Undular Bore Equation

A. Y. Yakimov, A. V. Boyko

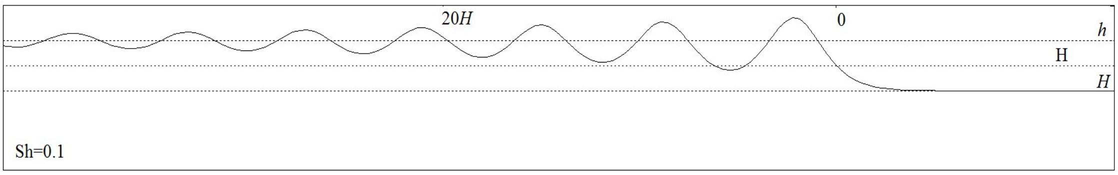
Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (MGU), Moscow, 119192, Russia

ajkimov@mail.ru

Abstract

A plane problem of wave front motion on a surface of an ideal incompressible fluid of finite depth with constant velocity is considered. The initial solution in the form of a smooth bore tends to a steady flow. A non-stationary solution in the form of a second-order nonlinear equation is obtained. The stationary form of the equation is compared with the known results of Lavrentiev and Korteweg-de Vries (KdV). Linearization coincides with the Airy's theory with high accuracy. The solution accuracy is estimated numerically. The result in the form of a non-stationary undular bore corresponds to observations.

Keywords: undular bore, ideal incompressible fluid



Solution of the undular bore equation $z'' + 3\alpha^* + \frac{9}{2}\gamma = \mathrm{Sh} z'$

УДК 532.5.528

Уравнение волнового бора

А. Ю. Якимов, А. В. Бойко

НИИ Механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский пр-т, д.1
ajkimov@mail.ru

Аннотация

Рассматривается плоская задача о движении волнового фронта по поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины с постоянной скоростью. Начальное решение в виде плавного бора устремляется к установившемуся течению. Получено нестационарное решение в виде нелинейного уравнения второго порядка. Стационарная форма уравнения сравнивается с известными результатами Лаврентьева и КдВ. Линеаризация с высокой точностью совпадает с теорией Эри. Точность решения оценивается численно. Результат в виде нестационарного волнового бора соответствует наблюдениям.

Ключевые слова: волновой бор, идеальная несжимаемая жидкость.

1. Введение

Известны уравнения для нелинейных волн Лаврентьева [1] и КдВ [2]. Многие авторы математических моделей ссылаются на [2], несмотря на то, что существование уединенной волны впервые доказано в [1]. Сравнение уравнений Лаврентьева и КдВ является отдельной математической задачей и ей посвящена часть статьи. Указанные уравнения не содержат решения в виде гидравлического прыжка и не описывают нестационарные течения, в частности волновой или ондулярный бор с колебаниями поверхности за фронтом. В [3] содержится обзор публикаций по этой тематике. Аналитические работы авторам не известны. В настоящей работе сконструировано нестационарное уравнение волнового бора.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости с потенциалом Φ в прямолинейном канале бесконечной длины глубины h на $-\infty$ в поле силы тяжести.

Введем прямоугольную систему координат (X, Y), движущейся со скоростью V, причем ось X принадлежит дну канала, а ось Y направлена вертикально вверх (рис. 1).

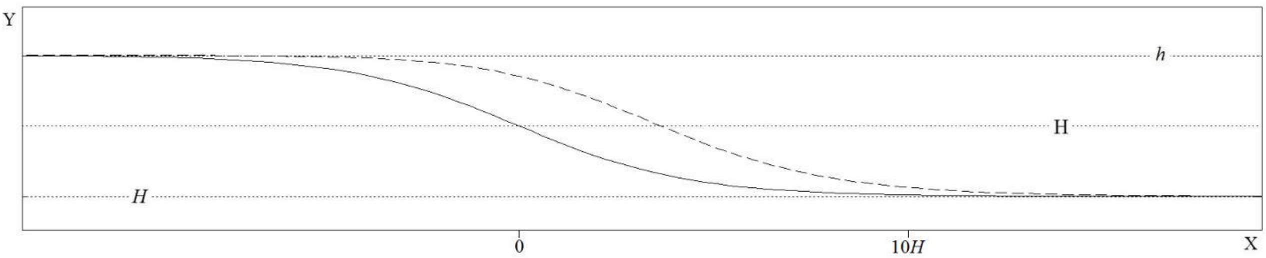


Рис. 1. Кривая в виде $Y = h\left\{1 - \dfrac{h-H}{2h}\left[1 + \mathrm{th}\left(\dfrac{b}{h}X\right)\right]\right\}$ (сплошная линия), решение уравнения (8) в начальный момент времени (пунктирная линия) при $FR = 1.3$

На свободной поверхности Y имеет постоянство давления и кинематическое условие

$$\frac{1}{2}U^2 + gY + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \text{const}\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{Y}} = \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{X}}\frac{\partial Y}{\partial \mathrm{X}} + \frac{\partial Y}{\partial t} \tag{1}$$

Выберем произвольную постоянную так, чтобы невозмущенная поверхность при скорости частиц $U = V$ являлась решением. Начальное условие (рис. 1) возьмем в виде гладкого бора $Y = h\left\{1 - \dfrac{h-H}{2h}\left[1 + \mathrm{th}\left(\dfrac{b}{h}\mathrm{X}\right)\right]\right\}$, где H и C определяется равенством расходов $CH = Vh$ и интегралом Бернулли $C^2 + 2gH = V^2 + 2gh$, а b определим ниже. Течение стремится к стационарному при $t \to \infty$.

Будем искать уравнение в виде [1] для волн на поверхности тяжелой жидкости с отличной от нуля правой частью

$$z'' + 3\alpha z + \frac{9}{2}\gamma z^2 = f(\xi, t)$$

Введем безразмерные переменные $y = Y/h$, $\xi = \mathrm{X}/h$ и малую величину $z = y - 1$. Представим составляющие скорости в виде рядов, обеспечивающих тождественное выполнение уравнения Лапласа, аналогично [2, 3]

$$u(\xi,t) = V\left[1 - \frac{h}{H}z(\xi,t) + \frac{1}{2}\frac{h}{H}\left(\frac{\mathrm{Y}}{h}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}z(\xi,t) - \frac{1}{4!}\frac{h}{H}\left(\frac{\mathrm{Y}}{h}\right)^4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}z(\xi,t) + \ldots\right],$$

$$\upsilon(\xi,t) = V\left[\frac{h}{H}\frac{\mathrm{Y}}{h}\frac{\partial}{\partial\xi}z(\xi,t) - \frac{1}{3!}\frac{h}{H}\left(\frac{\mathrm{Y}}{h}\right)^2\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}z(\xi,t) + \ldots\right]$$

Подставим члены ряда в (1) и запишем в виде

$$z'' - \left(\frac{h}{H}z + \ldots\right)z'' + \frac{1}{4}\frac{H}{h}z''^2 + \frac{h}{H}\left[\left(1 - \frac{h}{H}z - \ldots\right)^2 + (z' - \ldots)^2 + \frac{2gh}{V^2}z - 1\right] = -\frac{2}{V^2}\frac{h}{H}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

где штрихами обозначены частные производные по ξ. Таким образом $f(\xi,t) = -\dfrac{2}{V^2}\dfrac{h}{H}\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$. Найдем коэффициенты уравнения и правую часть из физических соображений, а затем оценим точность полученного результата.

3. Стационарное решение

По экспериментально подтвержденной теории Эри [2] стационарные линейные волны описываются уравнением

$$z'' + (kh)^2 z = 0\,,$$

где k – корень уравнения $kh = \left(gh/V^2\right)\mathrm{th}(kh)$, а в [1] коэффициент линейного члена равен 3α, где $\alpha = \mathrm{Fr}^{-2} - 1$, $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{gh}$. Избегая трансцендентности, положим $kh = (\alpha + 1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}$. Нетрудно убедиться (рис. 2), что длина линейной волны теперь достаточно точно совпадает с Эри и линеаризованное течение потенциально.

Оценим разрыв кинематического условия, для точного выполнения которого необходимо

$$\frac{g\,\mathrm{th}(kh)}{V^2 k} = 1$$

При подстановке вместо kh приближения дробь $\dfrac{\mathrm{th}\left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\,\right]}{\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}}$ отлична от единицы. Но максимум последней функции при $0 \le \alpha \le \infty$ равен ≈ 1.016, с этой точностью выполняется кинематическое условие линейного приближения.

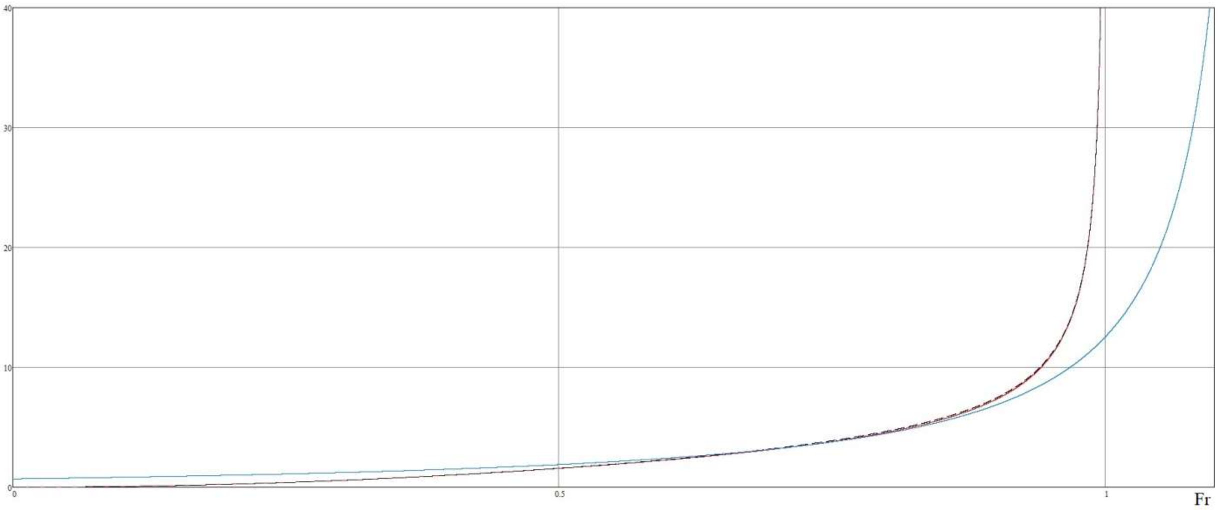


Рис. 2. Безразмерные зависимости длин волн от числа Фруда. Длина волны по линейной теории Эри в неявном виде (красный цвет), длина волны по уравнению (2) $\Lambda = 2\pi \mathrm{Fr}^2 \coth\sqrt{3\left(\mathrm{Fr}^{-2}-1\right)}$ (пунктир), длина волны по уравнению (4) при $\mathrm{A}=0.3$ (синий цвет)

Итак, имеем стационарное линейное уравнение

$$z'' + \left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\,\right]^2 z = 0 \tag{2}$$

Добавим такой нелинейный член, чтобы решение уравнение (2) имело асимптоту H/h начального условия. Получаем уравнение с учетом нелинейности

$$z'' + \left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\,\right]^2 z + \left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\,\right]^2 \frac{h}{h-H} z^2 = 0 \tag{3}$$

Перепишем уравнение (3) в компактном виде

$$z'' + 3\alpha^* z + \frac{9}{2}\gamma z^2 = 0 \tag{4}$$

Исследуем стационарное течение. Предельное решение (4) имеет вид уединенной волны $Y(\xi) = h\left[1 + \dfrac{\alpha^*}{\gamma}\left(\dfrac{1}{3} - \mathrm{th}^2\dfrac{\sqrt{3\alpha^*}}{2}\xi\right)\right]$ с высотой $\dfrac{3}{2}(h-H)$. Этот результат близок к известным теоретическим [2, 3] и экспериментальным [4, 5] по высоте и форме волны.

Подставим главные члены ряда для u в интеграл Бернулли

$\dfrac{1}{2}U^2 + gY = \dfrac{1}{2}V^2 + gh$, получим $Y = \dfrac{1}{g}\left\{gh + \dfrac{V^2}{2} - \dfrac{1}{2}\left[V\left(1 - \dfrac{h}{H}z + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{H}{h}\right)^2 z''\right)\right]\right\}$.

Найдем $R = \dfrac{1}{h}\left[Y - h(1+z)\right]$. Так как $z'' = -3\alpha z - \dfrac{9}{2}\gamma z^2$, то

$$R = \frac{1}{gh}\left\{gh + \frac{V^2}{2} + \frac{1}{2}\left[V\left(1 - \frac{h}{H}z + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{h}\right)^2\left(3\alpha^* z + \frac{9}{2}\gamma z^2\right)\right)\right]^2\right\} - (1+z) -$$

– (пунктирная линия на рис. 3, *а*).

Обозначим $a = \dfrac{\alpha^*}{\gamma}$, тогда $H = h\left(1 - \dfrac{2}{3}a\right)$. Полагая $\alpha \sim \alpha^* \sim a$ получим с точностью до главных членов $R \approx \dfrac{7}{3}\left(\dfrac{1}{3}a + \dfrac{1}{2}z\right)z(1-a)$ (сплошная линия на рис. 3, *а*). Графики на рис. 3, *а* показывают, что R имеет максимум на вершине волны при $z = \dfrac{1}{3}a$ $\quad R(a) \approx \dfrac{7}{12}a^2(1-a)$ (сплошная линия на рис. 3, *б*) и меньше a^2 при любых *а* от 0 до 1.

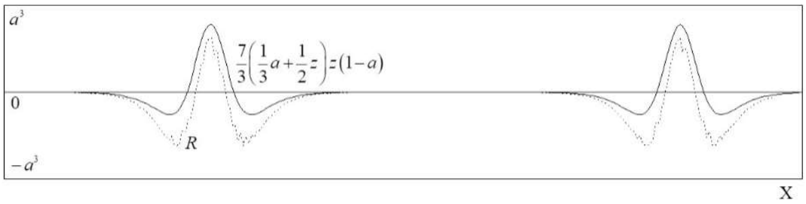


Рис. 3, *а*. Остаточный член уравнения Бернулли

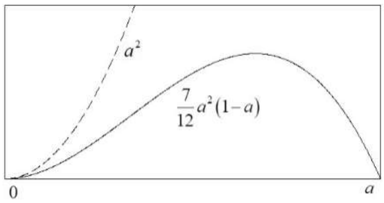


Рис. 3, *б*. Оценка остаточного члена

4. Сравнительный анализ

Сравним (4) с уравнением для волн в тяжелой жидкости [1], где коэффициент линейного члена 3α. Воспользуемся разложением гиперболического тангенса при квадрате аргумента меньшим $\pi^2/4$ или $\alpha < \pi^2/12$ ($FR < 1.325$, что близко к обрушению волны)

$$\left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\right]^2 = \left[(\alpha+1)\left(\sqrt{3\alpha} - \frac{1}{3}\sqrt{3\alpha}^3 + \frac{2}{15}\sqrt{3\alpha}^5 - \frac{17}{315}\sqrt{3\alpha}^7 + \ldots\right)\right]^2$$

или

$$\left[(\alpha+1)\,\mathrm{th}\sqrt{3\alpha}\right]^2 = 3\left(\alpha + \frac{2}{5}\alpha^3 + \ldots\right)$$

Мы получили совпадение с точностью до 2/5 куба малого параметра. Теперь имеем стационарную форму уравнения (4) в виде $z'' + 3\alpha z + 3\alpha\dfrac{h}{h-H}z^2 = 0$. Заменим коэффициент при нелинейном члене, не уходя от асимптоты уравнения

$$z'' + 3\alpha z + \frac{3}{2}\left(3 + 2\alpha - \frac{z}{1+z}\right)z^2 = 0$$

Последнее уравнение с точностью до главных членов совпадает с [1]. Покажем, что в том же приближении $2\alpha\dfrac{h}{h-H} \approx 3$ для совпадения нелинейных коэффициентов. Воспользуемся выражениями $H = h\mathrm{Fr}\left(\mathrm{Fr} + \sqrt{\mathrm{Fr}^2 + 8}\right)/4$ и $C = h\sqrt{2g/(H+h)}$ (компактный вывод содержится в [5]). Если ввести $FR = C/\sqrt{gH}$, то $FR = 8\mathrm{Fr}\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Fr}^2 + \mathrm{Fr}\sqrt{\mathrm{Fr}^2+8}}\right)^3$, а с точностью до $\alpha^2/16$ $\;FR \approx \sqrt{1+\alpha} \approx 1/\mathrm{Fr}$, т.е. введенные числа Фруда в указанном приближении обратны.

$$2\alpha\frac{h}{h-H}=\frac{2\alpha}{1-\frac{1}{4\sqrt{\alpha+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}+\sqrt{\frac{1}{\alpha+1}+8}\right)}$$

Пренебрегая малым членом под последним квадратным корнем, получим

$$2\alpha\frac{h}{h-H}\approx\frac{8\alpha(\alpha+1)}{3+4\alpha-3\sqrt{\alpha+1}}$$

И, раскладывая $\sqrt{\alpha+1}$ до квадрата малого параметра,

$$2\alpha\frac{h}{h-H}\approx\frac{8\alpha(\alpha+1)}{3+4\alpha-3\left(1+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{8}\alpha^2\right)}$$

или $2\alpha\frac{h}{h-H}\approx\frac{16}{5}\frac{\alpha+1}{1+(3/20)\alpha}$. Разложив знаменатель с прежней точностью, имеем

$$2\alpha\frac{h}{h-H}\approx\frac{16}{5}(\alpha+1)\left[1-\frac{3}{20}\alpha+\left(\frac{3}{20}\alpha\right)^2\right]$$

Отбросив последний член, получим окончательно $2\alpha\frac{h}{h-H}\approx 3.2+2.72\alpha$, т.е. нелинейный коэффициент близок к [1]. Перепишем последнее дифференциальное уравнение

$$\frac{2}{3}z''+\left(1-z+z^2-\frac{z^3}{1+z}\right)+2\nu z-z+2\nu z^2-1=0$$

Добавив малый член и используя известное тождество, выполним выкладку [1] в обратном порядке

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}(1+z)z''\right)^2+\frac{2}{3}(1+z)z''+1\right]+2\nu(1+z)=2\nu+1$$

Вернемся к переменной Y

$$\frac{1}{2}\left[\frac{Vh}{Y}\left(1+\frac{1}{3}YY''\right)\right]^2+gY=\frac{V^2}{2}+gh$$

Таким образом, из интеграла Бернулли и линейной теории мы получили приближенную формулу Лаврентьева

$$\left|\frac{U}{V}\right|=|f'|=\frac{h}{Y}\left(1+\frac{1}{3}YY''+R\right),$$

где f – конформное отображение плоскости течения на прямую полосу шириной h. Для неустановившихся течений формула Лаврентьева использовалась в [7]. В указанном безразмерном виде формула М.А. Лаврентьева представлена в [8]. Вместо нефизических условий применимости [1] и [8] для данной задачи имеем только диапазон изменений числа Фруда по средней глубине от $\left(\sqrt{1+\pi^2/12}\right)^{-1}$ до $\sqrt{1+\pi^2/12}$. Сохранять нелинейность для гладких волн при меньших числах Фруда не имеет смысла и результат Эри является исчерпывающим, а при больших числах Фруда волны обрушаются.

Сравним (1) с известным уравнением КдВ [2].

$$\frac{\partial^3}{\partial \mathrm{X}^3}\eta + \frac{9}{\mathrm{H}^3}\eta\frac{\partial}{\partial \mathrm{X}}\eta = 0$$

Высота предельной волны $A = 3(\mathrm{H} - H)$, скорость на ∞ $C = \sqrt{g(H + A/3)}\left(1 + \frac{A}{H + A/3}\right)$.

Нетрудно убедиться, что $A = \frac{3}{2}(h - H)$, $\mathrm{H} = \frac{h + H}{2}$, $\sqrt{g\mathrm{H}} = \frac{C + V}{2}$. Проинтегрируем уравнения КдВ при $\eta = -A/3$, $\partial^2\eta/\partial \mathrm{X}^2 = 0$ или, что то же самое, $\eta = A/3$, $\partial^2\eta/\partial \mathrm{X}^2 = 0$.

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2}\eta + \frac{9}{2\mathrm{H}^3}\eta^2 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\mathrm{H}^3}$$

Перейдем к переменной Y

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2}Y + \frac{9}{2\mathrm{H}^3}(Y - \mathrm{H})^2 = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\mathrm{H}^3}$$

Перепишем в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2}Y + \frac{9}{2\mathrm{H}^3}(Y - h + h - \mathrm{H})^2 = \frac{9}{2}\frac{(h - H)^2}{\mathrm{H}^3}$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{X}^2}(Y - h) + \frac{9}{2\mathrm{H}^3}(Y - h)^2 + \frac{9}{\mathrm{H}^3}(h - H)(Y - h) = 0$$

Обезразмерив на h и перейдя к переменной z, получим окончательно

$$z'' + 9\frac{(h - \mathrm{H})h^2}{\mathrm{H}^3}z + \frac{9}{2}\left(\frac{h}{\mathrm{H}}\right)^3 z^2 = 0 \qquad (5)$$

Коэффициенты последнего уравнения весьма незначительно отличаются от коэффициентов (4), а отношения коэффициентов в уравнениях совпадают.

Нами показано, что уравнение (4) и уравнение КдВ имеют общую асимптоту. Эту же асимптоту имеют и уравнения [9]. Найдем остаточный член формулы Лаврентьева подставив вместо $1/3$ отношение коэффициента при линейном члене (5) к α. $R \approx \frac{9}{4}\left(\frac{h - H}{h} + z\right)\frac{h - H}{h}z$, таким образом, точность уравнений КдВ, (4) и [1] совпадают.

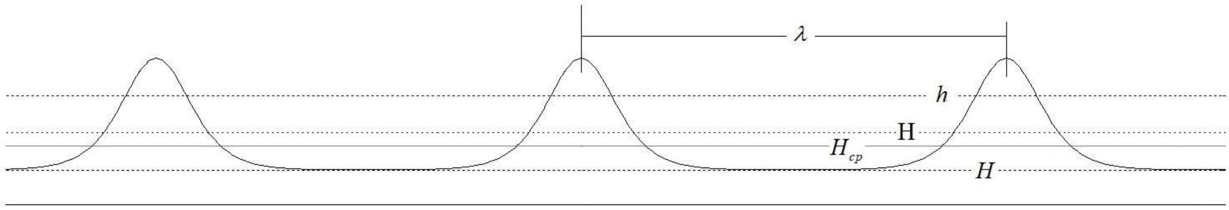


Рис. 4. Поверхность в виде решения уравнения (4)

Теперь необходимо найти зависимость длины волны от числа Фруда по средней глубине водоема рис. 4. Уравнения (4) допускает первый интеграл

$$\xi = \int_z^{z_0}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\beta^2 - 3\left(\alpha^* z^2 + \gamma z^3\right)}},$$

где $\beta = \sqrt{3\left(\alpha^* z_0^2 + \gamma z_0^3\right)}$ и определяется длина волны

$$\lambda = 2h\int_{z_1}^{z_0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\beta^2 - 3\left(\alpha^* z^2 + \gamma z^3\right)}},$$

где
$$z_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{\alpha^*}{\gamma} - z_0\right)^2 - 4z_0^2} - \frac{\alpha^*}{\gamma} - z_0\right]$$

При высоте волны $\left(z_0 - z_1\right)h = \dfrac{\alpha^*}{\gamma}h$ решение имеет форму солитона в традиционном виде

$$Y = H + A\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3\alpha^*}}{2}\xi\right), \quad \text{где } A = \frac{\alpha^*}{\gamma}h.$$

За скорость волны аналогично [2] примем среднюю скорость потока на дне

$$U_{cp} = \frac{2Vh}{\lambda}\int_{\lambda/2h}^{0} 1 - \frac{h}{H}z(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

И так как $H_{cp} = \dfrac{2}{\lambda}\displaystyle\int_{\lambda/2h}^{0} h\left(1 + z(\xi)\right)\mathrm{d}\xi$, то $U_{cp} = \dfrac{V}{H}\left(h + H - H_{cp}\right)$.

Приблизим волновую поверхность цепочкой солитонов. Тогда

$$H_{cp} = \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda/2h}^{0} H + A\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{3\alpha^*}}{2}\xi\right)\mathrm{d}\xi,$$

полагая sech во впадинах волн равным 0, получим $H_{cp} \approx H + \dfrac{4h}{\lambda}\dfrac{A}{\sqrt{3\alpha^*}}$ или $\lambda = \dfrac{4h}{H_{cp} - H}\dfrac{A}{\sqrt{3\alpha^*}}$.

В безразмерном виде

$$\frac{\lambda}{H_{cp}} = \frac{16}{3}\mathrm{A}^2\frac{\coth\sqrt{3\left[\frac{1}{2}\frac{h}{H}\left(\frac{h}{H}+1\right)-1\right]}}{\left(\frac{h}{H}+1\right)\left(\frac{h}{H}-1-\frac{2}{3}\mathrm{A}\right)}, \tag{6}$$

где $\mathrm{A} = \dfrac{A}{H_{cp}}$. Так как $V = H\sqrt{\dfrac{2g}{h+H}}$ и $H_{cp} = \dfrac{3}{2}\dfrac{h-H}{\mathrm{A}}$, то

$$U_{cp} = \sqrt{gH_{cp}}\sqrt{\frac{4}{3}\frac{\mathrm{A}}{(h/H)^2 - 1}}\left(\frac{h}{H} + 1 - \frac{3}{2}\frac{(h/H) - 1}{\mathrm{A}}\right)$$

Число Фруда по средней глубине водоема

$$\mathrm{Fr} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{\mathrm{A}}{(h/H)^2 - 1}}\left(\frac{h}{H} + 1 - \frac{3}{2}\frac{(h/H) - 1}{\mathrm{A}}\right)$$

Возведем число Фруда в квадрат и найдем отношение h к H из полученного квадратного уравнения

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2+\frac{2\left(9-4\mathrm{A}^2\right)}{3\left(\mathrm{Fr}^2\mathrm{A}+4\mathrm{A}-3\right)-4\mathrm{A}^2}\frac{h}{H}-\frac{3\left(\mathrm{Fr}^2\mathrm{A}+4\mathrm{A}+3\right)+4\mathrm{A}^2}{3\left(\mathrm{Fr}^2\mathrm{A}+4\mathrm{A}-3\right)-4\mathrm{A}^2}=0,$$

$$\frac{h}{H}=\frac{\mathrm{FrA}\sqrt{\mathrm{Fr}^2+8}-3+(4/3)\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}\left(\mathrm{Fr}^2+4\right)-3-(4/3)\mathrm{A}^2} \tag{7}$$

Подстановка (7) в (6) дает зависимость безразмерной длины волны от числа Фруда и высоты волны (см. рис. 2).

5. Волновой бор

Вернемся к нестационарному течению. Вместо (4) имеем

$$z''+3\alpha^*z+\frac{9}{2}\gamma z^2=-\frac{2}{V^2}\frac{h}{H}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{8}$$

Граничное условие $z=\dfrac{H-h}{h}$, $z'=0$ выдвигается при $\xi=+\infty$. Заметим, что кривизна гладкого бора $z''=-\dfrac{2}{3}ab^2\mathrm{th}(b\xi)\left(\mathrm{th}^2(b\xi)-1\right)$ не превышает $(2a/3)^3$. Если ей пренебречь в уравнении (8), то при правой части равной $\dfrac{3\alpha^*}{2b}z'$ оно будет иметь точное решение в виде начального условия

$$3\alpha^*z+\frac{9}{2}\gamma z^2=\frac{3\alpha^*}{2b}z' \tag{9}$$

Исходя из сделанных предположений естественно взять коэффициент правой части в виде числа Струхаля $\mathrm{Sh}=\dfrac{h}{V(\tau+t)}$, где $\tau=\dfrac{2}{3\alpha^*}\dfrac{h-H}{V}$. Тогда из (8) получим окончательно

$$z''+3\alpha^*z+\frac{9}{2}\gamma z^2=\mathrm{Sh}z' \tag{10}$$

Решение уравнения (8) при $t=0$ показано пунктирной кривой на рис. 1. Из (8) и (9) следует $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}=-\dfrac{VH}{2(\tau+t)}z'$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{VH}{2h(\tau+t)}z''$ с точностью до главных членов ряда $\mathrm{u}=V\left(1-\dfrac{h}{H}z\right)$, а $\dfrac{\partial u}{\partial t}=-\dfrac{Vh}{H}\dfrac{\partial z}{\partial t}$. Тогда $\dfrac{\partial Y}{\partial t}=\dfrac{H^2}{2h(\tau+t)}z''$. Кинематическое условие $v=u\dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{X}}+\dfrac{\partial Y}{\partial t}$ сводится в безразмерном виде к $\varepsilon(\xi)=\dfrac{h}{H}zz'+\dfrac{H^2}{2Vh(\tau+t)}z''=0.$

Анализ показывает (нижние кривые рис. 5), что последнее уравнение выполняется с точностью до $a^{7/2}$ при любом t, так как при росте кривизны по времени падает число Струхаля. Полученное течение наблюдается, например, при входе прилива в реку [10] и экспериментах [6].

6. Заключение

Полученный результат отличается простотой. Стационарная форма уравнения (10) соответствует уравнениям КдВ и Лаврентьева, его линеаризация совпадает с теорией Эри. Приближение поверхности цепочкой солитонов позволило получить длину нелинейной волны в явном виде. Физический подход, использованный при получении уравнения позволил получить результат (см. рис. 5), качественно соответствующий наблюдениям [6], [10]. Уравнение (10) может быть использовано для изучения развития волнового следа и для исследования нестационарных нелинейных волн в стратифицированной жидкости. Может быть интересным взаимодействие волнового фронта с волнодвижителем [11].

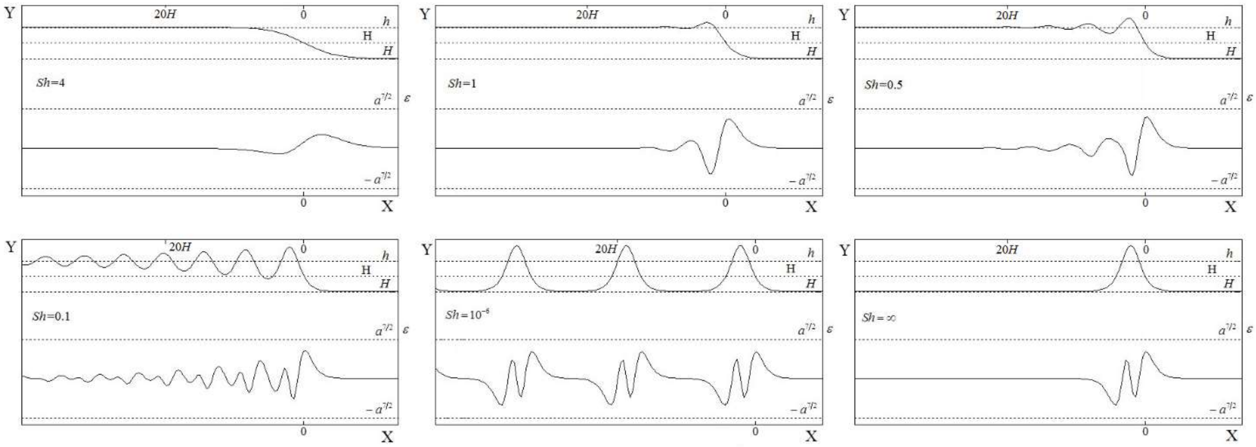


Рис. 5. Картины течения в различные моменты времени (верхние кривые), выполнение кинематического условия (нижние кривые)

Благодарности и ссылки на гранты

Авторы выражают благодарность В.В. Прокофьеву за внимание к работе и обсуждение результатов.

Литература

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. С. 398–403.
2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
3. Букреев В.И., Гусев А.В. Волны в канале впереди вертикальной пластины // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 82–90.
4. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ НКТП СССР. 1936
5. Russell S., Report on Waves, Brit. Ass. Rep., 1844.
6. Филатов Е.В., Якимов А.Ю. Сопротивление пластинки, глиссирующей на мелкой воде с образованием волн // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 5. С. 29–37.
7. Якимов Ю.Л. О неустановившихся движениях несжимаемой жидкости в узких областях // ДАН СССР, 1957. Т. 115, № 6, С. 1080–1083.
8. Якимов Ю.Л. О приближенной формуле для растяжения при конформном отображении области, имеющей узкий участок // Сиб. Мат. Журн. 1962. Т. 3. № 6. С. 956–960.
9. Якимов А.Ю. Уравнения для нелинейных волн на мелкой воде // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 6. С. 122–125.
10. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986.
11. Бойко А.В., Прокофьев В.В., Архангельский Е.А. Применение волновых движителей различных типов на полупогружных катамаранах. Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2024, Т.25, № 6. http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-6/articles/817/

References

1. Lavrentyev M. A., Shabat B. V., *Methods of the theory of functions of a complex variable*, M.: Nauka, 1973, pp. 398–403 [in Russian].

2. Sretenskiy L. N., *Theory of wave motions of liquids*, M.: Nauka, 1977 [in Russian].
3. Bukreev V. I., Gusev A. V., *Waves ahead of vertical plate in channel*, *Fluid Dynamic*, 1999, vol. 23, issue 1, pp. 71–77.
4. Sretenskiy L. N., *Theory of wave motions of liquids*, ONTI NKTP, 1936 [in Russian].
5. Russell S., *Report on Waves*, Brit. Ass. Rep., 1844.
6. Filatov E. V., Yakimov A. Yu., *Drag of a Plate Planing on the Shallow Water with Formation of Waves*, *Fluid Dyn*., 2018, vol. 53, pp. 608–615. https://doi.org/10.1134/S0015462818050075
7. Yakimov Yu. L., *On unsteady motions of incompressible fluid in narrow regions*, DAN USSR, 1957, vol. 115, no. 6, pp. 1080–1083 [in Russian].
8. Yakimov Yu. L, On an approximate formula for the expansion of a conformal mapping domain with a narrow section, *Syb. Math. Jour*., 1962, vol. 3, no. 6, pp. 956 – 960 [in Russian].
9. Yakimov A. Yu., Equations for nonlinear waves on shallow water, *Fluid Dyn.,* 2012, vol. 47, pp. 789–792. https://doi.org/10.1134/S0015462812060117
10. *Album of liquid and gas flows,* M.: Mir, 1986 [in Russian].
11. Boyko A. V., Prokofiev V. V., Arkhangelsky E. A., Use of wave propulsors of various types on semisubmersible catamarans, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2024, vol. 25, no. 6 [in Russian]. DOI: 10.33257/PhChGD.25.6.817

Статья поступила в редакцию 29 октября 2024 г.