


Рис. 8. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 5. Распределение безразмерной плотности: (а) схема 1-го порядка аппроксимации; (б) MUSCL-схема без применения лимитеров

Сравнение численных схем 3 и 4 (рис. 9, *а*, *б*) показывает, что применение интерполяционных полиномов более высокого порядка обеспечивает значительно большее разрешение второй ножки Maxa и контактного разрыва, чем при использовании схем 1 и 2, но, как и в случае со схемой 2, отмечается некоторая неровность первой ножки Maxa. Реализация схем 5 и 6 с многомерными лимитерами (рис. 10, *а*, *б*) в данном случае не приводит к качественному изменению подробности получаемых газодинамических структур. Вместе с тем, возникающие элементы численных неустойчивостей также слабо зависят от применяемого подхода к решению задачи о распаде произвольного разрыва.

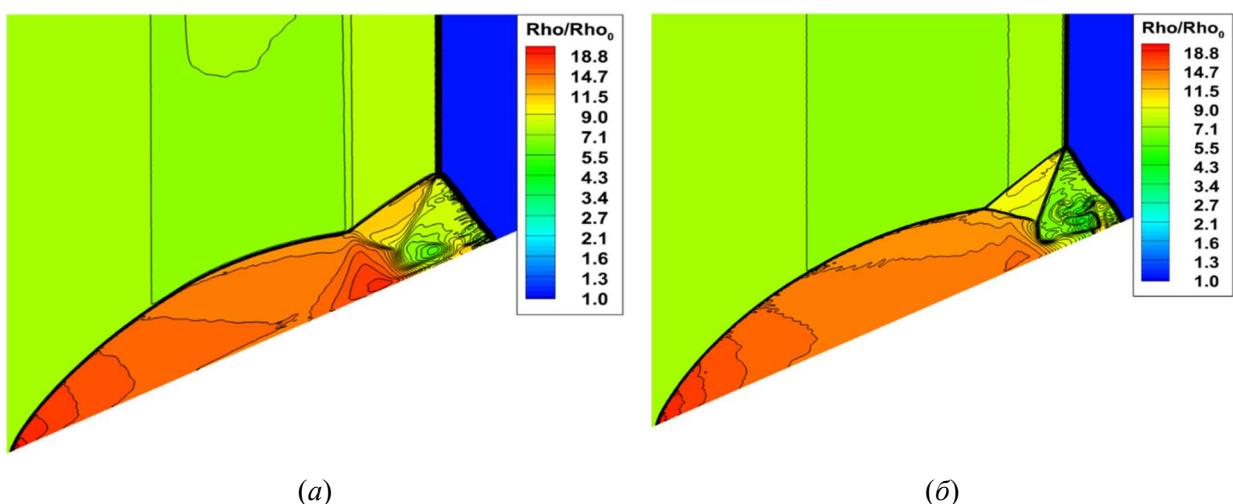


Рис. 9. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 5. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 3-го порядка; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка

Несмотря на внешнее сходство с тестовым случаем № 4, за счет увеличения числа Маха для всех рассмотренных численных схем фиксируется меньший отход отраженной ударной волны от поверхности угла сжатия. При этом также необходимо отметить изменение пропорций между зоной, ограниченной основной ножкой Маха (3) и контактным разрывом (5) и общей площадью области возмущенного потока. Изменение формы контактного разрыва (5) по сравнению с тестовым случаем № 4 начинает происходить на существенно более близком расстоянии от поверхности клина.

Еще одним заметным эффектом применения различных численных схем является изменение соотношения безразмерных плотностей в областях 1-2-4-1 и 1-5-3-1 (см. рис. 7). Так использование схемы 4 (рис. 9, б) позволяет более точно определить значения безразмерной плотности в окрестности тройной точки в сравнении с теневыми картинами из работы [30].

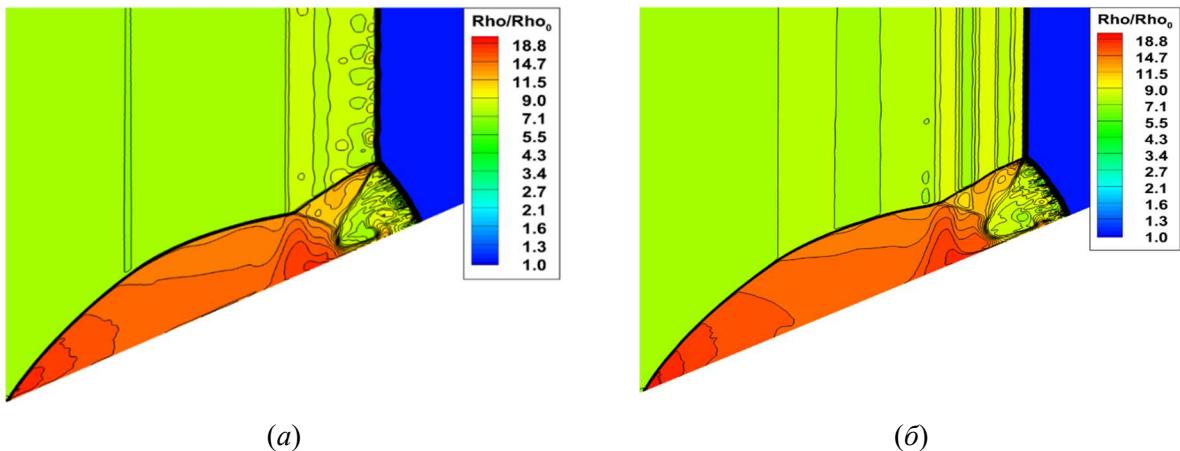


Рис. 10. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в воздухе для тестового случая № 5. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка и многомерных TVD-лимитеров; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка и многомерных TVD-лимитеров, а также схемы AUSM+up

Принципиальная схема двойного маховского отражения в аргоне для тестового случая № 9 показана на рис. 11. Помимо падающей (1) и отраженной (2) ударной волны, ножки Маха (3) и контактного разрыва (5), образуются также дополнительная ножка Маха (4), и еще один контактный разрыв (6).

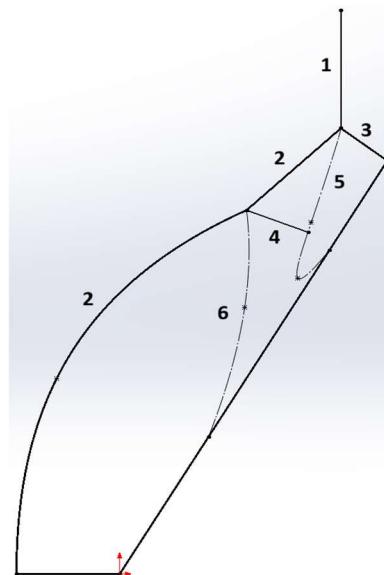


Рис. 11. Двойное маховское отражение в аргоне: 1 – падающая ударная волна; 2 – отраженная ударная волна; 3, 4 – ножки Маха; 5, 6 – контактные разрывы

На рисунках 12–14 представлены результаты верификации различных моделей на примере численного моделирования двойного маховского отражения в аргоне для набора исходных данных, соответствующих тестовому случаю № 9. На рис. 12, *a*, *b* демонстрируются ударно-волновые структуры, получаемые с применением схемы 1-го порядка точности и MUSCL-схемы без лимитера. В первом случае не удается получить вторую ножку Маха (№ 4 на рис. 11) и дополнительный контактный разрыв (№ 6 на рис. 11). При этом первый контактный разрыв (№ 5 на рис. 11) имеет постоянную форму и не демонстрирует признаков неустойчивости. Использование MUSCL-схемы обеспечивает надлежащую визуализацию второй ножки Маха (№ 4 на рис. 11), а также позволяет получить большее значение безразмерной плотности в окрестности примыкания изгиба контактного разрыва к поверхности угла сжатия. Переход к использованию TVD-лимитеров Superbee и minmod совместно с интерполяционными полиномами 3-го порядка (рис. 13, *a*) в свою очередь дает хорошее разрешение дополнительного контактного разрыва (№ 6 на рис. 11), при этом несколько размазывая ножку Маха (№ 4 на рис. 11). Интерполяционные полиномы 5-го порядка (рис. 13, *b*) демонстрируют качественную визуализацию всех ключевых компонентов двойного маховского отражения.

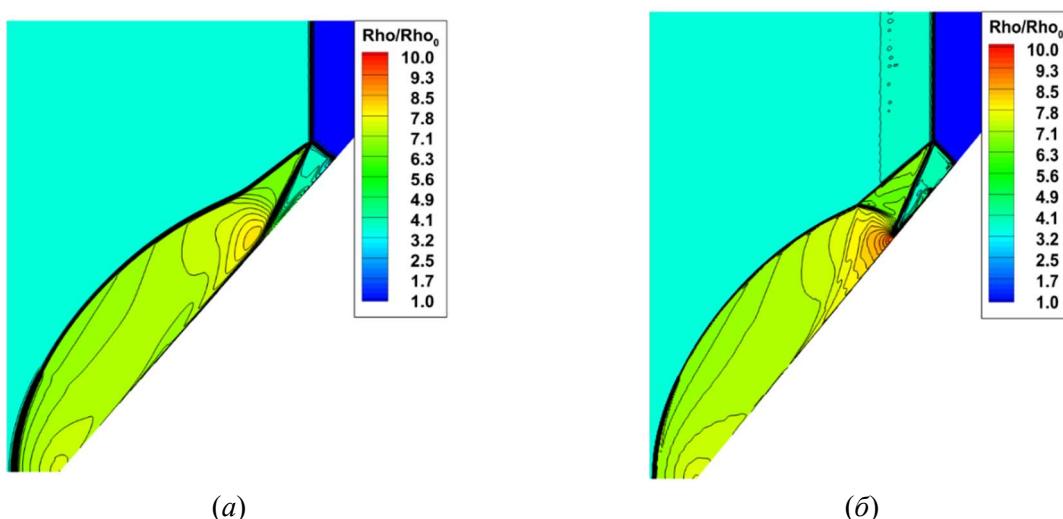


Рис. 12. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в аргоне для тестового случая № 9. Распределение безразмерной плотности: (а) схема 1-го порядка аппроксимации, (б) MUSCL-схема без применения лимитеров

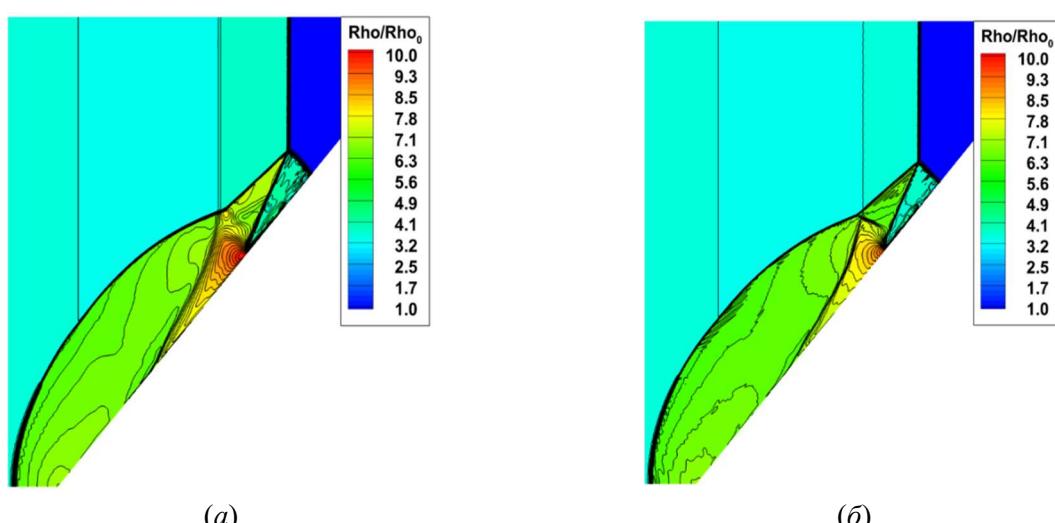


Рис. 13. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в аргоне для тестового случая № 9. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 3-го порядка; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка

Для более достоверной оценки пикового значения безразмерной плотности вдоль поверхности обтекаемого угла сжатия были проведены расчеты с использованием многомерных TVD-лимитеров и интерполяционных полиномов 5-го порядка (рис. 14, *a*). Применение вместо SLAU2-схемы AUSM+up подхода (рис. 14, *б*) увеличивает интенсивность ударно-волнового взаимодействия и значения безразмерной плотности в областях, ограниченными ножками Маха, контактными разрывами и отраженной ударной волной.

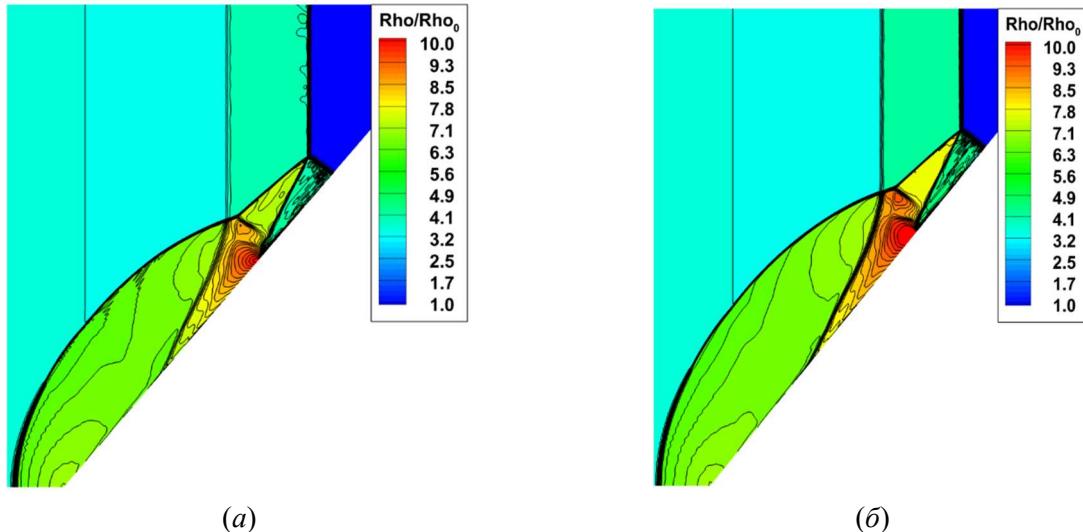


Рис. 14. Результаты численного моделирования двойного маховского отражения в аргоне для тестового случая № 9. Распределение безразмерной плотности: (а) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка и многомерных TVD-лимитеров; (б) схема с использованием интерполяционного полинома 5-го порядка, многомерных TVD-лимитеров, а также схемы AUSM+up

На рис. 15 показан результат эволюции структуры двойного маховского отражения в воздухе (рис. 15, *a*) и в аргоне (рис. 15, *б*). По мере перемещения ударно-волновой конфигурации по поверхности угла сжатия развивается неустойчивость контактного разрыва, проявляющаяся в постепенном искривлении его формы, которое нарастает с удалением от тройной точки и приближением к поверхности обтекаемого тела.

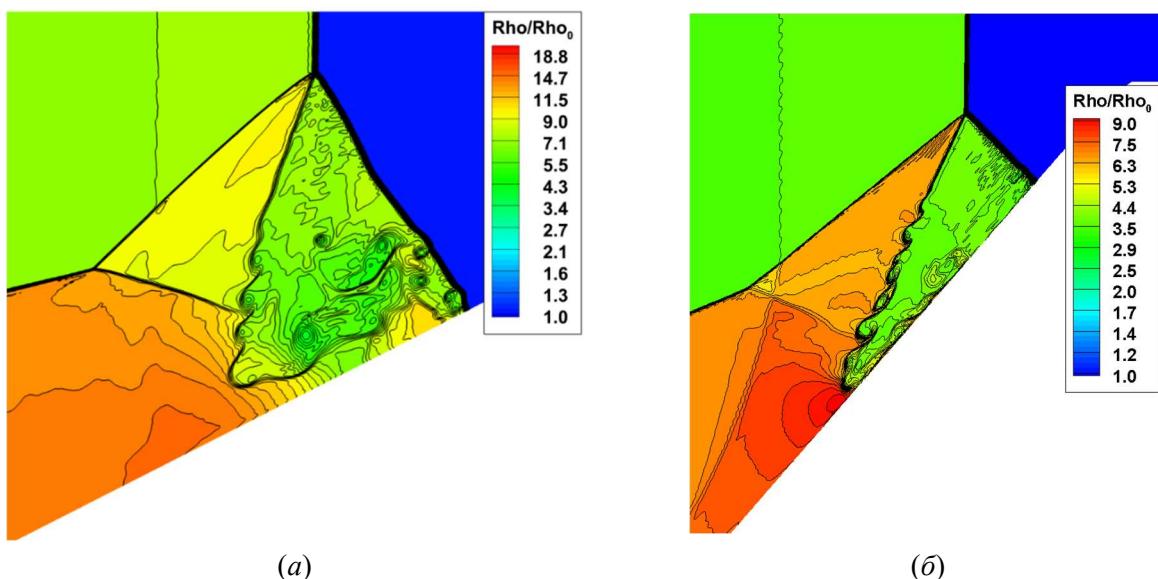


Рис. 15. Нестационарная неустойчивость контактного разрыва: (а) тестовый случай № 5; (б) тестовый случай № 9

На рисунках 16–18 показан сравнительный анализ одномерных распределений безразмерной плотности, полученных с использованием схем 1–6. На иллюстрациях также показаны экспериментальные данные из работы [30].

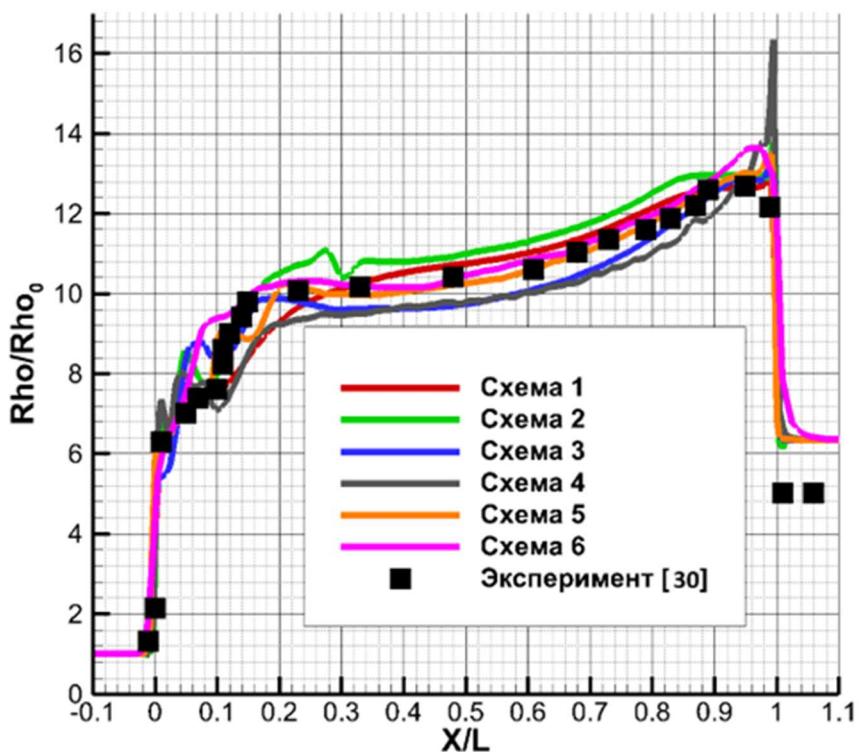


Рис. 16. Распределение безразмерной плотности по поверхности угла сжатия для тестового случая №4

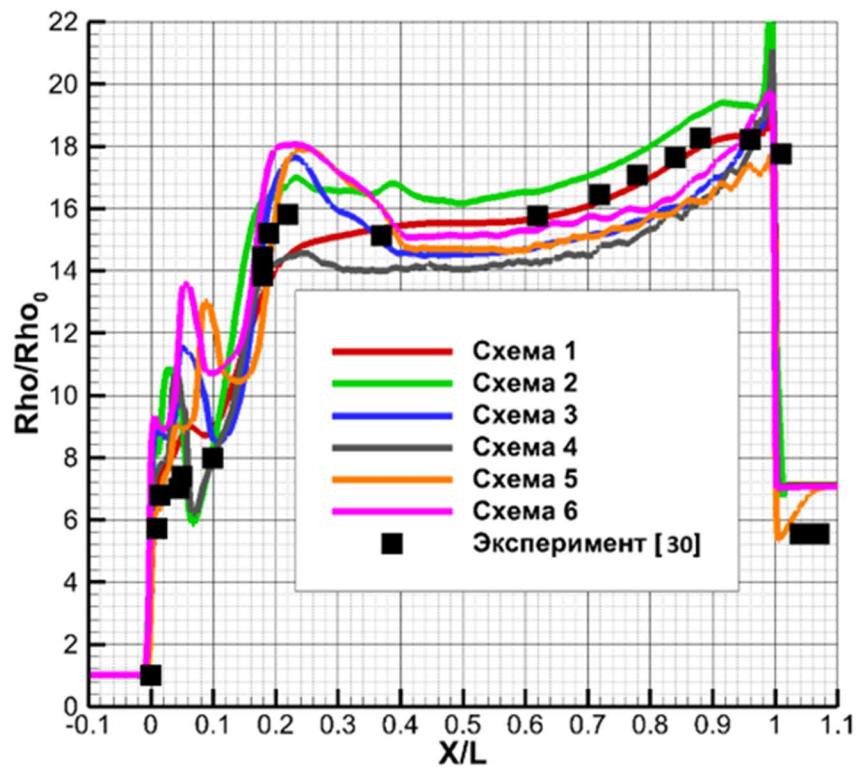


Рис. 17. Распределение безразмерной плотности по поверхности угла сжатия для тестового случая №5

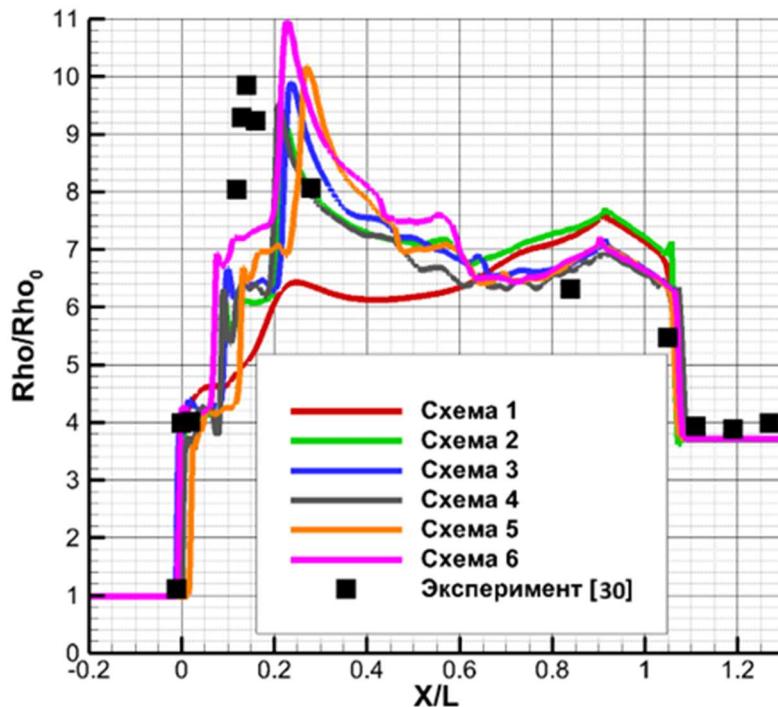


Рис. 18. Распределение безразмерной плотности по поверхности угла сжатия для тестового случая № 9

#### 4. Заключение

Получены результаты численного моделирования обтекания угла сжатия для условий набегающего воздушного или аргонового потока, при которых реализуются различные типы маховского отражения. Продемонстрированы ключевые газодинамические структуры, которые соответствуют теневым картинам, наблюдаемым в стендовом эксперименте. Выполнена оценка влияния параметров численной модели на получаемые картины ударно-волновых конфигураций.

#### Благодарности и ссылка на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания № 124012500440-9.

#### Литература

- Семенов А. Н., Березкин М. К., Красовская И. В. Классификация разновидностей отражения ударной волны от клина. Часть 1. Границы и области существования различных типов отражения // ЖТФ. 2009. Т. 79, № 4. С. 46–51.
- Семенов А. Н., Березкин М. К., Красовская И. В. Классификация разновидностей отражения ударной волны от клина. Часть 2. Экспериментальное и численное исследование разновидностей маховского отражения // ЖТФ. 2009. Т. 79, № 4. С. 52–58.
- Георгиевский П. Ю., Максимов А. Н., Фокеев В. П. Отрицательное маховское отражение с множественными тройными конфигурациями при дифракции ударной волны на клине // Письма в Журнал технической физики. 2021. Т. 47, № 20. С. 11–15.
- Булат М. П. и др. Численное моделирование регулярного и маховского отражения ударной волны от стенки // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17, № 5. С. 920–928.
- Борисов В. Е., Луцкий А. Е. Моделирование перехода между регулярным и маховским отражением ударных волн с помощью неявной схемы на основе методов LU-SGS и BiCGStab // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016, № 68. 36 с. DOI:10.20948/prepr-2016-68

6. Ivanov M.S., et al. Viscosity effects on weak irregular reflection of shock waves in steady flow // *Progress in Aerospace Sciences*. 2010. Vol. 46. No. 2–3. Pp. 89–105.
7. Суржиков С. Т. Численное моделирование ударно-волнового взаимодействия с ламинарным пограничным слоем при гиперзвуковом обтекании моделей с изломом образующей // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2019. Т. 20, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/892/>
8. Иванов И. Э., Крюков И. А., Ларина Е. В. Численное моделирование взаимодействия ударных волн с пограничными слоями для течения в угле сжатия // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2013. Т.14, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/424/>
9. Wu K., Zhang G., Kim H. D. Study on the Mach and regular reflections of shock wave // *Journal of Visualization*. 2019. Vol. 22. No. 2. Pp. 283–303.
10. Wu K., et al. Effect of the wall temperature on Mach stem transformation in pseudo-steady shock wave reflections // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2020. Vol. 147. Pp. 118927.
11. Гвоздева Л. Г., Лагутов Ю. П., Фокеев В. П. Переход от маховского отражения к регулярному при взаимодействии сильных ударных волн с цилиндрическими поверхностями // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1982. № 2. С. 132–138.
12. Гвоздева Л. Г., Предводителева О. А., Фокеев В. П. Двойное маховское отражение сильных ударных волн // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1968. № 1. С. 12–19.
13. Ящухно Д. С., Суржиков С. Т. Метод расщепления по физическим процессам в задаче моделирования обтекания перспективного высокоскоростного летательного аппарата // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение»*. 2018, № 1. С. 20–33.
14. Surzhikov S. T. Validation of computational code UST3D by the example of experimental aerodynamic data // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. Vol. 815. No. 1.
15. Суржиков С. Т. Численная интерпретация экспериментальных данных по аэродинамике модели HB-2 с использованием компьютерных кодов USTFEN и PERAT-3D // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2020. Т.21, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>
16. Панасенко А. В. Результаты расчетов сверхзвукового течения газа около модели аппарата AGARD-B // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2020. Т. 21, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-2/articles/887/>
17. Зинин К. М., Панасенко А. В., Суржиков С. Т. Валидация компьютерного кода UST3D на примере расчета аэродинамических характеристик летательного аппарата X-34 при различных параметрах // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2019. Т. 20, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/882/>
18. Surzhikov S. T. Analysis of the Experimental Data on the Convective Heating of a Model Martian Entry Vehicle Using Algebraic Turbulence Models // *Fluid Dynamics*. 2019. No. 54. Pp. 863–874. <https://doi.org/10.1134/S0015462819060119>
19. Селезнев Р. К. Исследование колебаний в сверхзвуковом канале с каверной // *Изв. РАН. МЖГ*. 2025. № 4. С. 50–65.
20. Суржиков С. Т. Неравновесное сверхзвуковое обтекание затупленной пластины под большим углом атаки // *Изв. РАН. МЖГ*. 2023. № 2. С. 123–137.
21. Surzhikov S. T. Hypersonic Flow past Sharp Plate and Double Wedge with an Electromagnetic Actuator // *Fluid Dynamics*. 2020. No. 55. Pp. 825–839. <https://doi.org/10.1134/S0015462820060117>
22. Yatsukhno D. S. Numerical Study of the HB-2 Standard Model Aerodynamics at Supersonic Velocities // *Fluid Dynamics*. 2025. Vol. 60. No 127. <https://doi.org/10.1134/S0015462825602815>
23. Yatsukhno D. S. Numerical Simulation of the Aerodynamics of Waveriders Based on Shock Waves of Various Shapes // *Fluid Dynamics*. 2023. Vol. 58. Pp. 820–830. <https://doi.org/10.1134/S0015462823601080>

24. Краснов Н. Ф. Аэродинамика Ч.1. Основы теории. Аэродинамика профиля и крыла.: Учебник для студентов вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. Школа. 1980. 495 с.
25. Kim K. H., Kim C. Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows: Part II: Multi-dimensional limiting process // Journal of computational physics. 2005. Vol. 208. No. 2. Pp. 570–615.
26. Sweby P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1984. Vol. 21. No. 5. Pp. 995–1011.
27. Blazek J. Computational fluid dynamics: principles and applications. Butterworth-Heinemann, 2015.
28. Kitamura K., Shima E. A new pressure flux for AUSM-family schemes for hypersonic heating computations // 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. 2011. Pp. 3056.
29. Chen S., et al. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows // Applied Mathematical Modelling. 2020. Vol. 77. Pp. 1065–1081.
30. Deschambault R. L., Glass I. I. An update on non-stationary oblique shock-wave reflections: actual isopycnics and numerical experiments // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 131. Pp. 27–57.

## References

1. Semenov A. N., Berezkina M. K., Krasovskaya I. V., Classification of Shock Wave Reflections from a Wedge. Part 1. Boundaries and fields of the different reflection types existing, *Technical Physics*, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 46–51 [in Russian].
2. Semenov A. N., Berezkina M. K., Krasovskaya I. V., Classification of Shock Wave Reflections from a Wedge. Part 2: Experimental and Numerical Simulations of Different Types of Mach Reflections, *Technikal Physics*, 2009, vol. 79, no. 4, pp. 52–58 [in Russian].
3. Georgievskiy P. Yu., Maksimov A. N., Fokeev V. P., Negative Mach Reflection with Multiple Three-Shock Configurations for Shock Wave Diffraction on a Wedge, *Technical Physics Letters*, 2021, vol. 48, no. 13, pp. 61–64. DOI: 10.21883/TPL.2022.13.53363.18889
4. Bulat M. P., Volobuev I. A., Volkov K. N., Pronin V. A., Numerical simulation of regular and Mach reflection of shock wave from the wall, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 920–928 [in Russian]. DOI: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-920-928
5. Borisov V. E., Lutsky A. E., *Simulation of transition between regular and Mach shock waves reflections by an implicit scheme based on the LU-SGS and BiCGStab methods*, M.: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Preprint No. 68, 2016, 36 p. [in Russian]. DOI:10.20948/prepr-2016-68
6. Ivanov M. S., Bondar Ye. A., Khotyanovsky D. V., Kudryavtsev A. N., Shoev G. V., Viscosity effects on weak irregular reflection of shock waves in steady flow, *Progress in aerospace sciences*, 2010, vol. 46, no. 2–3, pp. 89–105. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2009.11.004>
7. Surzhikov S. T., Numerical modeling of shock-wave interaction with a laminar boundary layer during hypersonic flow around models with a kink, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2019, vol.20, iss. 4 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/892/>
8. Ivanov I. E., Kryukov I. A., Larina E. V., Numerical simulation of shock wave turbulent boundary layer interaction for compression corner flow, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2013, vol.14, iss. 4 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-4/articles/424/>
9. Wu K., Zhang G., Kim H. D., Study on the Mach and regular reflections of shock wave, *Journal of Visualization*, 2019, vol. 22, no. 2. DOI:10.1007/s12650-018-00542-5
10. Wu K., et al., Effect of the wall temperature on Mach stem transformation in pseudo-steady shock wave reflections, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020, vol. 147, p. 118927. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.118927>

11. Gvozdeva L. G., Lagutov Y. P. & Fokeev V. P., Transition from mach reflection to regular reflection when strong shock waves interact with cylindrical surfaces, *Fluid Dynamics*, 1982, no. 17, pp. 273–278 [in Russian].
12. Gvozdeva L. G., Predvoditeleva O. A. & Fokeev V. P., Double Mach reflection of strong shock waves, *Fluid Dynamics*, 1968, no.1, pp. 12–10 [in Russian].
13. Yatsukhno D. S., Surzhikov S. T., Method for Splitting into Physical Processes in Task of the Flow Over a Perspective High-Speed Vehicle Modelling, *Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.*, 2018, no. 1, pp. 20–33 [in Russian]. DOI: 10.18698/0236-3941-2018-1-20-33
14. Surzhikov S. T., Validation of computational code UST3D by the example of experimental aerodynamic data, *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, 2017, vol. 815, no. 1. DOI: 10.1088/1742-6596/815/1/012023
15. Surzhikov S. T., Numerical Interpretation of Experimental Data on Aerodynamics of the HB-2 Model Using Computer Codes USTFEN and PERAT-3D, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2020, vol. 21, iss. 1 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-1/articles/900/>
16. Panasenko A. V., Results of Supersonic Gas Flow Calculations near AGARD-B Model, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2020, vol.21, iss. 2 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2020-21-2/articles/887>
17. Zinin K., Panasenko A. V., Surzhikov S. T., Validation of computer code UST3D by the example of calculating the aerodynamic characteristics of the X-34 vehicle under various parameters, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2019, vol. 20, iss. 4 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/882/>
18. Surzhikov S. T., Analysis of the Experimental Data on the Convective Heating of a Model Martian Entry Vehicle Using Algebraic Turbulence Models, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, pp. 863–874. <https://doi.org/10.1134/S0015462819060119>
19. Seleznev R. K., Study of oscillations in a supersonic channel with a cavity, *Fluid Dynamics*, 2025, vol. 4, pp. 50–65 [in Russian].
20. Surzhikov S. T., Nonequilibrium supersonic flow past a blunt plate at a large angle of attack, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 2, pp. 123–137 [in Russian].
21. Surzhikov S. T., Hypersonic Flow past Sharp Plate and Double Wedge with an Electromagnetic Actuator, *Fluid Dynamics*, 2020, vol. 55, pp. 825–839. <https://doi.org/10.1134/S0015462820060117>
22. Yatsukhno D. S., Numerical Study of the HB-2 Standard Model Aerodynamics at Supersonic Velocities, *Fluid Dynamics*, 2025, vol. 60, no 127. <https://doi.org/10.1134/S0015462825602815>
23. Yatsukhno D. S., Numerical Simulation of the Aerodynamics of Waveriders Based on Shock Waves of Various Shapes, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, pp. 820–830. <https://doi.org/10.1134/S0015462823601080>
24. Krasnov N. F., *Aerodynamics. Part 1. Theoretical Basis. Airfoil and Wing Aerodynamics*, Textbook for students of higher educational institutions. 3rd ed. M.: Higher School, 1980, 495 p. [in Russian].
25. Kim K. H., Kim C., Accurate, efficient and monotonic numerical methods for multi-dimensional compressible flows: Part II: Multi-dimensional limiting process, *Journal of Computational Physics*, 2005, vol. 208, no. 2, pp. 570–615. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.022>
26. Sweby P. K., High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1984, vol. 21, no. 5, pp. 995–1011.
27. Blazek J., *Computational fluid dynamics: principles and applications*, Butterworth-Heinemann, 2015.
28. Kitamura K., Shima E., A new pressure flux for AUSM-family schemes for hypersonic heating computations, AIAA Paper 11-3056. DOI:10.2514/6.2011-3056
29. Chen S., et al., An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows, *Applied Mathematical Modelling*, 2020, vol. 77, pp. 1065–1081. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.09.005>

30. Deschambault R. L., Glass I. I., An update on non-stationary oblique shock-wave reflections: actual isopycnics and numerical experiments, *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 131, pp. 27–57.  
<https://doi.org/10.1017/S0022112083001226>

Статья поступила в редакцию 28 декабря 2025 г.