

Experimental Determination of the Turbulent Prandtl Number

Yu. K. Rudenko, N. A. Vinnichenko, A. V. Pushtae, Yu. Yu. Plaksina, A. V. Uvarov

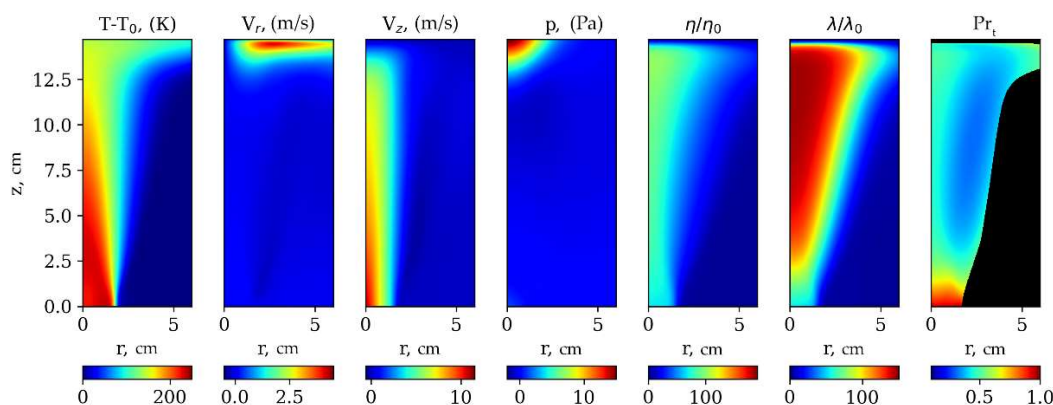
*Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russia*

ykrudenko@gmail.com, nickvinn@yandex.ru, pushtae@yandex.ru,
yuplaksina@mail.ru, uvarov@phys.msu.ru

Abstract

Description of the heat transfer processes in physical-chemical gas dynamics using RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes) turbulence models requires determination of the turbulent thermal conductivity coefficient. For historical reasons, the turbulence models yield the turbulent viscosity distribution, from which the turbulent thermal conductivity is determined using the turbulent Prandtl number (TPN). However, TPN can depend on the problem parameters and may vary within the flow. Applicability of the models, proposed to predict the TPN spatial variations, is limited to specific flows. For example, the Kays-Crawford model describes the increase of the TPN in the boundary layer near a solid wall. To validate and to improve the models experimental tests are required. In the present study the experiment, performed for an impinging hot gas jet, is considered. The mean temperature field, measured using background oriented schlieren (BOS), contains information concerning the turbulent thermal conductivity coefficient. The experiment also includes sparse measurements of velocity using a hot wire anemometer. The physics-informed neural network (PINN) combines experimental data with equations in order to reconstruct the fields of fluid-dynamic quantities, including the turbulent viscosity and turbulent thermal conductivity. The conventional assumption of constant TPN is shown to be valid near the jet axis, but at the edge its value is decreased. The obtained distributions of TPN are compared with results of earlier studies, both experimental and numerical, using large eddy simulations (LES). The proposed technique promotes the studies of various flows, for which the temperature or concentration (for the turbulent Schmidt number determination) field can be measured, including the chemically reacting flows.

Keywords: turbulent Prandtl number, background oriented schlieren, data assimilation, physics-informed neural network.



Fields of temperature perturbation ($T-T_0$), radial velocity (V_r), axial velocity (V_z), pressure perturbation (p), viscosity ratio (η/η_0), thermal conductivity ratio (λ/λ_0), TPN (Pr_t), reconstructed with PINN data assimilation using BOS measurements

УДК 532.5

Экспериментальное определение турбулентного числа Прандтля

Ю. К. Руденко, Н. А. Винниченко, А. В. Пуштаев,
Ю. Ю. Плаксина, А. В. Уваров

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, дом 1, строение 2*
ykrudenko@gmail.com, nickvinn@yandex.ru, pushtaev@yandex.ru,
yuplaksina@mail.ru, uvarov@phys.msu.ru

Аннотация

Описание процессов теплообмена в физико-химической газодинамике в рамках RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes) моделей турбулентности требует определения коэффициента турбулентной теплопроводности. Исторически сложилось так, что модели турбулентности позволяют найти распределение турбулентной вязкости, а турбулентная теплопроводность определяется из нее с помощью турбулентного числа Прандтля (ТЧП). Однако ТЧП может зависеть от параметров задачи и варьироваться в пределах области течения. Область применения моделей, предложенных для расчета пространственных изменений ТЧП, ограничена конкретными течениями. Например, модель Кейса-Кроуфорда описывает рост ТЧП в пограничном слое вблизи твердой стенки. Для подтверждения и совершенствования моделей необходима их экспериментальная проверка. В данной работе рассматривается эксперимент, выполненный для импульсной струи нагретого газа. Среднее поле температуры, измеренное с помощью теневого фонового метода (ТФМ), содержит информацию о турбулентном коэффициенте теплопроводности. В эксперименте также проводятся измерения скорости в отдельных точках с помощью термоанемометра. Физически-информированная нейросеть (PINN) сопоставляет экспериментальные данные с уравнениями для восстановления полей гидродинамических величин, в том числе турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности. Показано, что в центре струи можно использовать стандартное условие постоянного ТЧП, но к периферии оно снижается. Проведено сравнение полученных распределений ТЧП с известными исследованиями, как экспериментальными, так и численными с использованием метода крупных вихрей (LES). Предложенный метод расширяет возможности исследований для различных течений, в которых можно измерить поле температуры или поле концентрации (для определения турбулентного числа Шмидта), в том числе течений химически реагирующих сред.

Ключевые слова: турбулентное число Прандтля, теневой фоновый метод, ассимиляция данных, физически-информированная нейросеть.

1. Введение

Моделирование с применением турбулентного числа Прандтля играет важную роль в задачах физико-химической газодинамики, инженерных расчётах теплообмена и в инженерной геофизике. Большинство расчетных пакетов программ основаны на применении таких алгоритмов. В то же время, неверное определение турбулентного числа Прандтля приводит к существенным ошибкам в расчетах. Эта проблема активно обсуждается для ракетных двигателей [1–3], систем охлаждения с использованием жидких металлов [4, 5] и смеси He-Xe [6], в геофизических задачах [7], для струйных течений [8–12] и для ряда других приложений [13, 14, 15]. Интересен пример со сверхзвуковыми течениями, где вариация турбулентного

числа Прандтля приводит к изменению полей скорости звука и меняет положение ударного фронта [16]. Расчеты неизотермических турбулентных течений, основанные на уравнениях RANS, включают в себя алгебраические или дифференциальные модели турбулентности. В моделях турбулентности первого порядка чаще всего турбулентная теплопроводность и турбулентная вязкость связаны через постоянное турбулентное число Прандтля, величина которого вводится в расчетных пакетах программ (ANSYS, Comsol, OpenFoam, Star CCM+ и др). Такой способ определения ТЧП может привести к несогласию с экспериментальными данными [16]. Расчеты с использованием трехпараметрической RANS-модели турбулентности, дополненной уравнением переноса для турбулентного потока тепла, показывают расхождения чисел Нуссельта до 15 % при выборе различных величин постоянного ТЧП в пограничном слое на пластине [15]. По этой причине дополнительные экспериментальные методики представляют интерес. Экспериментальные проверки развиваются, например, для определения коэффициентов турбулентной вязкости методом PIV (см, например, [17, 18]). Процедура восстановления поля турбулентной вязкости весьма сложна и требует больших усилий как с точки зрения эксперимента, так и с точки зрения теории. В то же время, экспериментальные измерения с помощью теневого фонового метода (ТФМ) или других количественных рефракционных методов позволяют получить усредненное поле плотности, температуры или концентрации. Как правило, при наличии неоднородности предполагается, что использование рефракционных методов ограничено из-за усреднения результата вдоль пути луча. Однако полученное поле температуры позволяет восстановить распределение турбулентной теплопроводности. Аналогично можно восстановить поле турбулентного коэффициента диффузии из среднего распределения концентрации в многокомпонентной среде, также измеренного ТФМ или другим рефракционным методом. Другим важным источником информации о ТЧП оказывается численное моделирование. Конечно, прямое применение RANS-моделей не позволяет получить какую-то дополнительную информацию. В них турбулентное число Прандтля должно быть задано либо как константа (что делается чаще всего), либо какой-то аппроксимационной формулой в зависимости от параметров подобия, например, числа Пекле (см, например, обзор [4]). В то же время, расчеты DNS и LES могут дать информацию о турбулентном числе Прандтля [19–24].

Рекомендации по определению ТЧП основаны на нескольких алгоритмах и, вообще говоря, зависят от молекулярного числа Прандтля. В работе [25] было перечислено более 30 моделей определения турбулентных чисел Прандтля и Шмидта и эти модели были разбиты на 7 групп. В более позднем обзоре [26] приводится уже видоизмененная классификация, а в недавнем обзоре [7], выполненном как продолжение обзора [26] применительно к физике атмосферы, эти изменения еще более существенны. Такая ситуация понятна и связана с быстрым развитием численных методов, в том числе тех, которые не используют модель RANS (прежде всего, DNS и LES) и позволяют получить ТЧП напрямую. В то же время, традиционные инженерные методики, существенно упрощающие поиск решения, продолжают активно развиваться как в инженерной теплофизике [27], так и в инженерной геофизике [7]. Анализ литературы указывает на отсутствие единой модели для определения ТЧП для различных геометрий течения. В частности, в рассматриваемой геометрии струи в работе [10] экспериментальные измерения локальных параметров привели к выводам об изменении числа Прандтля как по высоте струи, так и по радиусу. Эти изменения связаны с существованием некоторого провала числа Прандтля вблизи оси и его резким уменьшением на краях струи. В работе [11] из численных расчетов методом LES также было продемонстрировано резкое падение числа Прандтля на краях струи.

Существующие методы определения ТЧП нужно рассматривать применительно к конкретным задачам. В большом количестве исследований описывается турбулентный пограничный слой, особенно в ситуации, когда можно отделить решение гидродинамической задачи от тепловой. Для теплового погранслоя есть и многочисленные теории, и экспериментальные данные по распределению температуры (см, например [26, 28]). В погранслое

возможны ТФМ-измерения поля температур, но методика ТФМ позволяет существенно расширить круг задач и существенно упростить исследования – вместо большого количества термомпар, искажающих структуру течения, можно получить все поле температур с помощью бесконтактного измерения, но по одной координате это распределение будет усреднено.

Гидродинамические струи также являются предметом активного изучения. С точки зрения рефракционных методов, изменение показателя преломления происходит как за счет изменения температуры, так и за счет изменения концентрации компонент. По этой причине часто рассматриваются холодные струи с впрыском гелия или водорода [29, 30]. Исследование температурных полей и полей скорости в струях на первых этапах происходило с помощью контактных методов (см, например, [31]), но, конечно, в последние годы основное внимание уделяется методу PIV и рефракционным методам измерения температуры и концентрации. Анализ полученных решений также основывался на сравнении с упрощенными аналитическими моделями. В настоящее время основное внимание уделяется численным методам решения, хотя сравнения с аналитикой полезны для проверки результатов.

Теоретические работы, связанные с усреднением уравнения энергии по аналогии с уравнениями движения в задаче Рейнольдса (см, например, [26, 32]), имеют важное значение, потому что в итоге в численных моделях оцениваются именно нелинейные члены, которые не позволяют замкнуть усредненную систему уравнений [9]. Если говорить о перспективах, то именно усреднение уравнений энергии и может привести к созданию моделей с дополнительными уравнениями для определения турбулентной теплопроводности в каждой точке, по аналогии с коэффициентом турбулентной вязкости. Прямое численное моделирование DNS стало применяться для данной задачи довольно давно (см, например [21]) и в этих работах проводится сравнение с имеющимися аналитическими решениями как для ламинарной, так и для турбулентной струи [32]. В настоящее время такой подход развивается [19, 20, 22, 33], так как позволяет понять точность численных методов, но его применение ограничено по величине числа Рейнольдса. Применение методов LES [20, 23, 24] позволяет существенно продвинуться в область более высоких значений числа Рейнольдса и провести сравнение с методами RANS. Несмотря на утверждение, что LES дает лучшее согласие с экспериментом [23], следует понимать, что при грамотном использовании DNS при малых числах Рейнольдса решения не будут отличаться (см, например, [20]). Для струй чаще рассматривается задача взаимодействия струи с плоской поверхностью, так как задача имеет большое практическое значение. В настоящей работе будет рассмотрена именно импактная струя.

Важной задачей является расчет камер сгорания двигателей, где и давление в камере сгорания, и температура на стенках камеры существенно зависят от ТЧП [1–3]. Разумные результаты получаются для значений ТЧП, лежащих в диапазоне от 0.45 до 0.85 [3], при условии постоянной величины ТЧП во всей камере сгорания.

Существуют модели расчета турбулентного числа Прандтля из параметров подобия. Как правило, модели с переменным ТЧП связаны с исследованиями потоков тепла вблизи твердой границы с целью достижения более точного соответствия чисел Нуссельта экспериментальным данным [15, 34]. Недостаток таких моделей заключается в отсутствии универсальности. В то же время, их часто используют для расчетов. В данной работе будут протестированы две модели – Кейса – Кроуфорда (см., например [26]) и модифицированная модель Кейса – Кроуфорда [34].

Комбинация расчетных методов с экспериментальными данными привела к развитию различных методов ассимиляции данных. В применении к задачам гидродинамики становятся популярны нейросети, обучающиеся не на большом количестве размеченных данных, которых может быть недостаточно для обучения классической нейросети, но удовлетворяющие уравнениям и экспериментальным данным, так называемые физически-информированные нейросети (physics-informed neural networks, PINN). При этом, по сравнению с традиционным численным моделированием, нейросеть не так чувствительна к шуму экспериментальных данных и позволяет включать различные данные, в том числе разреженные или

измеренные в отдельных точках. В данной работе предложен способ ассимиляции данных с применением физически-информированной нейросети. С его помощью проведено восстановление распределений гидродинамических величин для импульсной осесимметричной квазистационарной турбулентной струи с использованием экспериментальных данных температуры, полученных ТФМ, и точечных измерений скорости с помощью термоанемометра. PINN были впервые предложены в работе [35] и могут использоваться для решения обратных задач [36, 37] или для численного моделирования [38–40].

2. Постановка эксперимента

Поля температуры для струи горячего воздуха из строительного фена измеряются с помощью теневого фонового метода [41, 42]. ТФМ все чаще используется в последние годы благодаря простоте и низкой стоимости экспериментальной установки по сравнению с интерференционными методами. С помощью однокурсного ТФМ могут быть измерены мгновенные поля плотности и температуры для двумерных и осесимметричных течений, а также качественно визуализированы трехмерные течения [43]. Метод основан на цифровом сравнении изображений фона, снятых через оптически однородную среду (опорный снимок) и через исследуемый поток, т.е. шлирен-объект (рабочий снимок). Вследствие преломления лучей при прохождении через шлирен-объект рисунок фона искажается. Смещение элементов фона на рабочих снимках пропорционально усредненному вдоль луча градиенту показателя преломления. С помощью компьютерной обработки изображений определяется поле смещений. Затем из полей первых пространственных производных восстанавливается поле показателя преломления, по которому рассчитываются связанные с ним величины, например, плотность, температура или концентрация. В качестве фона в ТФМ можно использовать любые изображения, и несмотря на то, что было предложено множество модификаций ТФМ с разными типами фоновых изображений, большинство исследователей по-прежнему используют кросс-корреляционную обработку изображений, заимствованную из PIV, и фоны из случайно расположенных пятен, похожие на PIV-изображения. Кросс-корреляционный метод определяет наиболее вероятное смещение ансамбля пятен, расположенных внутри области опроса. Из-за этого возникает проблема ограниченного пространственного разрешения и появляются сложности при ТФМ-измерениях течений с резкими перепадами показателя преломления, например, ударных волн в газах или тонких температурных или диффузионных слоев в жидкостях. В указанных течениях имеет место сильная деформация как ансамбля пятен, так и изображений отдельных пятен. Кросс-корреляционный алгоритм при этом, как правило, занижает значения смещения, что приводит к занижению перепада показателя преломления [44]. В [42] было показано, что можно значительно улучшить пространственное разрешение и достоверность в областях с большим градиентом смещения, если использовать фон из периодических полос, а поле смещения определять с помощью фурье-профилометрии (Fourier transform profilometry, FTP), предложенной для интерферометрии и трехмерного сканирования поверхности [45]. В данной работе поля температуры измеряются методом ТФМ с использованием бинарного периодического фона. Схема установки приведена на рис. 1.

Для создания импульсной струи использовался строительный фен с насадкой в виде конуса для дополнительного перемешивания, улучшающего симметрию течения. Радиус насадки составляет 18 мм. Чтобы исключить естественную конвекцию вблизи внешней поверхности сопла, сопло было обернуто в стеклянную тепловату.

Максимальная скорость на выходе сопла составляет около 9 м/с. Эксперименты проводились при разных температурах струи на входе: 170°C и 260°C. Скорость измеряется в холодной струе с помощью термоанемометра. Измерения расхода воздуха в различных режимах фена показали, что расход можно считать постоянным. При моделировании экспериментов с различными температурными режимами учитывается поправка на скорость, которая рассчитывается из условия постоянного расхода воздуха.

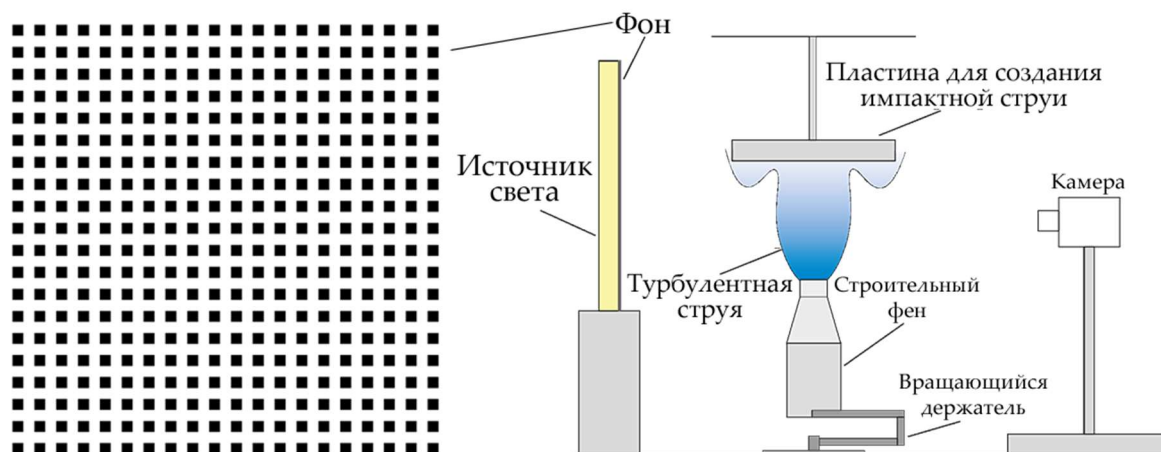


Рис. 1. Схема установки ТФМ с бинарным периодическим фоном

Латунный диск радиусом 6 см помещается на высоте 14.7 см от выхода сопла. Вблизи пластины становятся заметными эффекты, связанные с асимметричностью струи. Поэтому фен закреплен во вращающемся держателе, ось которого совпадает с осью сопла фена. Среднее поле температуры получается в результате обработки 10 серий, каждая из которых состоит из 40 кадров и снимается для определенного углового положения фена с шагом 18° .

Число Рейнольдса для данной конфигурации установки лежит в пределах от 20000 до 30000. Температура воздуха в комнате во всех экспериментах равнялась 22°C .

Черно-белый фон из регулярно расположенных квадратных пятен был напечатан на прозрачной пленке и подсвечен сзади светодиодной панелью. Расстояние между фоном и соплом составляет 53 см. Использовались два типа камер – Canon EOS 700D с зум-объективом Canon EF 75–300 мм f/4–5.6 и высокоскоростная камера Evercam HR 2000-128-C с объективом Tokina atx-i 100 мм f/2.8 FF MACRO. С помощью обратного преобразования Абеля определяются пространственные производные показателя преломления, и в результате решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах находятся распределения показателя преломления $n(r, z)$. Поле плотности находится из соотношения Гладстона – Дейла:

$$\frac{n-1}{\rho} = G, \quad (1)$$

где $G = 2.26 \times 10^{-4} \text{ м}^3/\text{кг}$ – постоянная Гладстона – Дейла для воздуха. Затем из уравнения состояния с постоянным давлением определяется поле температуры. Как показано в [46], использование обеих компонент смещения приводит к более гладким полям температуры по сравнению с традиционным подходом, в котором используется только распределение радиальной компоненты смещения.

С помощью термоанемометра PCE-423 измеряются профили скорости вдоль оси и поперек струи в нескольких сечениях по z , в том числе на выходе сопла. Эти данные используются для подбора параметров модели турбулентности в RANS-моделировании, задания граничного условия на выходе сопла, в качестве дополнительных данных для нейросети и для сравнения с результатами проведенной ассимиляции данных. Погрешность измерения скорости, указанная производителем термоанемометра, составляет 5 %, но не менее 0.1 м/с.

3. Методика ассимиляции данных и численное моделирование

3.1. Постановка задачи

Квазистационарное состояние вертикальной осесимметричной струи горячего воздуха из круглого сопла описывается RANS-уравнениями для слабосжимаемой жидкости

$$\frac{\partial(\rho V_r)}{\partial r} + \frac{\rho V_r}{r} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(-\frac{2}{3} \nabla \vec{V} + 2 \frac{\partial V_r}{\partial r} \right), \quad (3)$$

$$\rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta V_z + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \left(-\frac{2}{3} \nabla \vec{V} + 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) - (\rho - \rho_0)g, \quad (4)$$

$$C_p \rho \left(V_r \frac{\partial T}{\partial r} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \Delta T + \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\rho = \frac{p_0 \mu}{RT}, \quad (6)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и $\nabla \vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$. Ось z направлена вверх, начало координат соответствует центру сопла. ρ , T и $\vec{V}$ – плотность, температура и скорость среды; p – отклонение давления от атмосферного p_0 ; c_p – удельная теплоемкость; μ – молярная масса воздуха; R – универсальная газовая постоянная; g – ускорение свободного падения; η , λ – полные коэффициенты вязкости и теплопроводности, то есть

$$\eta = \eta_0 + \eta_t, \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_t, \quad (7)$$

где η_0, η_t – молекулярная и турбулентная вязкости; λ_0 – молекулярная теплопроводность и

$$\lambda_t = \eta_t c_p / \text{Pr}_t \quad (8)$$

турбулентная теплопроводность, Pr_t – турбулентное число Прандтля.

Если поле температуры известно, то уравнение энергии (5) можно рассматривать относительно неизвестной полной теплопроводности, а плотность определять через уравнение состояния. В таком случае система уравнений (2–6) замкнута относительно радиальной и осевой скоростей, давления, турбулентных вязкости и теплопроводности. Решая данную систему с соответствующими граничными условиями, можно получить полное описание турбулентного течения без использования дополнительной модели турбулентности. Таким образом, поле турбулентной вязкости определяется по влиянию эффективной теплопроводности на квазистационарное поле температуры.

Для RANS-моделирования и ассимиляции данных с применением модели $k - \varepsilon$ к системе уравнений (2–6) добавляются уравнения для кинетической энергии турбулентных пульсаций k и скорости диссипации турбулентной энергии ε

$$\begin{aligned} \rho \left(V_r \frac{\partial k}{\partial r} + V_z \frac{\partial k}{\partial z} \right) = & \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial^2 k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial k}{\partial r} + \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial k}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) + \\ & + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) + |S^2| - \rho \varepsilon, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(V_r \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + V_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = & \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} \right) + \\ & + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta_0 + \frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} \right) + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} |S^2| \eta_t - f_\varepsilon C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $|S^2| = 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{V_r}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2$.

В уравнениях движениях (3), (4) в правой части добавляется член $\partial(2\rho k/3)/\partial r$, $\partial(2\rho k/3)/\partial z$, соответственно. Использовался вариант модели для низких чисел Рейнольдса, включающий дополнительные демпфирующие функции f_ε , f_η [47]

$$f_\eta = \left(1 - e^{-l^*/14}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{R_t^{3/4}} e^{-(R_t/200)^2}\right), \quad f_\varepsilon = \left(1 - e^{-l^*/3.1}\right)^2 \cdot \left(1 - 0.3 e^{-(R_t/6.5)^2}\right), \quad (11)$$

$$l^* = \frac{\rho u_\varepsilon l_w}{\eta_0}, \quad R_t = \frac{\rho k^2}{\eta_0 \varepsilon}, \quad u_\varepsilon = \left(\frac{\eta_0 \varepsilon}{\rho}\right)^{1/4}$$

Здесь $l_w(r, z)$ – расстояние до пластины. Турбулентная вязкость выражается следующим образом:

$$\eta_T = \rho f_\eta C_\eta \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (12)$$

Значения констант: $\sigma_k = 1.4$, $\sigma_\varepsilon = 1.5$, $C_{1\varepsilon} = 1.5$, $C_{2\varepsilon} = 1.9$, $C_\eta = 0.09$.

3.2. Моделирование

RANS-моделирование выполнялось в Comsol Multiphysics 6.2. Решалась система уравнений: (2–4) для моделирования холодной струи с постоянными свойствами среды и полная система уравнений (2–6) с заданным значением турбулентного числа Прандтля. Использовалась $k - \varepsilon$ -модель турбулентности (9–12). Расчетная область состоит из двух частей: течение струи от входного сопла до соударения с пластиной и область выше нее (рис. 2).

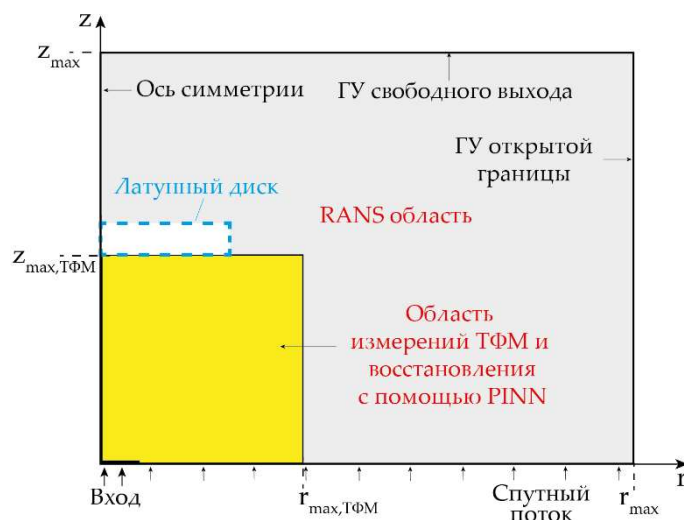


Рис. 2. Схема областей для измерений ТФМ, реконструкции методом PINN и моделирования RANS

Такой способ задания области связан с постановкой свободных граничных условий вдали от основного течения струи, то есть на верхней и правой границах. В области основного течения струи задается неравномерная сетка размерами 190×200 узлов с минимальным шагом 0.12 мм. Диск считается полностью теплоизолированным, на его поверхности ставятся адиабатические граничные условия для температуры и условия прилипания для скорости. Размеры расчетной области в моделировании $r_{\max} \times z_{\max}$ составляли 0.25×0.3 м².

При сравнении с PINN и экспериментальными данными выбирается область, размеры которой по вертикали совпадают с расстоянием от сопла до диска, в радиальном направлении – с радиусом диска.

Были заданы следующие граничные условия.

- 1) На срезе сопла ($z=0$) измеренный термоанемометром профиль осевой скорости аппроксимировался степенной зависимостью с учетом поправки на температуру

$$V_z(r, z=0) = V_0 \left(1 - \frac{r}{r_{jet}}\right)^{10/13} \cdot \frac{T_{exp, in}(r)}{T_0}, \quad r \leq r_{jet}, \quad (13)$$

с гладким переходом на спутный внешний поток со скоростью $0.01V_0$ при $r > r_{jet}$, где r_{jet} – радиус сопла. Включение спутного потока улучшает сходимость RANS-вычислений. Профиль отклонения температуры аппроксимировался функцией Гаусса

$$T(r, z=0) - T_0 = A \exp(-\beta r^2), \quad (14)$$

где A и β – параметры аппроксимации. Отношение полной вязкости к молекулярной η/η_0 равняется 80 при $r \leq r_{jet}$ с гладким переходом на 3 при $r > r_{jet}$. Данные значения были подобраны, исходя из наилучшего совпадения с экспериментальными профилями скорости. Отношение полной теплопроводности к молекулярной λ/λ_0 определяется из соотношения (8) через турбулентное число Прандтля, которое в моделировании задается либо постоянным: 0.5, 0.9, 1.3, либо с использованием модели Кейса – Кроуфорда и ее модифицированной версии.

- 2) На оси ($r=0$) радиальная скорость равняется нулю: $V_r = 0$. Для осевой скорости, полной вязкости и теплопроводности задаются условия симметрии: $\partial T / \partial r = \partial V_z / \partial r = \partial \eta / \partial r = \partial \lambda / \partial r = 0$.
- 3) На правой границе ($r = r_{max, exp}$) задаются мягкие граничные условия для возмущения давления.
- 4) На поверхности диска ($r \leq r_{plate}, z = z_{max, TФМ}$) задаются условия $V_r = V_z = \partial T / \partial z = 0$. Значения турбулентных вязкости и теплопроводности устанавливаются равными нулю.

3.3. Физически-информированная нейросеть

С помощью физически-информированной нейросети (PINN) было проведено восстановление течения импактной осесимметричной турбулентной струи воздуха из полей температуры и радиальных профилей осевой скорости, измеренных соответственно с помощью ТФМ и термоанемометра. Следует отметить, что PINN позволяет восстановить течение для конкретного эксперимента, обучение проходит с использованием одного поля температуры, полученного в этом эксперименте. Была проведена реконструкция в предположении постоянного турбулентного числа Прандтля без включения дополнительных моделей турбулентности, в таком случае турбулентная теплопроводность и турбулентная вязкость связаны однозначно через соотношение (8), и система (2–6) оказывается замкнутой. В другом варианте восстановления предположение о постоянстве турбулентного числа Прандтля опускалось и количество неизвестных ($V_r, V_z, p, T, \lambda, \eta$) оказывалось больше, чем уравнений. Поэтому дополнительно, помимо температурных данных, также использовались результаты измерений скорости в некоторых точках. Для сравнения было также проведено восстановление с учетом $k - \varepsilon$ -модели турбулентности.

При обычном применении нейронных сетей производится предварительное обучение сети на большом количестве решенных задач (размеченных данных). Затем обученная сеть используется для быстрого решения похожих задач. В экспериментальной гидродинамике создать массив размеченных данных на основе экспериментальных измерений практически невозможно – для этого требуется измерить поля всех гидродинамических величин, включая

давление и турбулентную вязкость. Можно обучить сеть на основе данных моделирования, но при этом встает вопрос о соответствии распределений величин в моделировании и реальном эксперименте. Для турбулентных течений существенные отличия между моделированием и экспериментом могут возникать из-за ограниченной точности используемой в моделировании полуэмпирической модели турбулентности. Ассимиляция данных с помощью физически-информированной нейросети (PINN) не требует предварительного обучения на размеченных данных. Вместо этого на основе ограниченных данных, полученных в одном эксперименте (например, поля скорости и температуры), производится подбор полей всех величин, которые обеспечивали бы, с одной стороны, минимальное отклонение от результатов измерений, с другой стороны – минимальные невязки уравнений гидродинамики и граничных условий. Фактически PINN решает задачу аппроксимации с очень большим числом неизвестных параметров. Роль ограничений играют имеющиеся экспериментальные данные, уравнения, описывающие течение, и известные граничные условия. При этом используется тот же аппарат, что и при стандартном применении нейронных сетей. Сеть состоит из нескольких слоев нейронов (рис. 3), которые описываются линейными функциями, и нелинейных функций активации между слоями. То есть используется многослойная полносвязная нейросеть.

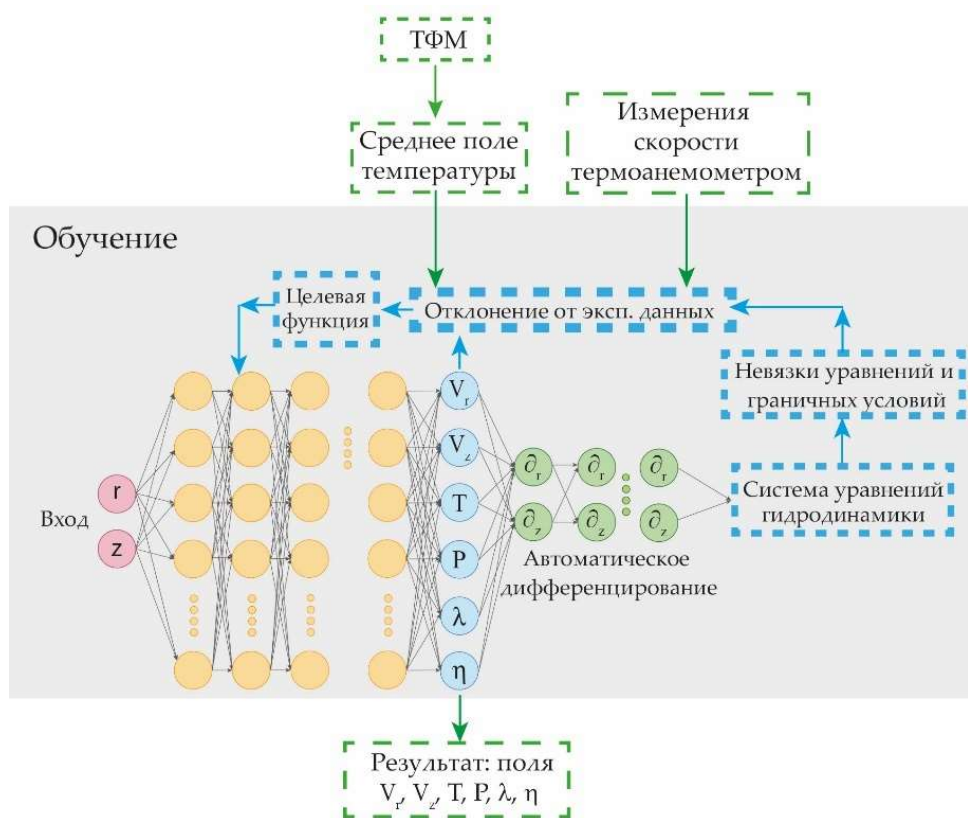


Рис. 3. Архитектура PINN и процесс обучения без включения модели турбулентности

В ходе обучения производится поиск минимума целевой функции $\mathcal{L}_{PINN}$, состоящей из нескольких слагаемых

$$\mathcal{L}_{PINN} = \mathcal{L}_{data} + \mathcal{L}_{PDE} + \mathcal{L}_{BC} \quad (15)$$

Слагаемое $\mathcal{L}_{data}$ связано с отклонением предсказанных нейросетью данных от экспериментальных. В данной работе это значения температуры во всей области измерения и значения осевой скорости в определенных точках при $z = 12$ см. Слагаемое $\mathcal{L}_{PDE}$ описывает невязки уравнений гидродинамики, а $\mathcal{L}_{BC}$ связано с отклонением от граничных условий.

Автоматическое дифференцирование [48], которое в стандартных нейросетях применяется для определения производных целевой функции по весам модели в ходе оптимизации, здесь также позволяет найти пространственные производные гидродинамических величин, входящие в уравнения. Одно из преимуществ использования такого подхода состоит в том, что автоматическое дифференцирование позволяет избежать проблем, возникающих при взятии численных производных от шумных данных, как было показано в работе [49].

В настоящее время существует несколько разных библиотек для создания и обучения нейросетей, а также для использования автоматического дифференцирования. В данной работе использовался язык программирования Python и библиотека PyTorch.

Для подбора оптимальных параметров нейросети были проведены эксперименты на синтетических данных, рассчитанных из RANS-моделирования с включенной $k - \varepsilon$ моделью турбулентности, аналогично [50]. Под параметрами подразумеваются: архитектура нейросети (количество скрытых слоев, количество нейронов в каждом скрытом слое), веса разных частей целевой функции, шаг оптимизатора. Затем с подобранными параметрами нейросеть обучалась на экспериментальных данных температуры и скорости. В результате обучения восстанавливаются поля скорости, давления, полных вязкости и теплопроводности, а также сглаженное поле температуры. При включении модели турбулентности восстанавливаются величины кинетической энергии турбулентных пульсаций k и скорости диссипации турбулентной энергии ε , из которых рассчитывается турбулентная вязкость. Полученные с помощью ассимиляции данных поля сравниваются с рассчитанными из RANS-моделирования.

Квазистационарное состояние струи горячего воздуха описывается уравнениями (2–6). Турбулентная вязкость и турбулентная теплопроводность связаны соотношением (8). Чаще всего турбулентное число Прандтля Pr_t предполагается постоянным и равным 0.9. Стоит отметить, это предположение не совсем верно, как следует из расчетов LES [11] и из экспериментальных данных [10], в которых было показано, что турбулентное число Прандтля различно в разных точках струи. Поэтому в данной работе восстановление течения проведено как в предположении постоянного Pr_t , так и для случая, когда турбулентная вязкость и теплопроводность восстанавливаются независимо, а турбулентное число Прандтля можно получить, исходя из соотношения (8). Также было проведено восстановление на синтетических и экспериментальных данных с учетом уравнений (9–12) $k - \varepsilon$ модели турбулентности, чтобы показать особенности полей турбулентных величин, связанные с применением конкретной модели.

Все величины в уравнениях (2–6), (9), (10) нормируются так, чтобы выходы нейросети по абсолютному значению не превосходили единицы. Масштабирование параметров увеличивает скорость обучения и улучшает качество предсказанных данных. Пространственные координаты r и z , компоненты скорости, давление и отклонение температуры приводятся к безразмерным величинам путем деления на l , V_0 , $\rho_0 V_0^2$ и $T_{\max}$, соответственно. Величины кинетической энергии турбулентных пульсаций и скорости диссипации турбулентной энергии делятся на V_0^2 и V_0^2/l , соответственно. Параметр l соответствовал максимальному размеру области, задаваемой для обучения PINN. Остальные нормировочные параметры подбирались исходя из максимальных величин, полученных в эксперименте.

Выходной слой нейросети состоит из 6 компонент: $(a, V_z, T, p, \lambda, \eta)$ – при восстановлении без учета модели турбулентности и из $(a, V_z, T, p, k, \varepsilon)$ при ее учете. Здесь $a = V_r/r$. Такая замена позволяет избежать роста величины невязок уравнений вблизи оси из-за слагаемых, пропорциональных $1/r$. Чтобы привести выходы (a, V_z, p) нейросети к диапазону $[-1, 1]$, а вход (r, z) и оставшиеся выходы (T, λ, η) или (T, k, ε) к диапазону $[0, 1]$, параметр a , координаты r и z , p , λ , η , k , ε дополнительно нормируются на безразмерные максимальные значения $a_{\max}$, z_0 , $p_{\max}$, $\lambda_{\max}$, $\eta_{\max}$, $k_{\max}$, $\varepsilon_{\max}$, соответственно, полученные из численного моделирования.

Функция потерь (15) задается в точках расчетной области, исключая ее границы. Она совпадает с областью измерений ТФМ. Для постановки корректных граничных условий в

моделировании использовалась более широкая расчетная область. Границы расчетных областей в моделировании, ТФМ и для восстановления с PINN показаны на рис. 2.

Слагаемое $\mathcal{L}_{PDE}$ функции потерь (15) представляет сумму взвешенных невязок уравнений (2–6). При учете модели турбулентности слагаемое $\mathcal{L}_{PDE}$ также включает невязки уравнений (9, 10). Для каждого уравнения рассчитывается сумма среднеквадратичных отклонений (MSE) во всех узлах расчетной сетки, состоящей из $100 \times 50 = 5000$ узлов. С целью разрешения горизонтального погранслоя у поверхности пластины была выбрана неравномерная прямоугольная сетка, сгущающаяся ближе к поверхности пластины с минимальным шагом 0.4 мм и в радиальном направлении ближе к оси с минимальным шагом 0.9 мм.

Если предполагается, что турбулентное число Прандтля не фиксировано, то условие (8) включается в целевую функцию со следующим коэффициентом:

$$w_{Pr_i} = \begin{cases} 1000 \cdot (1 - n_{iter}/600), & n_{iter} \leq 600, \\ 0, & n_{iter} > 600, \end{cases} \quad (16)$$

где n_{iter} обозначает номер итерации во время обучения. Такой вид коэффициента позволяет постепенно исключать условие (8) из целевой функции. Данный подход аналогичен процессу оптимизации для переменного Pr_i с начальным приближением, полученным при постоянном турбулентном числе Прандтля, что повышает устойчивость обучения нейронной сети на начальных итерациях.

Слагаемое $\mathcal{L}_{data}$ состоит из средней суммы квадратов отклонений (MSE) между предсказанными значениями температуры T и экспериментальными данными T_{exp} , полученными ТФМ, и MSE между предсказанными значениями осевой скорости V_z и значениями, измеренными термоанемометром $V_{z,exp}$, с соответствующими весовыми коэффициентами $w_{d,T}$ и w_{d,V_z}

$$\mathcal{L}_{data} = \frac{w_{d,T}}{N} \sum_{i=1}^N [T(r_i, z_i) - T_{exp}(r_i, z_i)]^2 + \frac{w_{d,V_z}}{M} \sum_{j=1}^M [V_z(r_j, z_j) - V_{z,exp}(r_j, z_j)]^2 \quad (17)$$

Отклонения экспериментальных данных по температуре рассчитываются на равномерной сетке, состоящей из 10000 узлов, отклонения для радиальных профилей скорости задаются в тех же точках, в которых скорость измеряется термоанемометром (около 20 точек).

Слагаемое $\mathcal{L}_{BC}$ представляет взвешенную сумму среднеквадратичных отклонений от граничных условий на входе, $\mathcal{L}_{in}$; на правой свободной границе, $\mathcal{L}_{free}$; на оси, $\mathcal{L}_{axis}$ и на поверхности диска, $\mathcal{L}_{plate}$.

$$\mathcal{L}_{BC} = w_{in}\mathcal{L}_{in} + w_{axis}\mathcal{L}_{axis} + w_{free}\mathcal{L}_{free} + w_{plate}\mathcal{L}_{plate} \quad (18)$$

Общее количество точек, в которых рассчитываются отклонения от граничных условий, равняется 500. Граничные условия в PINN совпадают с заданными в RANS-моделировании, за исключением условия на правой границе: давление задается равным нулю. На входе для параметра a задается условие $a(r, z=0)=0$, что соответствует нулевой радиальной скорости. На поверхности пластины условие прилипания соответствует $a(r, z=z_{max, TFM})=0$. На оси ($r=0$) условие для параметра a выводится из уравнения непрерывности при $r=0$, которое в итоге имеет вид: $2\rho a + \partial(\rho V_z)/\partial z = 0$. Для осевой скорости, полной вязкости и теплопроводности задаются условия симметрии: $\partial V_z/\partial r = \partial \eta/\partial r = \partial \lambda/\partial r = 0$.

Выбор весовых коэффициентов связан с количеством слагаемых, которые необходимо минимизировать, и зависит от уровня шума в экспериментальных данных. Слагаемые с самыми большими коэффициентами будут минимизироваться нейросетью в первую очередь, поэтому имеет смысл перед слагаемым $\mathcal{L}_{data}$ указывать наибольший коэффициент. В таком случае в начале обучения будут правильно восстанавливаться те величины, которые входят

в расчет отклонений от экспериментальных данных, а затем будут минимизироваться остальные слагаемые. Однако при слишком большом коэффициенте нейросеть может выучить особенности измеренного поля температуры, которые в силу погрешностей эксперимента являются некорректными. Если весовой коэффициент перед членом с экспериментальными данными меньше, чем коэффициент перед слагаемым, связанным с невязками уравнений, то нейросеть может предсказывать нулевые или постоянные значения величин, что соответствует тривиальному решению уравнений.

В данной работе используется функция потерь с постоянными коэффициентами. В связи с наличием случайного шума в поле температуры и систематической погрешности, связанной с асимметрией струи, были подобраны такие коэффициенты, чтобы нейросеть не полностью копировала экспериментальные данные, а приближалась бы к ним при одновременной минимизации невязок уравнений. Значения коэффициентов для различных вариантов восстановления представлены в табл. 1.

Таблица 1

Весовые коэффициенты для целевой функции

	$w_{d,T}$	w_{d,V_z}	w_{in}	w_{plate}	w_{axis}	w_{Pr_i}	$w_{Pr_i, free}$
$Pr_i = 0.9$	100	100	1	1	1	100	100
$Pr_i \neq const$	100	100	1	1	1	см. (16)	100

Для подбора оптимальной архитектуры нейросети (количество скрытых слоев, количество нейронов в каждом слое, функции активации, оптимизатор и его скорость обучения, критерий остановки обучения), тесты по восстановлению проводились на синтетических данных, полученных из моделирования для свободной струи. За метрику качества восстановления выбрано нормализованное среднеквадратичное отклонение результатов, предсказанных нейросетью, от рассчитанных из моделирования с применением $k - \varepsilon$ -модели турбулентности. В результате тестов на синтетических данных была выбрана архитектура нейросети с 7 скрытыми слоями и 180 нейронами на каждом слое (то есть по 30 нейронов на каждый выход). Дальнейшее увеличение числа слоев и нейронов не дает значительного улучшения результатов восстановления и увеличивает время обучения. Оптимизация проводится с использованием модифицированного алгоритма Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно с ограниченным использованием памяти (L-BFGS) [51], где начальная величина шага была установлена равной 0.1. Процесс обучения прекращается, когда на интервале, равном 100 итерациям, скользящее среднее функции потерь изменяется в пределах 0.5%, аналогично критерию остановки в работе [52]. Под итерацией здесь подразумевается вычисление функции потерь во всей расчетной области и обратный проход для расчета градиента и обновления параметров модели. В начале обучения веса и сдвиги нейросети инициализируются случайными величинами с нормальным распределением. Расчеты проводятся на видеокартах суперкомпьютера «МГУ-270» МГУ имени М.В. Ломоносова. Обучение нейросети на экспериментальных данных занимает порядка 6 ч.

4. Результаты и сравнительный анализ

4.1. Расчеты с применением $k-\varepsilon$ модели и различными значениями ТЧП

При моделировании неизотермических турбулентных течений в рамках RANS-моделей необходимо задавать ТЧП определенным образом. В данной работе было проведено сравнение результатов моделирования, полученных при различных постоянных значениях турбулентного числа Прандтля: 0.5, 0.9 и 1.3. Следует отметить, что для аналогичных расчетов чаще всего выбирается постоянное ТЧП, равное 0.9. Также использовалась модель

Кейса – Кроуфорда (КС) и модернизированная модель Кейса – Кроуфорда (КС_м). Модель Кейса – Кроуфорда хорошо описывает большинство турбулентных течений в пограничном слое вблизи стенок в жидкостях, за исключением течений жидких металлов. Для описания течения в жидких металлах модель Кейса – Кроуфорда была модифицирована [34]. При использовании модифицированной модели необходимо задавать дополнительный параметр – число Рейнольдса на бесконечности. В данной работе оно рассчитывалось, исходя из величины спутного потока и расстояния от сопла до пластины, и равнялось 1080.

Для оценки отклонений полученных полей была выбрана относительная L_2 -норма, определенная следующим образом:

$$\epsilon = \frac{\|F - F_0\|_2}{\|F_0\|_2}, \quad (19)$$

где отклонение рассчитывается для поля F относительно F_0 . Все поля интерполированы на общую равномерную сетку для корректного сравнения. Для расчета отклонения относительно экспериментальных данных используется область с заметным возмущением температуры, то есть удовлетворяющая условию $(T - T_0) \geq 1$ К.

Экспериментальные поля температуры, полученные ТФМ, и соответствующие поля из RANS-моделирования, проведенного с заданием различных значений ТЧП, представлены на рис. 4.

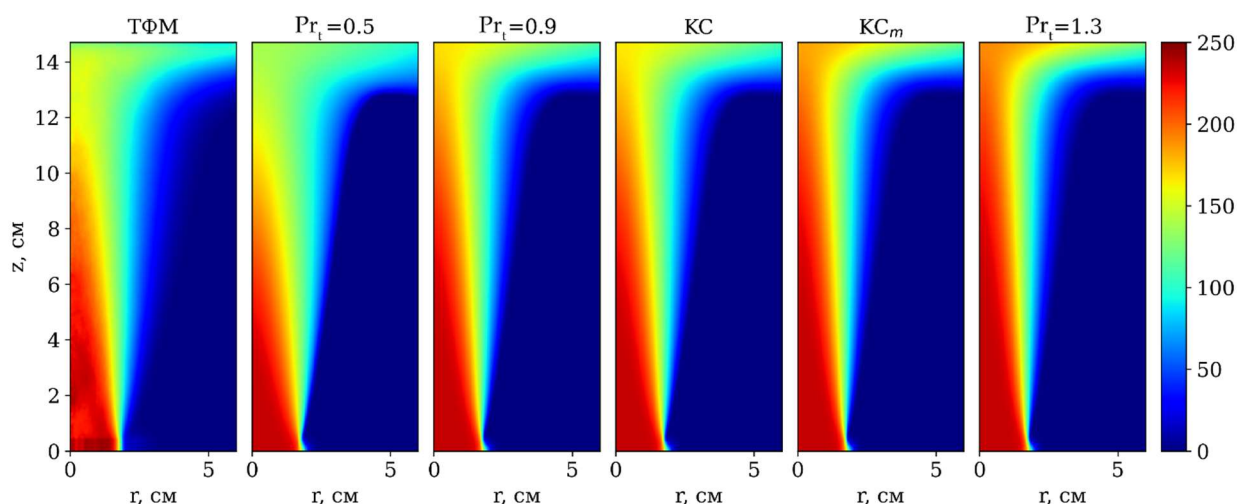


Рис. 4. Поля температуры, $T - T_0$, (К), полученные из ТФМ и RANS-моделирования в предположении постоянного Pr_t , равного 0.5, 0.9 и 1.3, с использованием модели Кейса – Кроуфорда (КС) и модифицированной модели Кейса – Кроуфорда (КС_м)

Наблюдается хорошее соответствие между рассчитанными в моделировании и полученными ТФМ распределениями температуры в основной области течения. Совпадают углы расширения струй, однако расхождения возникают вблизи пластины. Отличается скорость изменения температуры вдоль струи: для меньших ТЧП температура уменьшается быстрее. Поле температуры, полученное при расчете с $Pr_t = 0.5$, показывает наименьшее отклонение от экспериментальных данных в области основного течения струи. При приближении к пластине в области горизонтального пограничного слоя наименьшее отклонение показывают расчеты с $Pr_t = 0.9$ и с моделью Кейса – Кроуфорда. Это хорошо видно из сравнения вертикальных и радиальных профилей распределения относительного среднеквадратичного отклонения $\epsilon_T(r, z) = \sqrt{((T - T_{ТФМ})/T_{ТФМ})^2}$, показанных на рис. 5. Суммарное отклонение, рассчитанное по формуле (19), для расчета с $Pr_t = 0.5$ составляет 11 %, с $Pr_t = 0.9 \div 13$ %, с

$Pr_t = 1.3 \div 19\%$. С учетом оригинальной модели Кейса – Кроуфорда получается отклонение 13 %, с модифицированной – 17 %. Наименьшее отклонение от экспериментальных показывает расчет с постоянным турбулентным числом Прандтля, равным 0.5. Отклонения для расчетов с $Pr_t = 0.9$ и моделью Кейса – Кроуфорда также показывают ошибку до 15 % и совпадают между собой. Это связано с тем, что в данной модели ТЧП в области основного течения варьируется от 0.85 до 0.9. В модифицированной модели Кейса – Кроуфорда ТЧП в области струи также практически постоянно и составляет 1.15, что близко к $Pr_t = 1.3$.

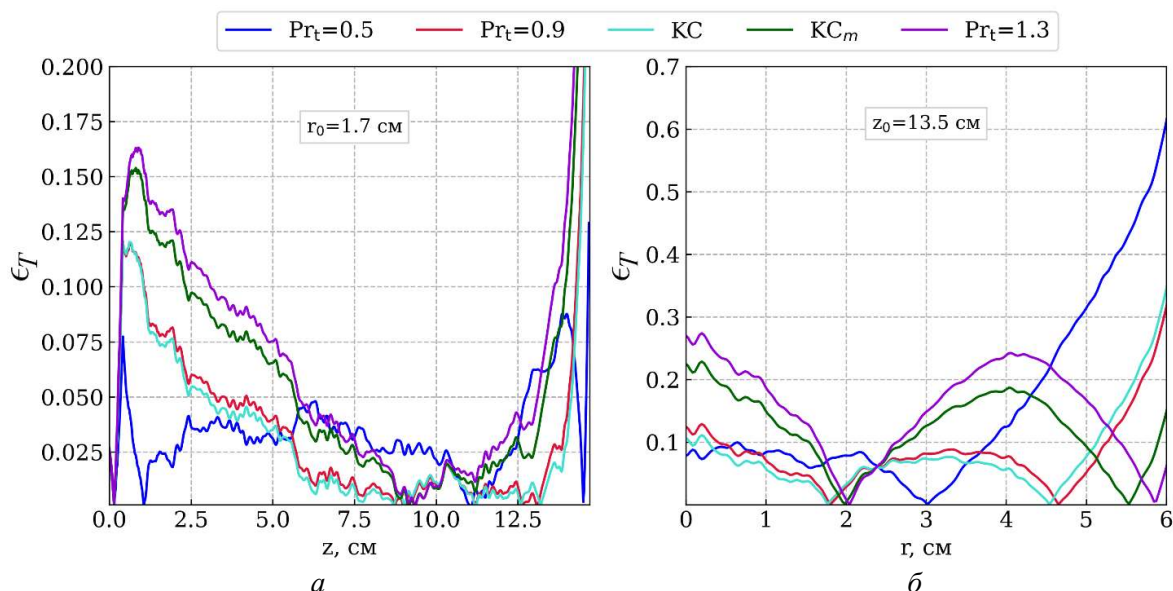


Рис. 5. Относительные среднеквадратичные отклонения полей температуры ϵ_T , полученных из RANS-моделирования в предположении постоянного Pr_t , равного 0.5, 0.8 и 1.3, с использованием модели Кейса – Кроуфорда (KC) и модернизированной модели Кейса – Кроуфорда (KC_m), от измеренных ТФМ – а) вертикальные профили при $r_0 = 1.7$ см, б) радиальные профили при $z_0 = 13.5$ см

Для полей температуры, скорости, давления и турбулентной вязкости были рассчитаны относительные отклонения от результатов моделирования с постоянным $Pr_t = 0.9$, которые представлены в табл. 2. Наибольшие расхождения показывают поля температуры. Погрешности остальных величин находятся в пределах 5 %.

Таблица 2

Относительное среднеквадратичное отклонение $\epsilon, \%$ полей температуры, скорости, давления и турбулентной вязкости, рассчитанных из RANS-моделирования с различными значениями ТЧП, от результатов моделирования с $Pr_t = 0.9$

$\epsilon, \%$	$Pr_t = 0.5$	$Pr_t = 1.3$	KC	KC_m
$\ T - T_{0.9}\ _2 / \ T_{0.9}\ _2$	12	7	1	5
$\ V_z - V_{z,0.9}\ _2 / \ V_{z,0.9}\ _2$	0.7	0.4	0.05	0.3
$\ V_r - V_{r,0.9}\ _2 / \ V_{r,0.9}\ _2$	1.6	1.0	0.1	0.7
$\ p - p_{0.9}\ _2 / \ p_{0.9}\ _2$	3.1	1.9	0.3	1.3
$\ \eta - \eta_{0.9}\ _2 / \ \eta_{0.9}\ _2$	4.5	3.1	0.4	2.1

Погрешности экспериментального поля температуры могут быть связаны с асимметрией струи, так как предварительные эксперименты без вращения фена и регистрацией

снимков только при одном положении фена показали еще большие расхождения с численным моделированием. Усреднение полей смещений, рассчитанных по серии изображений, снятых с разным угловым положением фена, способствовало уменьшению ошибок, связанных с асимметричностью струи.

Таким образом, сравнение результатов RANS-моделирования с применением $k-\varepsilon$ -модели турбулентности с экспериментальными данными показало, что значения температуры, полученные с различным значением ТЧП, могут отличаться на величину до 50°C . В области основного течения струи поле температуры лучше всего описывается результатами, проведенными в предположении постоянного ТЧП, равного 0.5. Вблизи пластины поле температуры меньше всего отличается от расчетов с $Pr_t = 0.9$ и с моделью Кейса – Кроуфорда. Данные результаты показывают, что поле турбулентного числа Прандтля не является постоянным во всей области течения и для более точных расчетов необходимо варьировать его значение.

4.2. Восстановление с помощью PINN в предположении постоянного числа Pr_t

Восстановление течения при помощи PINN может проводиться с использованием $k-\varepsilon$ -модели турбулентности, либо без нее. В первом случае кинетическая энергия турбулентных пульсаций k и скорость диссипации турбулентной энергии ε будут являться выходами нейросети и восстанавливаться независимо, а турбулентная вязкость будет рассчитываться через соотношение (12). Такая постановка задачи ближе к моделированию, но по сравнению с ним позволяет включить определенное поле температуры в целевую функцию и обучить нейросеть восстанавливать поля скорости, давления и турбулентных характеристик таким образом, чтобы с заданным полем температуры минимизировать невязки уравнений. Во втором случае уравнения модели турбулентности опускаются и выходами нейросети становятся турбулентная вязкость и теплопроводность. Такая постановка задачи отличается от моделирования, так как при восстановлении не учитываются особенности конкретной модели турбулентности.

На рис. 6 приведены результаты полей скорости, возмущения давления, отношения полной вязкости к молекулярной (h/h_0), отношения полной теплопроводности к молекулярной (l/l_0), полученные из RANS-моделирования с $k-\varepsilon$ -моделью турбулентности.

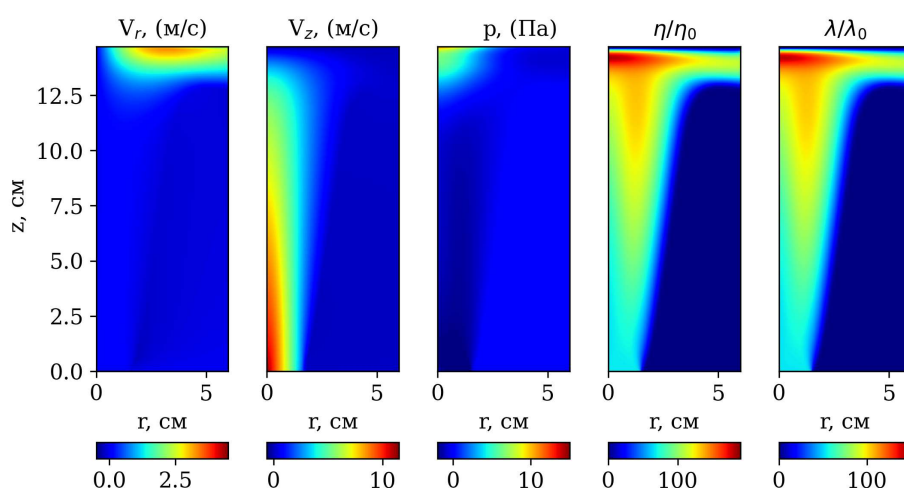


Рис. 6. Поля радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (h/h_0), отношения полной теплопроводности к молекулярной (l/l_0), полученные из RANS-моделирования с $k-\varepsilon$ -моделью турбулентности

На рис. 7 приведены результаты восстановления с использованием синтетических данных (поля температуры и профиля скорости при $z = 12$ см) с включением модели турбулентности (а) и без ее учета (б). В данных расчетах ТЧП принималось постоянным и равным 0.9.

Восстановление с применением $k-\varepsilon$ -модели турбулентности показывает меньшее отклонение полученных полей от рассчитанных в моделировании. Однако поле турбулентной вязкости вблизи пластины отличается от полученного в моделировании, что может быть связано с включением в Comsol дополнительных ограничительных функций вблизи твердой границы.

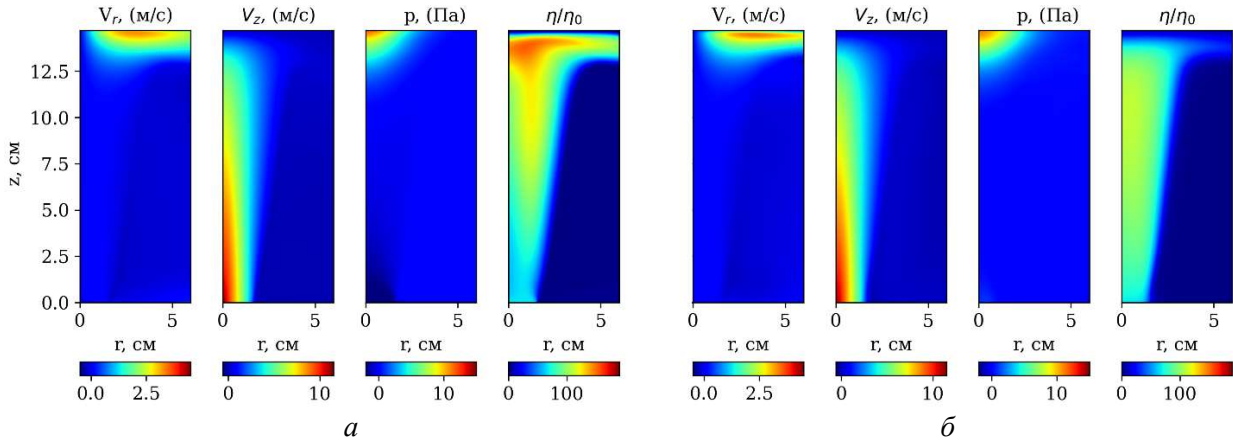


Рис. 7. Поля радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (η/η_0), восстановленные PINN с синтетическим полем температуры a) с включенной $k-\varepsilon$ -моделью турбулентности, $б$) без учета модели турбулентности

Для всех полей, кроме поля температуры, отклонения восстановленных полей $PINN_{sim,k-\varepsilon}$ с включенной $k-\varepsilon$ -моделью меньше, чем для $PINN_{sim}$ без ее учета, что видно из табл. 3, в которой показаны относительные среднеквадратичные отклонения восстановленных полей от рассчитанных в моделировании.

Таблица 3

Относительное среднеквадратичное отклонение $\epsilon, \%$ полей температуры, скорости, давления и турбулентной вязкости, восстановленных PINN, от рассчитанных с помощью RANS-моделирования с $Pr_t=0.9$

$\epsilon, \%$	$PINN_{sim}$	$PINN_{sim,k-\varepsilon}$
$\ T - T_{k-\varepsilon}\ _2 / \ T_{k-\varepsilon}\ _2$	0.2	1.6
$\ V_z - V_{z,k-\varepsilon}\ _2 / \ V_{z,k-\varepsilon}\ _2$	1.7	1.1
$\ V_r - V_{r,k-\varepsilon}\ _2 / \ V_{r,k-\varepsilon}\ _2$	13.2	2.8
$\ P - P_{k-\varepsilon}\ _2 / \ P_{k-\varepsilon}\ _2$	80	50
$\ \eta - \eta_{k-\varepsilon}\ _2 / \ \eta_{k-\varepsilon}\ _2$	38	8

На рис. 8 показаны профили давления и отношения полной вязкости к молекулярной вдоль оси струи, полученные из численного моделирования и восстановленные с помощью PINN, как с включенной $k-\varepsilon$ -моделью, так и без нее. Рост давления вблизи пластины описывается правильно для обоих способов восстановления. Область вблизи сопла характеризуется наибольшим отклонением, что связано с тем, что в области свободной струи величина изменений давления мала. Из полей и одномерных профилей турбулентной вязкости видно, что без включения модели турбулентности горизонтальный пограничный слой восстанавливается с большим отличием от результатов моделирования. При включении уравнений $k-\varepsilon$

-модели вязкость восстанавливается с меньшей ошибкой. Поэтому можно сделать вывод, что $k-\varepsilon$ -модель турбулентность имеет свои особенности в формировании турбулентного пограничного слоя вблизи пластины, что необходимо учитывать при сравнении с другими моделями турбулентности и методиками восстановления турбулентных величин.

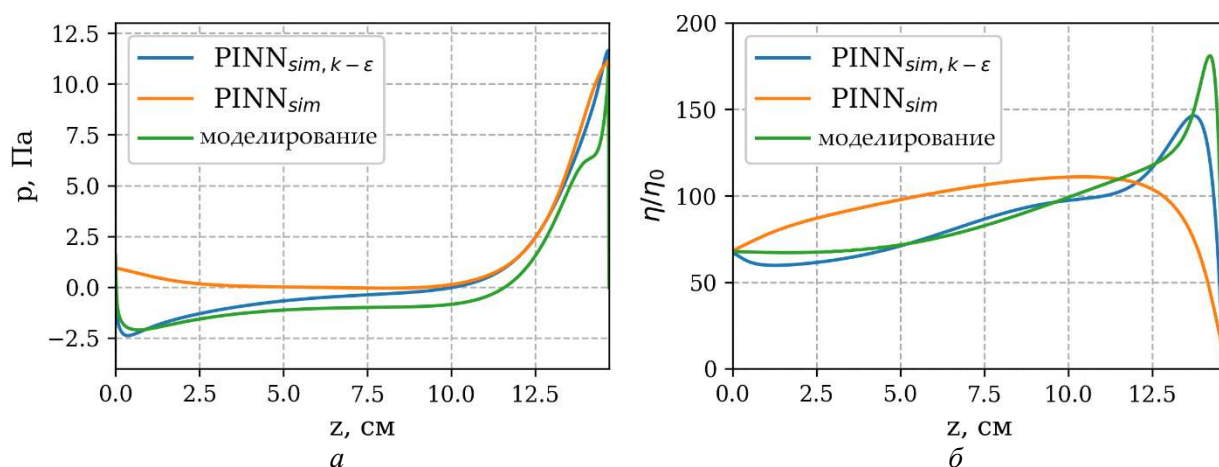


Рис. 8. Вертикальные профили а) возмущения давления, б) отношения полной вязкости к молекулярной на оси, полученные из численного моделирования и восстановленные с помощью PINN

Также было проведено восстановление на экспериментальных данных температуры, полученных ТФМ, и скорости, измеренной термоанемометром, с учетом модели турбулентности и без нее. Поля, полученные при восстановлении, представлены на рис. 9.

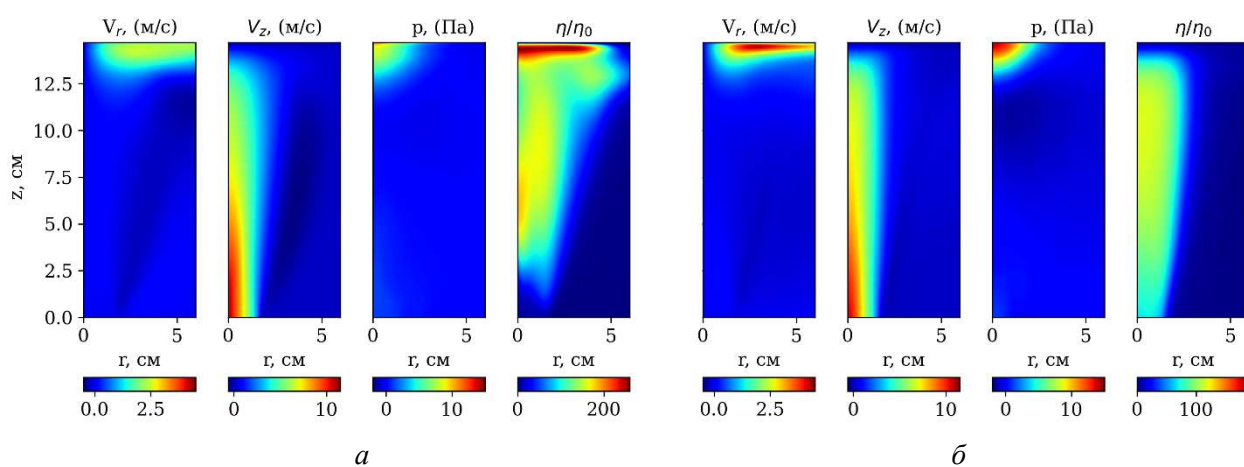


Рис. 9. Поля радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (η/η_0), восстановленные PINN с экспериментальным полем температуры а) с включенной $k-\varepsilon$ -моделью турбулентности, б) без учета модели турбулентности

Так же, как и при восстановлении на синтетических данных, существенные отличия наблюдаются вблизи пластины, что особенно заметно для радиальной компоненты скорости, давления и турбулентной вязкости. С моделью турбулентности максимальная величина турбулентной вязкости отличается в два раза, формируется горизонтальный пограничный слой, который отсутствует в восстановленных полях без $k-\varepsilon$ -модели. Дополнительные измерения двумерного поля скорости методом PIV помогли бы установить, какой способ восстановления дает поле скорости с меньшими отличиями от экспериментальных данных. Но, исходя из результатов восстановления на синтетических данных, можно сделать вывод, что $k-\varepsilon$ -модель имеет свои особенности, которые не обязательно верно описывают поля турбулентных характеристик.

4.3. Восстановление распределения турбулентного числа Прандтля с помощью PINN

Восстановление с применением PINN в предположении переменного турбулентного числа Прандтля, то есть, когда в целевую функцию условие (8) включается с весовым коэффициентом (16), позволяет получить поле турбулентного числа Прандтля из соотношения найденных значений турбулентной теплопроводности и вязкости.

На рис. 10 и 11 показаны результаты восстановления для экспериментов, выполненных для разной температуры на выходе сопла: 170°C и 260°C, соответственно.

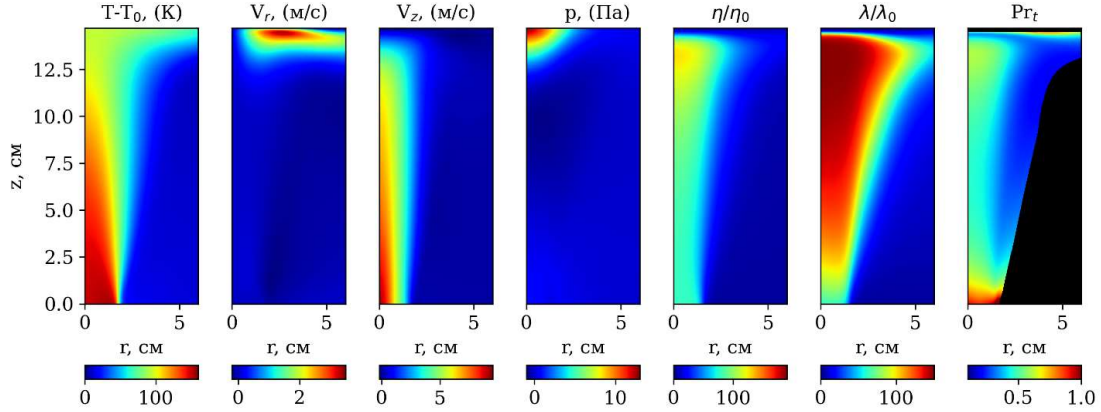


Рис. 10. Поля температуры ($T - T_0$), радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (η/η_0), отношения полной теплопроводности к молекулярной (λ/λ_0), ТЧП (Pr_t), восстановленные PINN с экспериментальным полем температуры. Температура на выходе сопла – 170°C

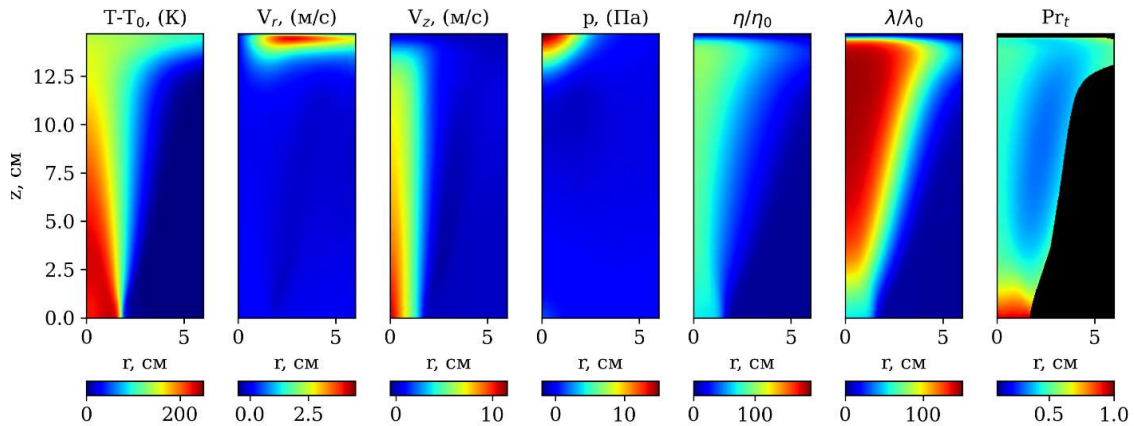


Рис. 11. Поля температуры ($T - T_0$), радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (η/η_0), отношения полной теплопроводности к молекулярной (λ/λ_0), ТЧП (Pr_t), восстановленные PINN с экспериментальным полем температуры. Температура на выходе сопла – 260°C

Области на графиках с полями ТЧП, показанные черным цветом, описываются одним из следующих условий:

- 1) возмущения температуры $T - T_0$ составляют менее 20 К;
- 2) турбулентная вязкость $\eta_t < 15\eta_0$;
- 3) турбулентная теплопроводность $\lambda_t < 15\lambda_0$.

Ниже данных пороговых значений величина ТЧП может определяться некорректно из-за малых значений турбулентных вязкости и теплопроводности.

При обучении PINN минимизирует отклонения от экспериментальных данных, не повторяя полностью результаты эксперимента, а сглаживая данные, что можно увидеть на рис. 12, на котором представлено сравнение осевых и радиальных профилей температуры

при $z = 12$ см, восстановленных в предположении постоянного ТЧП без $k-\varepsilon$ -модели (PINN, $Pr_t = 0.9$), переменного ТЧП (PINN, $Pr_t \neq \text{const}$), постоянного ТЧП с $k-\varepsilon$ -моделью (PINN $_{k-\varepsilon}$, $Pr_t = 0.9$), полученных в численном моделировании и в эксперименте.

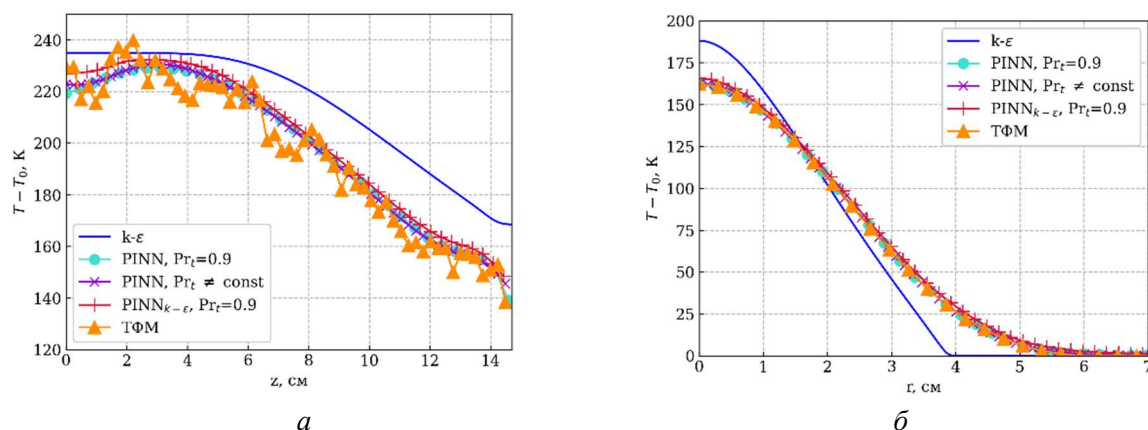


Рис. 12. а) Осевые профили разности температуры на оси; б) радиальные профили разности температуры при $z = 12$ см, восстановленные для постоянного ТЧП без $k-\varepsilon$ модели (PINN, $Pr_t = 0.9$), переменного ТЧП (PINN, $Pr_t \neq \text{const}$), постоянного ТЧП с $k-\varepsilon$ -моделью (PINN $_{k-\varepsilon}$, $Pr_t = 0.9$), полученные в численном моделировании и в эксперименте

На рис. 13 представлено сравнение профилей вертикальной скорости на оси и радиальных профилей при $z = 12$ см. На оси находится максимум вертикальной скорости, и он правильно восстанавливается всеми подходами. Из радиальных профилей видно, что экспериментальным данным лучше всего удовлетворяют результаты восстановления PINN без учета $k-\varepsilon$ -модели. PINN с учетом модели турбулентности восстанавливает поле скорости, близкое к результатам моделирования. Отклонение от экспериментальных данных при восстановлении PINN $_{k-\varepsilon}$ может быть связано с тем, что весовой коэффициент перед экспериментальными данными по скорости был недостаточно большим, чтобы позволить нейросети сильнее минимизировать отклонения от профиля скорости. Целевая функция для PINN $_{k-\varepsilon}$ отличалась на слагаемые, описывающие невязки уравнений (9), (10) модели турбулентности. Включение дополнительных слагаемых могло привести к тому, что нейросеть не так точно копирует данные по скорости.

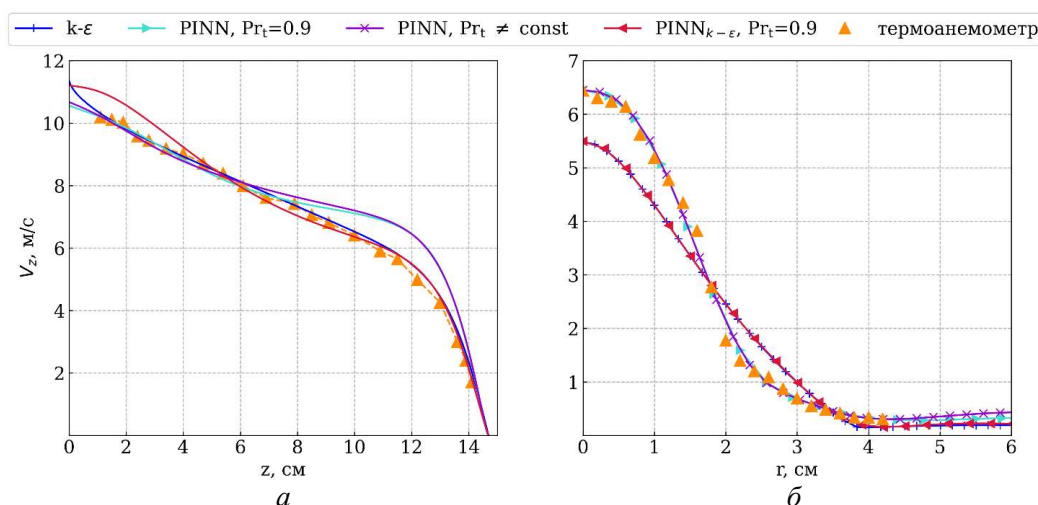


Рис. 13. а) Осевые профили вертикальной скорости на оси; б) радиальные профили вертикальной скорости при $z = 12$ см

Из рис. 10 и 11 видно, что для обоих экспериментов величина Pr_t находится в пределах от 0.1 до 1.5, но не является постоянной, равной 0.9, как часто задается при моделировании

течений. В работе [11] LES-вычисления показали, что турбулентное число Прандтля варьируется в пределах от 0.65 до 0.7 в основном течении струи, уменьшаясь ближе к краям. Такая же особенность наблюдается в результатах, полученных при восстановлении с помощью PINN.

Из одновременных экспериментальных измерений температуры и двумерных полей скорости в нагретой свободной турбулентной струе в работе [12] были получены распределения ТЧП. Для $z/d = 24 \cdot Pr_t$ изменяется от 0.1 до 0.5. В проведенных в работе экспериментах ТЧП равняется приблизительно 0.5 и уменьшается по краям до 0.1. Примерно в таком же диапазоне (от 0.1 до 0.4) изменяется турбулентное число Прандтля, полученное в работе [53] для эксперимента с системой кондиционирования на основе PIV измерений и точечных измерений температуры термпарой. Также в этой работе было показано, что распределение турбулентного числа Прандтля изменяется в зависимости от скорости входного потока, то есть от числа Рейнольдса. Результаты LES-моделирования для импактных струй [54] показали немонотонные изменения турбулентного числа Прандтля ($0.6 \div 1.2$) вблизи области соударения, что также наблюдается в проведенных в работе экспериментах. Уменьшение турбулентного числа Прандтля до 0.1 наблюдается с увеличением радиальной координаты.

Интересно, что восстановление с постоянным турбулентным числом Прандтля (см. рис. 7 (б)) и переменным (см. рис. 11) значительно расходятся в предсказанных распределениях турбулентной вязкости и теплопроводности. При восстановлении с переменным ТЧП формируется горизонтальный погранслой, получаются большие значения для величины турбулентной теплопроводности и вязкости по сравнению с моделированием. Такой особенности не наблюдается при восстановлении на синтетических данных из моделирования и Pr_t восстанавливается близким к 0.9 во всей области течения (рис. 14). Поэтому можно сделать вывод, что такая особенность связана с восстановлением из экспериментальных данных.

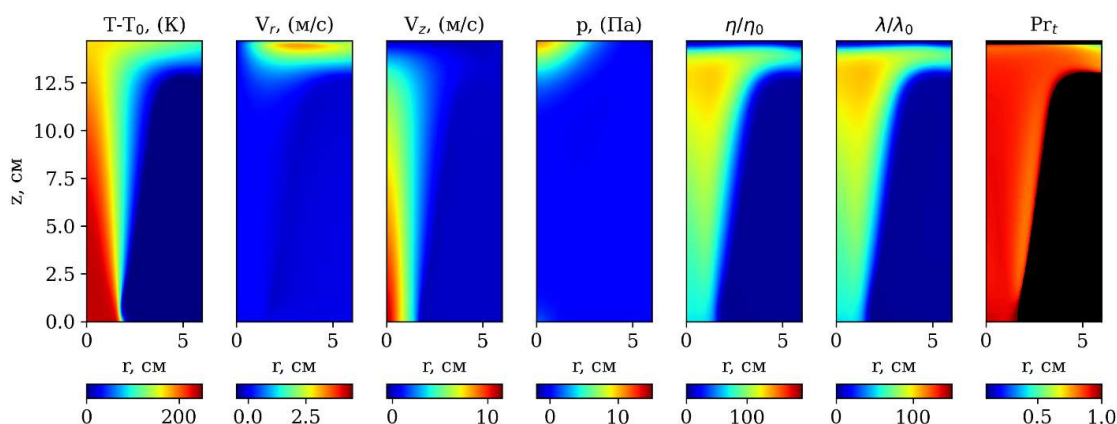


Рис. 14. Поля температуры ($T - T_0$), радиальной скорости (V_r), осевой скорости (V_z), возмущения давления (p), отношения полной вязкости к молекулярной (η/η_0), отношения полной теплопроводности к молекулярной (λ/λ_0), ТЧП (Pr_t), восстановленные PINN с синтетическими данными без учета предположения о постоянном ТЧП

Среднеквадратичные отклонения для восстановления с помощью PINN с синтетическим полем температуры с включением модели турбулентности и без нее в предположении постоянного ТЧП, а также без учета модели турбулентности с переменным ТЧП, представлены в табл. 4.

Из табл. 3 и 4 видно, что самые большие ошибки получаются при восстановлении без $k - \varepsilon$ -модели, при этом в данном случае не образуется горизонтальный погранслой, что видно из полей турбулентной вязкости (см. рис. 7). Можно также сделать вывод, что, когда турбулентная теплопроводность и турбулентная вязкость во время всего обучения связаны соотношением (8), они восстанавливаются с большей ошибкой.

Таблица 4

Относительное среднеквадратичное отклонение $\epsilon, \%$ результатов восстановления PINN с переменным ТЧП от RANS-моделирования с $Pr_t = 0.9$

$\epsilon, \%$	$\frac{\ T - T_{k-\epsilon}\ _2}{\ T_{k-\epsilon}\ _2}$	$\frac{\ V_z - V_{z,k-\epsilon}\ _2}{\ V_{z,k-\epsilon}\ _2}$	$\frac{\ V_r - V_{r,k-\epsilon}\ _2}{\ V_{r,k-\epsilon}\ _2}$	$\frac{\ p - p_{k-\epsilon}\ _2}{\ p_{k-\epsilon}\ _2}$	$\frac{\ \eta - \eta_{k-\epsilon}\ _2}{\ \eta_{k-\epsilon}\ _2}$
$PINN_{sim, Pr_t \neq const}$	1.5	2.1	10.8	74	21

PINN без учета модели турбулентности в предположении переменного ТЧП позволяет получить распределение турбулентного числа Прандтля напрямую из экспериментального поля температуры. Дополнительные данные по скорости могут в дальнейшем улучшить качество восстановления полей турбулентной вязкости и других величин. Тем не менее, такой подход позволяет восстановить турбулентное число Прандтля по температурным данным и измеренным с помощью термоанемометра профилям скорости. Аналогичное восстановление может быть проведено для распределения турбулентного числа Шмидта в двухкомпонентной среде по экспериментально измеренному полю концентрации и профилю скорости.

5. Заключение

Моделирование турбулентной неизотермической импактной струи воздуха, выполненное с различными значениями турбулентного числа Прандтля, показало, что приближение постоянного турбулентного числа Прандтля оказывается справедливым внутри свободной струи вдали от пластины. При приближении к твердой стенке в области пограничного слоя расчеты с той же величиной ТЧП показывают заметное отклонение от экспериментальных данных. Для наилучшего совпадения необходимо варьировать значение ТЧП в области течения.

В работе предложен способ ассимиляции температурных данных с помощью физически-информированной нейросети (PINN), позволяющий восстанавливать поля турбулентных величин – вязкости и теплопроводности, а также поля скорости и давления. Было проведено восстановление для импактной осесимметричной струи горячего воздуха с применением PINN с учетом $k - \epsilon$ -модели турбулентности в предположении постоянного Pr_t , а также без $k - \epsilon$ -модели с постоянным и переменным Pr_t . Все подходы позволяют восстановить поля скорости, давления и турбулентных характеристик. Наибольшие различия наблюдаются при восстановлении распределения турбулентной вязкости.

Показано, что с помощью PINN возможно восстановить распределение турбулентного числа Прандтля на основе экспериментальных данных температуры, полученных теневым фоновым методом, и измерений скорости с помощью термоанемометра. Восстановленные поля турбулентного числа Прандтля соответствуют тенденциям, описанным в литературе.

Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ № 23-19-00591, <https://rscf.ru/project/23-19-00591/>). Работа выполнена с использованием оборудования, приобретенного за счет средств Программы развития Московского университета. Исследование проводилось в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова и с использованием суперкомпьютера «МГУ-270».

Литература

1. Perakis N., Haidn O.J., Rahn D., Eiringhaus D., Zhang S., Daimon Y., Karl S., Horchler T. Qualitative and quantitative comparison of RANS simulation results for a 7 element GOX/GCH₄ rocket combustor. AIAA Paper 2018-4556. DOI: 10.2514/6.2018-4556

2. Daimon Y., Negishi H., Silvestri S., Haidn O. Conjugated combustion and heat transfer simulation for a 7 element GOX/GCH₄ rocket combustor. AIAA Paper 2018-4553. DOI: 10.2514/6.2018-4553
3. Borovik I.N., Strokach E.A., Severina N.S. Influence of the turbulent Prandtl number on numerical simulation reaction flow. AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2181. Pp. 020029. DOI: 10.1063/1.513568
4. Xue Z., Hongxing Y., Jian D., Sijia D., Xiaoyu W., Wenpei F. Study on the turbulent Prandtl number model for liquid metal flow and heat transfer in a narrow rectangular channel // Front. Energy Res. 2024. Vol. 12. Pp. 1366470. DOI: 10.3389/fenrg.2024.1366470
5. Cheng X., Tak N. Investigation on turbulent heat transfer to lead-bismuth eutectic flows in circular tubes for nuclear applications // Nucl. Eng. Des. 2006. Vol. 236, № 4. Pp. 385–393. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2005.09.006
6. Zhou B., Ji Y., Sun J., Sun Y. Modified turbulent Prandtl number model for helium–xenon gas mixture with low Prandtl number // Nucl. Eng. Des. 2020. Vol. 366. Pp. 110738. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110738
7. Li D. Turbulent Prandtl number in the atmospheric boundary layer - where are we now? // Atmos. Res. 2019. Vol. 216. Pp. 86–105. DOI: 10.1016/J.ATMOSRES.2018.09.015
8. Aouissi M., Bounif A., Bensayah K. Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number in heated jets and diffusion flames // Heat Mass Transf. 2008. Vol. 44, № 9. Pp. 1065–1077. DOI: 10.1007/s00231-007-0350-8
9. Darisse A., Lemay J., Benanissa A. Budgets of turbulent kinetic energy, Reynolds stresses, variance of temperature fluctuations and turbulent heat fluxes in a round jet // J. Fluid Mech. 2015. Vol. 774. Pp. 95–142. DOI: 10.1017/jfm.2015.245
10. Lemoine F., Antoine Y., Wolff M., Lebouche M. Simultaneous temperature and 2D velocity measurements in a turbulent heated jet using combined laser-induced fluorescence and LDA // Exp. Fluids. 1999. Vol. 26. Pp. 315–323. DOI: 10.1007/s003480050294
11. DeBonis J.R. Prediction of turbulent temperature fluctuations in hot jets // AIAA J. 2018. Vol. 56, № 8. Pp. 3097–3111. DOI: 10.2514/1.J056596
12. Chang K., Cowen E.A. Turbulent Prandtl number in neutrally buoyant turbulent round jet // J. Eng. Mech. 2002. Vol. 128, № 10. Pp. 1082–1087. DOI: 10.1061/ASCE0733-93992002128:101082
13. Куликова Т.Н., Марков П.В., Солонин В.И. Моделирование теплоотдачи к газовому теплоносителю с пониженным значением числа Прандтля // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. №6. С. 420–437. DOI: 10.7463/0615.0780763
14. Tao Q., Su C., Chen M., Deng Y., Wang Y., Yu M., Sun H., Bargal M.H.S. Numerical investigation on the temperature distribution inside the engine compartment of a fuel cell vehicle with nanofluids as coolant // Int. J. Energy Res. 2021. Vol. 45, № 6. Pp. 9613–9626. DOI: 10.1002/er.6485
15. Лущик В.Г., Макарова М.С. Турбулентное число Прандтля в пограничном слое на пластине: влияние молекулярного числа Прандтля, вдува (отсоса) и продольного градиента давления // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25. № 2. С. 177–190.
16. Суржиков С.Т. Результаты использования алгебраических моделей турбулентности в рамках RANS модели нагрева поверхности острой пластины в сверхзвуковом потоке // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24, вып. 3. DOI: 10.33257/PhChGD.24.3.1056 <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1056/>
17. Lai C.C., Socolofsky S.A. Budgets of turbulent kinetic energy, Reynolds stresses, and dissipation in a turbulent round jet discharged into a stagnant ambient // Environ. Fluid Mech. 2019. Vol. 19, № 2. Pp. 349–377. DOI: 10.1007/s10652-018-9627-3
18. van Gent P., Michaelis D., van Oudheusden B.W., Weiss P., de Kat R., Laskari A., Jeon Y.J., David L., Schanz D., Huhn F., Gesemann S., Novara M., McPhaden C., Neeteson N.J., Rival D.E., Schneiders J.F.G., Schrijer F.F.J. Comparative assessment of pressure field reconstructions from particle image velocimetry measurements and Lagrangian particle tracking // Exp. Fluids. 2017. Vol. 58, № 4. Pp. 33. DOI: 10.1007/s00348-017-2324-z

19. Alcántara-Ávila F., Hoyas S., Pérez-Quile M.J. DNS of thermal channel flow up to $Re_\tau=2000$ for medium to low Prandtl numbers // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2018. Vol. 127. Pp. 349–361. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.149
20. Pirozzoli S. Prandtl number effects on passive scalars in turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2023. Vol. 965. Pp. A7. DOI: 10.1017/jfm.2023.387
21. Boersma B.J., Brethouwer G., Nieuwstadt F.T.M. A numerical investigation on the effect of the inflow conditions on the self-similar region of a round jet // *Phys. Fluids.* 1998. Vol. 10, № 4. Pp. 899–909. DOI: 10.1063/1.869626
22. Nguyen C.T., Oberlack M. Analysis of a turbulent round jet based on direct numerical simulation data at large box and high Reynolds number // *Phys. Rev. Fluids.* 2024. Vol. 9, № 7. Pp. 074608. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.9.074608
23. Ren X., Shen S., Yang Y., Iv H., Guo Y. Comparison of LES and RANS simulation on turbulent round jet // *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2023. DOI: 10.1007/s00170-023-11693-7
24. Kubacki S., Dick E. Hybrid RANS/LES of flow and heat transfer in round impinging jets // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2011. Vol. 32, № 3. Pp. 631–651. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2011.03.002
25. Reynolds A.J. The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1975. Vol. 18. Pp. 1055–1069. DOI: 10.1016/0017-9310(75)90223-9
26. Kays W.M. Turbulent Prandtl number. Where are we? // *J. Heat Transf.* 1994. Vol. 116, № 2. Pp. 284–295. DOI: 10.1115/1.2911398
27. Кириллов П.Л. Теплообмен в турбулентном потоке. Ч. 1. Турбулентное число Прандтля // *Атомная энергия.* 2017. Т. 122, вып. 3. С. 133–145.
28. Кутателадзе С.С. Пристенная турбулентность. Изд. «Наука», Новосибирск, 1973. 473 с.
29. Xiong Y., Kaufmann T., Noiray N. Towards robust BOS measurements for axisymmetric flows // *Exp. Fluids.* 2020. Vol. 61. Pp. 178. DOI: 10.1007/s00348-020-03007-4
30. Settles G.S., Liberzon A. Schlieren and BOS velocimetry of a round turbulent helium jet in air // *Opt. Lasers Eng.* 2022. Vol. 156. Pp. 107104. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2022.107104
31. Wygnanski N.I., Fiedler D.H. Some measurements in the self-preserving jet // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 3. Pp. 577–612. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112069000358>
32. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
33. Wang Z., He P., Lv Y., Zhou J., Fan J., Cen K. Direct numerical simulation of subsonic round turbulent jet // *Flow Turbul. Combust.* 2010. Vol. 84, № 4. Pp. 669–86. DOI: 10.1007/s10494-010-9248-5
34. Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E. An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1997. Vol. 40, № 17. Pp. 4191–4196. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(97\)00084-7](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00084-7)
35. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // *J. Comput. Phys.* 2019. Vol. 378. Pp. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.0
36. Clark Di Leoni P., Agarwal K., Zaki T.A., Meneveau C., Katz J. Reconstructing turbulent velocity and pressure fields from under-resolved noisy particle tracks using physics-informed neural networks // *Exp. Fluids.* 2023. Vol. 64. Pp. 95. DOI: 10.1007/s00348-023-03629-4
37. Wang X., Chan Y., Wong K., Grishchenko D., Kudinov P. Flow reconstruction of single-phase planar jet from sparse temperature measurements. *Saudi Int. Conf. Nucl. Power Eng.*, 2023. Pp. 23103. DOI: 10.1007/978-3-031-64362-0_40
38. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for heat transfer problems // *J. Heat Transf.* 2021. Vol. 143. Pp. 060801. DOI: 10.1115/1.4050542
39. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R. Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations // *Phys. Fluids.* 2022. Vol. 34, № 7. Pp. 075117. DOI: 10.1063/5.0095270

40. Mao Z., Jagtap A.D., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks for high-speed flows // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2020. Vol. 360. Pp. 112789. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112789
41. Raffel M. Background-oriented schlieren (BOS) techniques // *Exp. Fluids*. 2015. Vol. 56. Pp. 60. DOI: 10.1007/s00348-015-1927-5
42. Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Performance of Background Oriented Schlieren with different background patterns and image processing techniques // *Exp. Therm. Fluid Sci.* 2023. Vol. 147. Pp. 110934. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2023.110934
43. Atcheson B., Heidrich W., Ihrke I. An evaluation of optical flow algorithms for background oriented schlieren imaging // *Exp. Fluids*. 2009. Vol. 46, № 3. Pp. 467–476. DOI: 10.1007/s00348-008-0572-7
44. Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V. Measurements of strongly refracting objects using Background Oriented Schlieren with different patterns and image processing techniques: a review // *J. Flow Vis. Image Process.* 2025. Vol. 32. № 2. Pp. 1–33. DOI: 10.1615/JFlowVisImageProc.2024053623
45. Takeda M., Ina H., Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry // *J. Opt. Soc. Am.* 1982. Vol. 72. Pp. 156–160. DOI: 10.1364/JOSA.72.000156
46. Moumen A., Laboureur D., Gallant J., Hendrick P. A new approach for the reconstruction of axisymmetric refractive index fields from background-oriented schlieren measurements // *Shock Waves*. 2022. Vol. 32, № 3. Pp. 313–318. DOI: 10.1007/s00193-022-01071-9
47. Abe K., Kondoh T., Nagano Y. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - I. Flow field calculations // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1994. Vol. 37, № 1. Pp. 139–151. DOI: 10.1016/0017-9310(94)90168-6
48. Baydin A.G., Pearlmutter B.A., Radul A.A., Siskind J.M. Automatic differentiation in machine learning: a survey // *J. Mach. Learn. Res.* 2018. Vol. 18. Pp. 5595–5637. DOI: 10.48550/arXiv.1502.05767
49. Rudenko Y.K., Vinnichenko N.A., Pushtaev A.V., Plaksina Y.Y., Uvarov A.V. Reconstruction of turbulent flow from temperature field measured using Background Oriented Schlieren // *Int. J. Thermofluids*. 2024. Vol. 23. Pp. 100744. DOI: 10.1016/j.ijft.2024.100744
50. Rudenko Y., Vinnichenko N., Plaksina Y., Uvarova I., Ganichev A., Uvarov A. Complete characterization of axisymmetric turbulent jet using background oriented schlieren and physics-informed neural network // *Heat Transf. Res.* 2025. Vol. 56. Pp. 17–35. DOI: 10.1615/HeatTransRes.2024055270
51. Liu D.C., Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization // *Math. Program.* 1989. Vol. 45. Pp. 503–528. DOI: 10.1007/BF01589116
52. Molnar J.P., Venkatakrishnan L., Schmidt B.E., Sipkens T.A., Grauer S.J. Estimating density, velocity, and pressure fields in supersonic flows using physics-informed BOS // *Exp. Fluids*. 2023. Vol. 64. Pp. 14. DOI: 10.1007/s00348-022-03554-y
53. Liu J., Shimoyama K. Determination of turbulent Prandtl number for thermal fluid dynamics simulation of HVAC unit by data assimilation // *J. Therm. Sci. Eng. Appl.* 2024. Vol. 16, № 11. Pp. 111003. DOI: 10.1115/1.4066338
54. Uddin N., Neumann S.O., Weigand B., Younis B.A. Large-eddy simulations and heat-flux modeling in a turbulent impinging jet // *Numer. Heat Transf., Part A*. 2009. Vol. 55, № 10. Pp. 906–930. DOI: 10.1080/10407780902959324

References

1. Perakis N., Haidn O.J., Rahn D., Eiringhaus D., Zhang S., Daimon Y., Karl S., Horchler T., Qualitative and quantitative comparison of rans simulation results for a 7 element GOX/GCH₄ rocket combustor, AIAA Paper 2018-4556. DOI: 10.2514/6.2018-4556
2. Daimon Y., Negishi H., Silvestri S., Haidn O., Conjugated combustion and heat transfer simulation for a 7 element GOX/GCH₄ rocket combustor, AIAA Paper 2018-4553. DOI: 10.2514/6.2018-4553

3. Borovik I.N., Strokach E.A., Severina N.S., Influence of the turbulent Prandtl number on numerical simulation reaction flow, *AIP Conf. Proc.*, 2019, vol. 2181, pp. 020029. DOI: 10.1063/1.5135689
4. Xue Z., Hongxing Y., Jian D., Sijia D., Xiaoyu W., Wenpei F., Study on the turbulent Prandtl number model for liquid metal flow and heat transfer in a narrow rectangular channel, *Front. Energy Res.*, 2024, vol. 12, pp. 1366470. DOI: 10.3389/fenrg.2024.1366470
5. Cheng X., Tak N., Investigation on turbulent heat transfer to lead-bismuth eutectic flows in circular tubes for nuclear applications, *Nucl. Eng. Des.*, 2006, vol. 236, no. 4, pp. 385–393. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2005.09.006
6. Zhou B., Ji Y., Sun J., Sun Y., Modified turbulent Prandtl number model for helium–xenon gas mixture with low Prandtl number, *Nucl. Eng. Des.*, 2020, vol. 366, pp. 110738. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110738
7. Li D., Turbulent Prandtl number in the atmospheric boundary layer - where are we now?, *Atmos. Res.*, 2019, vol. 216, pp. 86–105. DOI: 10.1016/J.ATMOSRES.2018.09.015
8. Aouissi M., Bounif A., Bensayah K., Scalar turbulence model investigation with variable turbulent Prandtl number in heated jets and diffusion flames, *Heat Mass Transf.*, 2008, vol. 44, no. 9, pp. 1065–077. DOI: 10.1007/s00231-007-0350-8
9. Darisse A., Lemay J., Benanssa A., Budgets of turbulent kinetic energy, Reynolds stresses, variance of temperature fluctuations and turbulent heat fluxes in a round jet, *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 774, pp. 95–142. DOI: 10.1017/jfm.2015.245
10. Lemoine F., Antoine Y., Wolff M., Lebouche M., Simultaneous temperature and 2D velocity measurements in a turbulent heated jet using combined laser-induced fluorescence and LDA, *Exp. Fluids*, 1999, vol. 26, pp. 315–323. DOI: 10.1007/s003480050294
11. DeBonis J.R., Prediction of turbulent temperature fluctuations in hot jets, *AIAA J.*, 2018, vol. 56, no. 8, pp. 3097–3111. DOI: 10.2514/1.J056596
12. Chang K., Cowen E.A., Turbulent Prandtl number in neutrally buoyant turbulent round jet, *J. Eng. Mech.*, 2002, vol. 128, no. 10, pp. 1082–1087. DOI: 10.1061/ASCE0733-93992002128:101082
13. Kulikova T. N., Markov P. V., Solonin V. I., *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2015, no. 6, pp. 420–437 [in Russian]. DOI: 10.7463/0615.0780763
14. Tao Q., Su C., Chen M., Deng Y., Wang Y., Yu M., Sun H., Bargal M.H.S., Numerical investigation on the temperature distribution inside the engine compartment of a fuel cell vehicle with nanofluids as coolant, *Int. J. Energy Res.*, 2021, vol. 45, no. 6, pp. 9613–9626. DOI: 10.1002/er.6485
15. Lushchik V. G., Makarova M. S. Turbulent Prandtl number in the boundary layer on a plate: effect of the molecular Prandtl number, injection (suction), and longitudinal pressure gradient, *Thermophys. Aeromech.*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 169–182. DOI: 10.1134/S0869864318020026
16. Surzhikov S. T., Results of the Use of Algebraic Models of Turbulence in the Framework of the RANS Model of Heating the Surface of a Sharp Plate in a Supersonic Flow, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 3 [in Russian]. DOI: 10.33257/PhChGD.24.3.1056. <https://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1056/>
17. Lai C. C., Socolofsky S. A., Budgets of turbulent kinetic energy, Reynolds stresses, and dissipation in a turbulent round jet discharged into a stagnant ambient, *Environ. Fluid Mech.*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 349–377. DOI: 10.1007/s10652-018-9627-3
18. van Gent P., Michaelis D., van Oudheusden B.W., Weiss P., de Kat R., Laskari A., Jeon Y.J., David L., Schanz D., Huhn F., Gesemann S., Novara M., McPhaden C., Neeteson N.J., Rival D.E., Schneiders J.F.G., Schrijer F.F.J., Comparative assessment of pressure field reconstructions from particle image velocimetry measurements and Lagrangian particle tracking, *Exp. Fluids*, 2017, vol. 58, no. 4, pp. 33. DOI: 10.1007/s00348-017-2324-z

19. Alcántara-Ávila F., Hoyas S., Pérez-Quile M.J., DNS of thermal channel flow up to $Re_\tau = 2000$ for medium to low Prandtl numbers, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 127, pp. 349–361. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.149
20. Pirozzoli S., Prandtl number effects on passive scalars in turbulent pipe flow, *J. Fluid Mech.*, 2023, vol. 965, pp. A7. DOI: 10.1017/jfm.2023.387
21. Boersma B. J., Brethouwer G., Nieuwstadt F.T.M., A numerical investigation on the effect of the in-flow conditions on the self-similar region of a round jet, *Phys. Fluids*, 1998, vol. 10, no. 4, pp. 899–909. DOI: 10.1063/1.869626
22. Nguyen C. T., Oberlack M., Analysis of a turbulent round jet based on direct numerical simulation data at large box and high Reynolds number, *Phys. Rev. Fluids*, 2024, vol. 9, no. 7, pp. 074608. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.9.074608
23. Ren X., Shen S., Yang Y., Iv H., Guo Y., Comparison of LES and RANS simulation on turbulent round jet, *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2023. DOI: 10.1007/s00170-023-11693-7
24. Kubacki S., Dick E., Hybrid RANS/LES of flow and heat transfer in round impinging jets, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2011, vol. 32, no. 3, pp. 631–651. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2011.03.002
25. Reynolds A. J., The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1975, vol. 18, pp. 1055–1069. DOI: 10.1016/0017-9310(75)90223-9
26. Kays W. M., Turbulent Prandtl number. Where are we?, *J. Heat Transf.*, 1994, vol. 116, no. 2, pp. 284–295. DOI: 10.1115/1.2911398
27. Kirillov P. L., Heat transfer in a turbulent flow. Part 1. Turbulent Prandtl number, *At. Energy*, 2017, vol. 122, no. 3, pp. 156–171. DOI: 10.1007/s10512-017-0251-y
28. Kutateladze S. S., *Wall Turbulence*, Novosibirsk, Nauka, 1973, 227 p. [in Russian].
29. Xiong Y., Kaufmann T., Noiray N., Towards robust BOS measurements for axisymmetric flows, *Exp. Fluids*, 2020, vol. 61, pp. 178. DOI: 10.1007/s00348-020-03007-4
30. Settles G. S., Liberzon A., Schlieren and BOS velocimetry of a round turbulent helium jet in air, *Opt. Lasers Eng.*, 2022, vol. 156, pp. 107104. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2022.107104
31. Wygnanski N. I., Fiedler D. H., Some measurements in the self-preserving jet, *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 3, pp. 677–612. DOI: 10.1017/S0022112069000358
32. Schlichting H., *Boundary-Layer Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2017, 805 p.
33. Wang Z., He P., Lv Y., Zhou J., Fan J., Cen K., Direct numerical simulation of subsonic round turbulent jet, *Flow Turbul. Combust.*, 2010, vol. 84, no. 4, pp. 669–686. DOI: 10.1007/s10494-010-9248-5
34. Weigand B., Ferguson J.R., Crawford M.E., An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1997, vol. 40, no. 17, pp. 4191–4196. DOI: 10.1016/S0017-9310(97)00084-7
35. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. E., Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, 2019, vol. 378, pp. 686–707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.0
36. Clark Di Leoni P., Agarwal K., Zaki T.A., Meneveau C., Katz J., Reconstructing turbulent velocity and pressure fields from under-resolved noisy particle tracks using physics-informed neural networks, *Exp. Fluids*, 2023, vol. 64, pp. 95. DOI: 10.1007/s00348-023-03629-4
37. Wang X., Chan Y., Wong K., Grishchenko D., Kudinov P., Flow reconstruction of single-phase planar jet from sparse temperature measurements, *Saudi Int. Conf. Nucl. Power Eng.*, 2023, pp. 23103. DOI: 10.1007/978-3-031-64362-0_40
38. Cai S., Wang Z., Wang S., Perdikaris P., Karniadakis G.E., Physics-informed neural networks for heat transfer problems, *J. Heat Transf.*, 2021, vol. 143, pp. 060801. DOI: 10.1115/1.4050542
39. Eivazi H., Tahani M., Schlatter P., Vinuesa R., Physics-informed neural networks for solving Reynolds-averaged Navier-Stokes equations, *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, no. 7, pp. 075117. DOI: 10.1063/5.0095270

40. Mao Z., Jagtap A.D., Karniadakis G.E., Physics-informed neural networks for high-speed flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2020, vol. 360, pp. 112789. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112789
41. Raffel M., Background-oriented schlieren (BOS) techniques, *Exp. Fluids*, 2015, vol. 56, pp. 60. DOI: 10.1007/s00348-015-1927-5
42. Vinnichenko N. A., Pushtaev A. V., Plaksina Y. Y., Uvarov A. V., Performance of Background Oriented Schlieren with different background patterns and image processing techniques, *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2023, vol. 147, pp. 110934. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2023.110934
43. Atcheson B., Heidrich W., Ihrke I., An evaluation of optical flow algorithms for background oriented schlieren imaging, *Exp. Fluids*, 2009, vol. 46, no. 3, pp. 467–476. DOI: 10.1007/s00348-008-0572-7
44. Vinnichenko N. A., Pushtaev A. V., Measurements of strongly refracting objects using Background Oriented Schlieren with different patterns and image processing techniques: a review, *J. Flow Vis. Image Process.*, 2025, vol. 32, no 2, pp. 1–33. DOI: 10.1615/JFlowVisImageProc.2024053623
45. Takeda M., Ina H., Kobayashi S., Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry, *J. Opt. Soc. Am.*, 1982, vol. 72, pp. 156–160. DOI: 10.1364/JOSA.72.000156
46. Moumen A., Laboureur D., Gallant J., Hendrick P., A new approach for the reconstruction of axisymmetric refractive index fields from background-oriented schlieren measurements, *Shock Waves*, 2022, vol. 32, no. 3, pp. 313–318. DOI: 10.1007/s00193-022-01071-9
47. Abe K., Kondoh T., Nagano Y., A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows - I. Flow field calculations, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1994, vol. 37, no. 1, pp. 139–151. DOI: 10.1016/0017-9310(94)90168-6
48. Baydin A. G., Pearlmutter B. A., Radul A. A., Siskind J. M., Automatic differentiation in machine learning: a survey, *J. Mach. Learn. Res.*, 2018, vol. 18, pp. 5595–5637. DOI: 10.48550/arXiv.1502.05767
49. Rudenko Y. K., Vinnichenko N. A., Pushtaev A. V., Plaksina Y. Y., Uvarov A. V., Reconstruction of turbulent flow from temperature field measured using Background Oriented Schlieren, *Int. J. Thermofluids*, 2024, vol. 23, pp. 100744. DOI: 10.1016/j.ijft.2024.100744
50. Rudenko Y., Vinnichenko N., Plaksina Y., Uvarova I., Ganichev A., Uvarov A., Complete characterization of axisymmetric turbulent jet using background oriented schlieren and physics-informed neural network, *Heat Transf. Res.*, 2024, vol. 56, pp. 17–35. DOI: 10.1615/HeatTransRes.2024055270
51. Liu D. C., Nocedal J., On the limited memory BFGS method for large scale optimization, *Math. Program.*, 1989, vol. 45, pp. 503–528. DOI: 10.1007/BF01589116
52. Molnar J. P., Venkatakrishnan L., Schmidt B. E., Sipkens T. A., Grauer S. J., Estimating density, velocity, and pressure fields in supersonic flows using physics-informed BOS, *Exp. Fluids*, 2023, vol. 64, pp. 14. DOI: 10.1007/s00348-022-03554-y
53. Liu J., Shimoyama K., Determination of turbulent Prandtl number for thermal fluid dynamics simulation of HVAC unit by data assimilation, *J. Therm. Sci. Eng. Appl.*, 2024, vol. 16, no. 11, pp. 111003. DOI: 10.1115/1.4066338
54. Uddin N., Neumann S. O., Weigand B., Younis B. A., Large-eddy simulations and heat-flux modeling in a turbulent impinging jet, *Numer. Heat Transf., Part A*, 2009, vol. 55, no. 10, pp. 906–930. DOI: 10.1080/10407780902959324

Статья поступила в редакцию 15 августа 2025 г.