

Reynolds Analogy Coefficient in a Compressible Turbulent Boundary Layer with a Pressure Gradient

V. G. Lushchik, A. I. Reshmin

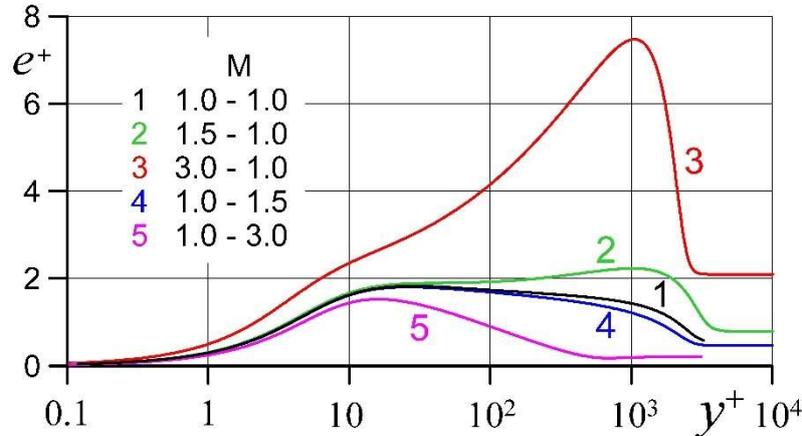
*Lomonosov Moscow State University, Research Institute of Mechanics,
Moscow, 119192, Russia*

vgl_41@mail.ru, alexreshmin@rambler.ru

Abstract

Using a three-parameter differential RANS turbulence model, a numerical study of a compressible turbulent boundary layer in a supersonic flow with a positive and negative pressure gradient was carried out, which was realized by changing the Mach number of the incoming flow along the length of the plate. The study was carried out for a number of values of the input Mach number (from 1 to 3) and two values of the temperature factor (0.5 and 1.5). Using the results of calculations of the flow and heat transfer characteristics, the dependences of the Reynolds analogy coefficient on two pressure gradient parameters are obtained.

Keywords: RANS model of turbulence, Mach number, pressure gradient, coefficient of friction, Stanton number, temperature factor, Reynolds analogy coefficient.



Calculated profiles of turbulence intensity at a length of $x = 1$ m for a boundary layer with zero (line 1), positive (lines 2, 3) and negative (lines 4, 5) pressure gradients for the temperature factor $\Theta = 1.5$

УДК 532.526.3

Коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое с градиентом давления

В. Г. Лущик, А. И. Решмин

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский проспект д. 1
vgl_41@mail.ru, alexreshmin@rambler.ru*

Аннотация

С использованием трехпараметрической дифференциальной RANS-модели турбулентности проведено численное исследование сжимаемого турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке с положительным и отрицательным градиентом давления, который был реализован за счет изменения числа Маха набегающего потока по длине пластины. Исследование проведено для ряда значений входного числа Маха (от 1 до 3) и двух значений величины температурного фактора (0.5 и 1.5). С использованием результатов расчетов характеристик течения и теплообмена получены зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от двух параметров градиента давления.

Ключевые слова: RANS-модель турбулентности, число Маха, градиент давления, коэффициент трения, число Стантона, температурный фактор, коэффициент аналогии Рейнольдса.

1. Введение

При расчете теплообмена для определения безразмерного теплового потока в стенку (числа Стантона St) используется аналогия Рейнольдса путем введения коэффициента аналогии Рейнольдса, который для пограничного слоя на пластине в сверхзвуковом потоке имеет вид:

$$K_{Re} = \frac{2St_x}{c_f},$$

где $c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_1 u_1^2}$; $St_x = \frac{q_w x}{\lambda_w (T_{aw} - T_w) Pr Re_x}$ – соответственно коэффициент поверхностного трения на пластине и число Стантона, определенные по длине пластины x . Входящее в выражение

для St_x число Рейнольдса $Re_x = \frac{\rho_1 u_1 x}{\eta_1}$ определено по параметрам набегающего потока (индекс 1) и длине пластины; T_w и λ_w – температура и коэффициент теплопроводности потока у

стенки; $T_{aw} = T_1 \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)$ – температура адиабатной (теплоизолированной) стенки. Коэффициент восстановления и показатель адиабаты для воздуха приняты равными $r = Pr^{1/3}$ и $\gamma = 1.4$ соответственно.

Удобство использования коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} для определения числа Стантона St состоит в том, что коэффициент трения c_f практически не зависит от числа Прандтля Pr и рассчитывается по известным зависимостям от чисел Рейнольдса и Маха.

Поскольку число Стантона зависит от температуры стенки, то в случае течения на охлаждаемой или нагреваемой пластине в число определяющих параметров, от которых зависит коэффициент аналогии Рейнольдса, кроме чисел Рейнольдса, Маха и Прандтля, войдет температурный фактор (безразмерная температура стенки) $\Theta = T_w/T_{aw}$.

Разработке методов расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке посвящено большое число работ, обзор которых представлен в [1]. Наиболее распространены в инженерной практике интегральные методы расчета [2–4], основанные на использовании интегральных соотношений импульса и энергии, замкнутых алгебраическими соотношениями для коэффициента трения, формпараметра и числа Стантона. На основе [2, 3] разработаны методики расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковых потоках сопел ЖРД с экстремальными условиями по температуре, давлению и числам Маха.

Отметим, что недостатки интегральных методов расчета известны: необходимость использования эмпирической информации о виде профилей скорости и температуры, недостаточная универсальность при существенном изменении граничных условий, например, теплового режима стенки. Это обусловило переход от интегральных методов расчета к дифференциальным, обзор которых для сверхзвукового пограничного слоя также содержится в [1].

Для расчета пограничного слоя в соплах ЖРД в [5] разработана методика, базирующаяся на дифференциальной RANS-модели турбулентности [6], обобщенной на течение с теплообменом [7] и прошедшей всестороннюю проверку в широком классе задач дозвукового течения и теплообмена в пограничных слоях и каналах [8]. Сравнительный анализ метода интегральных соотношений, алгебраической и группы дифференциальных моделей турбулентности, проведенный в [9], показал, что модель [6, 7] по результатам расчета характеристик пограничного слоя в соплах ЖРД не уступает лучшим дифференциальным моделям, а по возможностям учета внешних воздействий и неавтономности превосходит их.

Для верификации RANS-модели турбулентности [6, 7] в [10] проведены расчеты пограничного слоя на пластине в сверхзвуковом потоке с постоянным числом Маха. Получено удовлетворительное согласование расчета с известными экспериментальными данными как по интегральным, так и по локальным характеристикам течения и теплообмена в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса по толщине потери импульса, Маха набегающего потока и температурного фактора.

Для пограничных слоев в потоке с продольным градиентом давления используются ряд параметров, характеризующих величину градиента давления.

Параметр градиента давления $\beta = (\delta^* \cdot dp/dx)/\tau_w$, где δ^* – толщина вытеснения, p – статическое давление, x – координата в направлении потока, τ_w – трение на стенке. Этот параметр был предложен Клаузером [11], согласно которому он представляет отношение силы градиента давления ($\delta^* \cdot dp/dx$) к «единственной другой существенной силе в слое», трению на стенке τ_w . Это наиболее часто обсуждаемый в литературе параметр градиента давления.

Параметр ускорения (торможения) $K = (\eta \cdot du_1/dx)/\rho u_1^2$, где u_1 – локальная скорость набегающего потока. Этот параметр характеризует равновесные пограничные слои, так как в этих потоках параметр $\beta = \text{const}$. Для развивающегося пограничного слоя с положительным градиентом давления из анализа известных литературных источников параметр K применяется реже. Существуют также и другие параметры, характеризующие величину градиента давления, использование которых требует экспериментального обоснования.

Исследования сжимаемого пограничного слоя с положительным градиентом давления менее многочисленны по сравнению с несжимаемым потоком [12–17]. Диапазон рассматриваемых параметров градиента давления в литературе в основном ограничен невысокими значениями β – порядка единиц. Общепринятым результатом для низкоскоростных потоков с положительным градиентом давления является рост коэффициента аналогии Рейнольдса по сравнению с безградиентным потоком. Вопрос о влиянии положительного градиента давления

на параметры турбулентности и теплообмена более противоречивы и, по-видимому, требуют дальнейшего изучения и расширения диапазона значений параметра градиента давления β .

Исследования пограничного слоя с отрицательным градиентом давления относятся, в основном, к несжимаемым потокам в пограничных слоях и конфузорах [18–22]. Основным результатом для дозвуковых потоков с отрицательным градиентом давления является тенденция к ламинаризации пограничного слоя с ростом параметра ускорения потока K . Вопрос о влиянии отрицательного градиента давления на коэффициент аналогии Рейнольдса требует дальнейшего изучения.

Целью настоящей работы является численное исследование турбулентного пограничного слоя (динамического и теплового) в сжимаемом потоке с положительным и отрицательным градиентом давления в широком диапазоне изменения параметров градиента давления β и K .

2. Постановка задачи

Для расчета течения и теплообмена в сжимаемом турбулентном пограничном слое с заданным градиентом давления была использована система уравнений неразрывности, движения и энергии [2].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right), \\ c_p \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_t \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь x – направление вдоль пластины; y – координата, отсчитываемая по нормали к пластине; u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно; p – давление; $\rho \tau = -\rho \langle u'v' \rangle$ – турбулентное трение; ρ – плотность; η – динамическая вязкость.

Для определения турбулентного трения $\rho \tau$, входящего в уравнение движения (1), использовалась трехпараметрическая модель турбулентности [6], обобщенная на течения с теплообменом [7]. Модель включает уравнения переноса для напряжения сдвига $\tau = -\langle u'v' \rangle$, энергии турбулентности $E = 0.5 \sum \langle u_i'^2 \rangle$ и параметра $\omega = E/L^2$, предложенного А. Н. Колмогоровым, имеющего физический смысл квадрата завихренности турбулентности и содержащего поперечный интегральный масштаб турбулентности L .

Для определения турбулентного потока тепла ρq_t , входящего в уравнение энергии, используется уравнение переноса для величины $q_t = -c_p \langle v'T' \rangle$, полученное в [23].

Эти уравнения для сжимаемого турбулентного пограничного слоя приведены в [6, 7, 23].

Система уравнений неразрывности, движения энергии и модели турбулентности решалась при следующих граничных условиях.

На стенке ($y=0$):

$$u = v = 0, \quad T = T_w(x), \quad E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \tau = 0, \quad q_t = 0 \quad (2)$$

Граничное условие $\partial E / \partial y = 0$ позволяет определить величину $\omega_w(x)$, которая заранее неизвестна. Граничное условие (2) принималось для заданной температуры стенки ($T = T_w(x)$). В качестве безразмерного критерия для заданной температуры стенки T_w принимался температурный фактор, который для сверхзвукового пограничного слоя принимался в виде $\Theta = T_w / T_{aw}$.

На внешней границе пограничного слоя ($y = \delta(x)$):

$$E = E(x), \quad \omega = \omega(x), \quad \tau = 0, \quad u = u_1(x), \quad T = T_1(x), \quad q_t = 0$$

Здесь $u_1(x)$, $T_1(x)$ – функции, описывающие невязкое течение в набегающем потоке, а функции $E(x)$ и $\omega(x)$ описывают характеристики турбулентности в этом течении. Величина $\delta(x)$ выбирается из условия гладкого сопряжения решения с параметрами набегающего потока.

В начальном сечении ($x = 0$) задавался пограничный слой, толщина потери импульса δ_0^{**} в котором соответствовала числу $Re_{\delta_0^{**}} = \rho_1 u_1 \delta_0^{**} / \eta_1 \approx 10$, с ламинарным (по Блазиусу) профилем скорости u/u_1 [24] и температурой $(T - T_1) / (T_1^* - T_1) = 1 - (u/u_1)^2$. Принималось, что $\tau(y) = q_t(y) = 0$, а профили функций $E(y)$, $\omega(y)$ задавались так, как это делалось в [25]. Интенсивность турбулентности набегающего потока на входе $e_0 = \sqrt{E_0} / u_1 = 0.03$. Величина масштаба турбулентности в начальном сечении L_0 , как показано в [25], слабо влияет на результаты расчетов, поэтому число Рейнольдса по этой величине было принято достаточно большим ($Re_L = \rho_1 u_1 L_0 / \eta_1 = 10^5$) и в расчетах не менялось.

Теплофизические свойства среды (ρ , η , λ , c_p) в зависимости от температуры и давления задавались в табличном виде. В качестве теплоносителя использовался воздух с температурой и давлением торможения $T^* = 300$ К и $p^* = 0.1$ МПа, соответственно.

3. Положительный градиент давления

Расчетная модель представляла пластину длиной 1 метр, на первой (входной) части длиной 0.1 метра которой число Маха набегающего потока M_1 было постоянным, а на второй части линейно изменялось до величины $M_2 = 1$ (см. рис. 1, а). Длина входной части была выбрана из условий завершения перехода от ламинарного режима течения к турбулентному.

На рис. 1, б для трех законов изменения числа Маха набегающего потока по длине пластины (линии 1–3) представлено изменение безразмерного положительного градиента давления $d\bar{p}/d\bar{x}$. Как видно, градиент давления с ростом начального числа Маха M_1 существенно возрастает по длине.

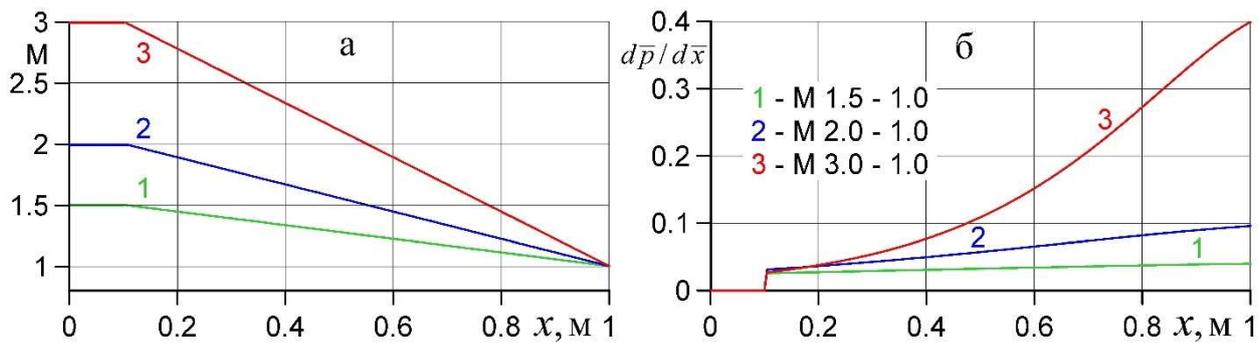


Рис. 1. Изменение числа Маха M (а) и безразмерного градиента давления $d\bar{p}/d\bar{x}$ (б) по длине пластины

Изменение параметров градиента давления $\beta = (\delta^* \cdot dp/dx) / \tau_w$ и торможения $K = (\eta \cdot du_1/dx) / \rho u_1^2 = -(\eta \cdot dp/dx) / \rho^2 u_1^3$ по длине пластины на участке уменьшения числа Маха (см. рис. 1, а) приведено на рис. 2. Как видно из рис. 2, параметры β и $-K$ растут по длине пластины, что обусловлено ростом градиента давления dp/dx (см. рис. 1, б).

Скорость набегающего потока u_1 и турбулентное трение τ_w при этом падают, толщины вытеснения δ^* и потери импульса δ^{**} растут, но в разной степени, так что формпараметр $H = \delta^* / \delta^{**}$ по длине пластины уменьшается. Статическое давление p и плотность потока ρ растут по длине при неизменном давлении торможения p^* .

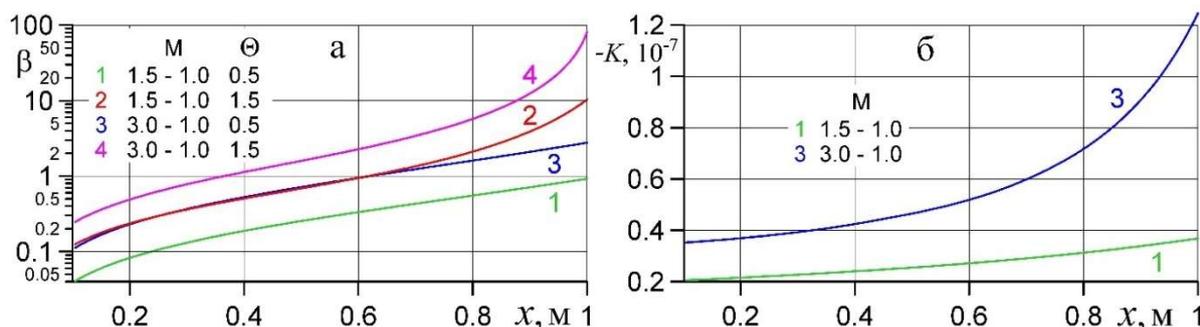


Рис. 2. Изменение параметров градиента давления β (а) и торможения K (б) по длине пластины для двух законов изменения числа Маха набегающего потока M и двух значений температурного фактора Θ

На рис. 3 представлено изменение по длине пластины величин коэффициента трения (*a*) и числа Стантона (*б*), входящих в определение коэффициента аналогии Рейнольдса $K_{Re} = 2St/c_f$. Как видно из рис. 3, коэффициент трения для течений с растущим градиентом давления существенно уменьшается по длине пластины и в большей степени для нагреваемой пластины ($\Theta = 1.5$, линии 3, 4), чем для охлаждаемой ($\Theta = 0.5$, линии 1, 2).

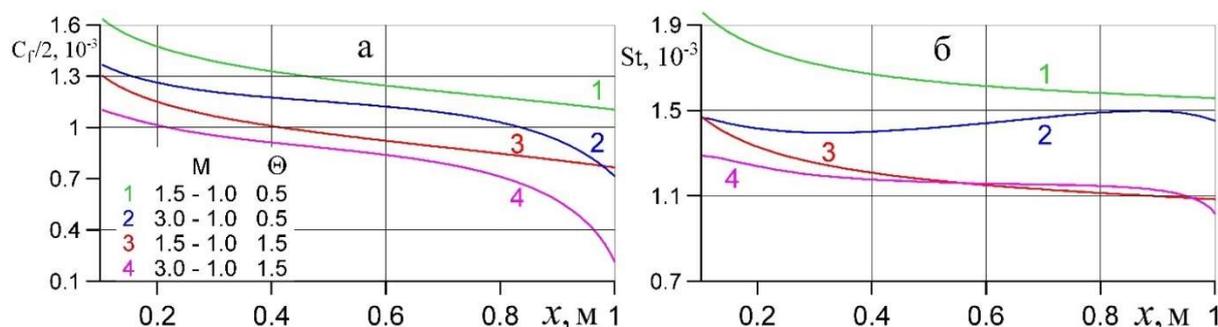


Рис. 3. Изменение коэффициента трения (*a*) и числа Стантона (*б*) по длине пластины для двух законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

Изменение по длине пластины коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} приведено на рис. 4. Как видно, величина K_{Re} возрастает по длине, особенно в конце пластины, где коэффициент трения существенно уменьшается при слабом изменении числа Стантона (см. рис. 3). Коэффициент аналогии Рейнольдса при этом сильнее возрастает для большого градиента давления (линии 2, 4).

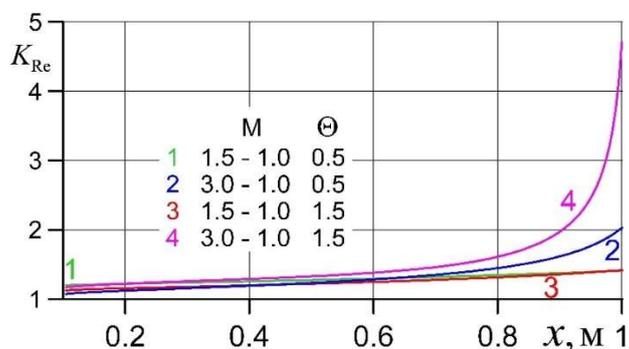


Рис. 4. Изменение по длине пластины коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} для двух законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

С использованием приведенных выше результатов расчетов характеристик течения и теплообмена получены зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} от параметров

градиента давления β и K , представленные на рис. 5. Как видно из рис. 5, а, результаты расчетов зависимости $K_{Re}(\beta)$ в широком диапазоне значений параметра β хорошо обобщаются, в отличие от зависимости $K_{Re}(K)$ (рис. 5, б), где имеет место существенное расхождение расчетных зависимостей по величине градиента давления и температурного фактора.

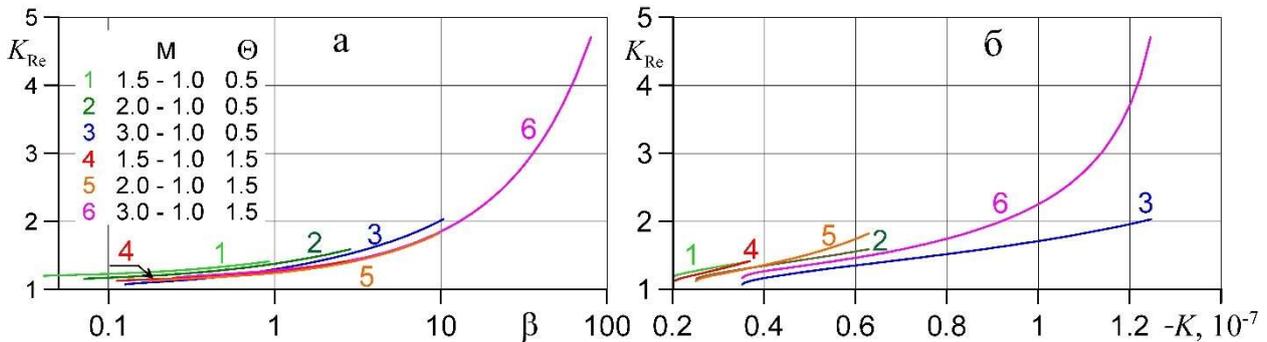


Рис. 5. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} от параметров градиента давления β (а) и K (б) для трех законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

4. Отрицательный градиент давления

В случае отрицательного градиента давления расчетная модель аналогична приведенной выше для положительного градиента давления, за исключением того, что на первой (входной) части пластины длиной 0.1 метра число Маха набегающего потока было постоянным и равным $M_1 = 1$, а на второй части линейно изменялось до величины $M_2 = 1.5$ и $M_2 = 3$ (рис. 6, а).

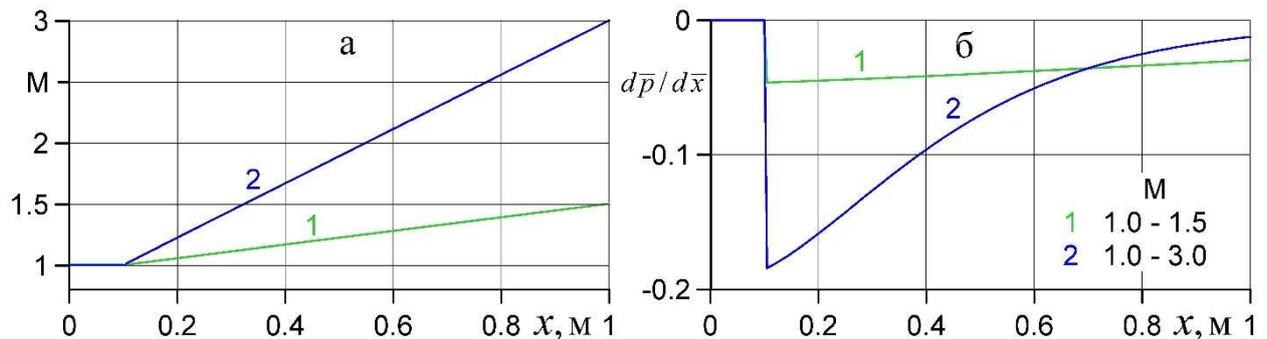


Рис. 6. Изменение числа Маха M (а) и безразмерного градиента давления $d\bar{p}/d\bar{x}$ (б) по длине пластины

На рис. 6, б для двух законов изменения числа Маха набегающего потока по длине пластины (линии 1, 2) представлено изменение безразмерного градиента давления $d\bar{p}/d\bar{x}$. Как видно, градиент давления с ростом числа Маха по длине пластины возрастает (уменьшаясь по абсолютной величине) и тем сильнее, чем больше число Маха в конце пластины.

Изменение параметров градиента давления $\beta = (\delta^* \cdot dp/dx) / \tau_w$ и ускорения $K = (\eta \cdot du_1/dx) / \rho u_1^2 = -(\eta \cdot dp/dx) / \rho^2 u_1^3$ по длине пластины на участке возрастания числа Маха (рис. 6, а) приведено на рис. 7.

Как видно из рис. 7, параметры β и K уменьшаются по длине пластины. При этом β , будучи отрицательным, по абсолютной величине увеличивается. Если уменьшение параметра ускорения K при уменьшении абсолютной величины градиента давления и росте скорости внешнего потока по длине пластины вполне ожидаемо, то увеличение абсолютной величины параметра градиента давления β может быть обусловлено значительным снижением трения на пластине и ростом толщины вытеснения, превалирующими над уменьшением абсолютной величины градиента давления.

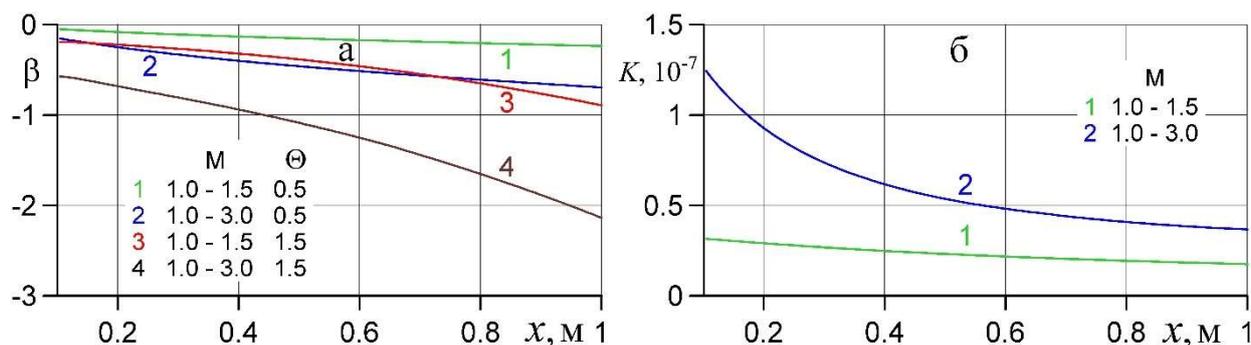


Рис. 7. Изменение параметров градиента давления β (а) и торможения K (б) по длине пластины для двух законов изменения числа Маха набегающего потока M и двух значений температурного фактора Θ

На рис. 8 представлено изменение по длине пластины величин коэффициента трения (а) и числа Стантона (б), определяющих коэффициент аналогии Рейнольдса $K_{Re} = 2St/c_f$. Как видно из рис. 8, коэффициент трения существенно уменьшается по длине пластины и в большей степени для нагреваемой пластины ($\Theta = 1.5$, линии 3, 4), чем для охлаждаемой ($\Theta = 0.5$, линии 1, 2).

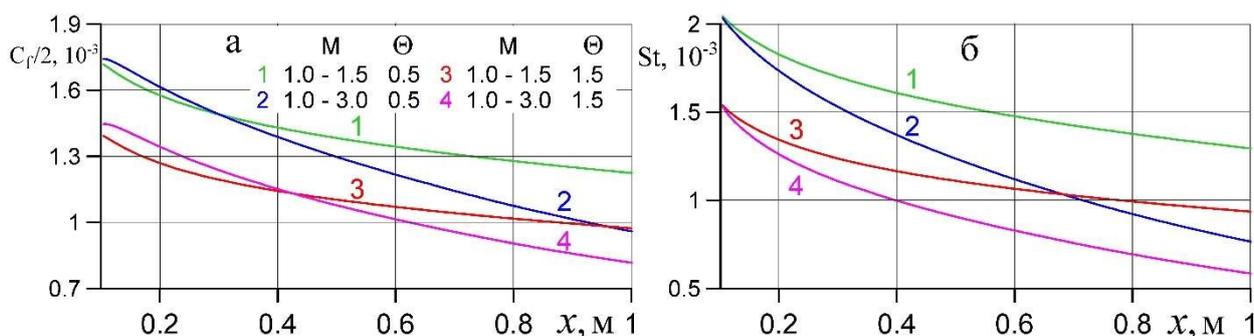


Рис. 8. Изменение коэффициента трения (а) и числа Стантона (б) по длине пластины для двух законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

Изменение по длине пластины коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} приведено на рис. 9.

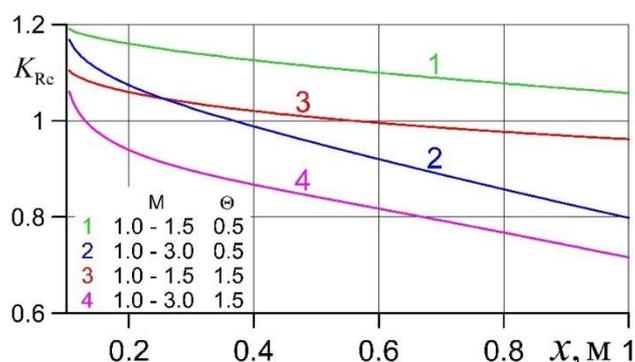


Рис. 9. Изменение по длине пластины коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} для двух законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

Как видно, величина K_{Re} уменьшается за счет более сильного уменьшения по длине числа Стантона по сравнению с более слабым уменьшением коэффициента трения (см. рис. 8).

Коэффициент аналогии Рейнольдса при этом сильнее уменьшается для большего по абсолютной величине градиента давления (линии 2, 4) и большего температурного фактора.

Приведенные выше результаты расчетов характеристик течения и теплообмена позволили получить зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} от параметров градиента давления β и K , представленные на рис. 10.

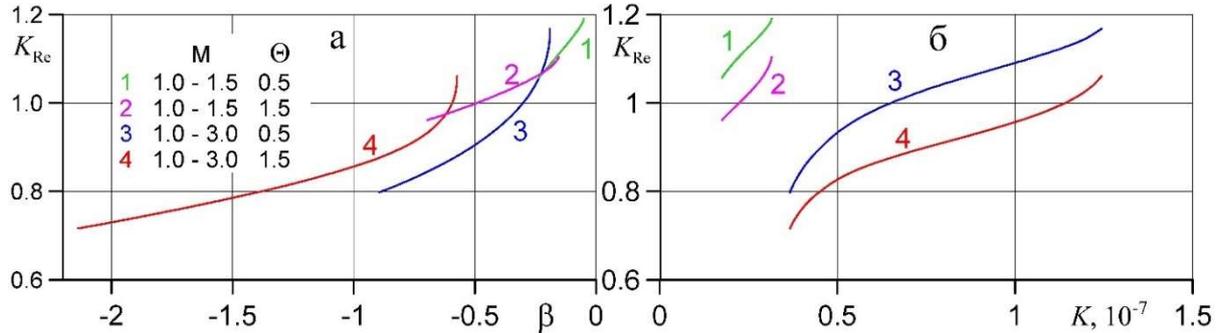


Рис. 10. Зависимость коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} от параметров градиента давления β (а) и K (б) для двух законов изменения числа Маха набегающего потока и двух значений температурного фактора Θ

Таким образом проведенное численное исследование показало, что коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном слое с положительным градиентом давления возрастает, а с отрицательным градиентом давления уменьшается по длине пластины. Это является следствием турбулизации пограничного слоя в потоке с положительным градиентом давления и ламинаризации его в потоке с отрицательным градиентом давления.

Это подтверждают представленные на рис. 11 расчетные профили интенсивности турбулентности $e^+(y^+)$, где $e^+ = \sqrt{E}/u^*$, в зависимости от универсальной координаты $y^+ = yu^*(\rho/\eta)_w$, где $u^* = \sqrt{\tau_w}/\rho_w$ – динамическая скорость, $\tau_w = (\eta \cdot \partial u / \partial y)_w$ – трение на стенке.

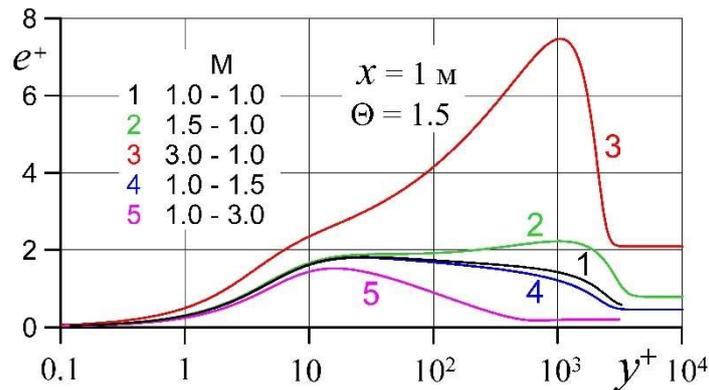


Рис. 11. Расчетные профили интенсивности турбулентности при $x=1$ метр для пограничного слоя с нулевым (линия 1), положительным (линии 2, 3) и отрицательным (линии 4, 5) градиентом давления для температурного фактора $\Theta = 1.5$

Как видно из рис. 11, интенсивность турбулентности для пограничного слоя с положительным градиентом давления (линии 2, 3) возрастает, а с отрицательным (линии 4, 5) – падает по сравнению с нулевым градиентом давления (линия 1).

5. Заключение

С использованием трехпараметрической дифференциальной RANS-модели турбулентности проведено численное исследование сжимаемого турбулентного пограничного слоя с положительным и отрицательным градиентом давления в набегающем потоке. Градиент давления в расчетах был реализован за счет уменьшения или увеличения числа Маха по длине пластины. Исследование проведено для ряда значений входного числа Маха и температурного фактора.

Проведенное численное исследование показало, что коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном слое с положительным градиентом давления возрастет, а с отрицательным градиентом давления уменьшается по длине пластины. Это является следствием турбулизации пограничного слоя в потоке с положительным градиентом давления и ламинаризации его в потоке с отрицательным градиентом давления и подтверждается возрастанием и падением интенсивности турбулентности для соответствующего градиента давления.

В потоке с положительным градиентом давления коэффициент аналогии Рейнольдса K_{Re} существенно зависит от параметра градиента давления β и результаты расчетов для трех законов изменения числа Маха набегающего потока $3 \geq M \geq 1$ и значений температурного фактора $\Theta = 0.5 \div 1.5$ достаточно хорошо обобщаются.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в рамках исследований, финансируемых госбюджетом (АААА – А19-119012990115-5, АААА – А19-119012990110-0).

Литература

1. Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1978 Т. 11. С. 155–304.
2. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
3. Авдучевский В. С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 3–12.
4. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия. 1972. 342 с.
5. Ковалев В. И., Лущик В. Г., Сизов В. И., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: численное исследование пограничного слоя в сопле с завесным охлаждением // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 48–57.
6. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
7. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
8. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
9. Лущик В. Г., Якубенко А. Е. Сравнительный анализ моделей турбулентности для расчета пристенного пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 44–58.
10. Лущик В. Г., Якубенко А. Е. Сверхзвуковой пограничный слой на пластине. Сравнение расчета с экспериментом // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 64–78.
11. Clauser F. H. Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. Vol. 21. Pp. 91–108.

12. Monty J. P., Harun Z., and Marusic I. A parametric study of adverse pressure gradient turbulent boundary layers // *Int. J. Heat Fluid Flow*. 2011. Vol. 32, 575.
13. Araya G., and Castillo L. Direct numerical simulations of turbulent thermal boundary layers subjected to adverse streamwise pressure gradients // *Phys. Fluids*. 2013. Vol. 25, 095107.
14. Harun Z., Monty J. P., Mathis R., and Marusic I. Pressure gradient effects on the large-scale structure of turbulent boundary layers // *J. Fluid Mech*. 2013. Vol. 715, 477.
15. Melnick M. B., and Thurow B. S. Comparison of large-scale three-dimensional features in zero and adverse-pressure gradient turbulent boundary layers // *AIAA J*. 2015. Vol. 53, 3686.
16. Kiselev N. A., Leontiev A. I., Vinogradov Yu. A., Zditovets A. G., Popovich S. S. Heat transfer and skin-friction in a turbulent boundary layer under an non-equilibrium longitudinal adverse pressure gradient // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2021. Vol. 89, 108801.
17. Лущик В. Г., Макарова М. С. Численное исследование турбулентного пограничного слоя с положительным градиентом давления // *Изв. РАН. МЖГ*. 2022. № 3. С. 102–114.
18. Лущик В. Г., Макарова М. С. Коэффициент аналогии Рейнольдса в пограничном слое на пластине. Влияние молекулярного числа Прандтля, вдува (отсоса) и продольного градиента давления // *Тепловые процессы в технике*. 2017. Т. 9. № 11. С. 482–488.
19. Лущик В. Г., Макарова М. С., Решмин А. И. Ламинаризация потока при течении с теплообменом в плоском канале с конфузуром // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 1. С. 68–77.
20. Лущик В. Г., Макарова М. С., Медведцкая Н. В., Решмин А. И. Численное исследование течения и теплообмена в плоских каналах переменного сечения // *Тепловые процессы в технике*. 2019. Т. 11. № 9. С. 386–394.
21. Лущик В. Г., Решмин А. И., Тепловодский С. Х., Трифионов В. В. Численное моделирование течения и теплообмена в плоском конфузуре // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2024. Т. 25, вып. 1. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-1/articles/1082/>
22. Лущик В. Г., Решмин А. И. Численное моделирование ламинаризации течения в каналах с отрицательным градиентом давления // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2024. Т. 25, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-4/articles/1121/>
23. Лущик В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1988. № 6. С. 42–50.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 711 с.
25. Лущик В. Г., Павельев А. А. Решмин А. И., Якубенко А. Е. Влияние граничных условий на переход к турбулентности в пограничном слое на пластине при большом уровне внешних возмущений // *Изв. РАН. МЖГ*. 1999. № 6. С. 111–119.

References

1. Ginevskii A. S., Ioselevich V. A., Kolesnikov A. V., Lapin Yu. V., Pilipenko V. N., and Sekundov A. N., *Advances in Science and Engineering*, All-Union Institute of Science and Technical Information. Fluid Mech. Series, 1978, Moscow, vol. 11, pp. 155–304 [in Russian].
2. Ievlev V. M., *Turbulent motion of high-temperature continuous media*, Moscow, Nauka, 1975, 256 p. [in Russian].
3. Avduevsky V. S., Method for calculating the spatial turbulent boundary layer in a compressible gas, *News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics and mechanical engineering*, 1962, no 4, pp. 3–12 [in Russian].
4. Kutateladze S. S., Leontyev A. I., *Heat and mass transfer and friction in a turbulent boundary layer*, Moscow, Energy, 1972. 342 p. [in Russian].
5. Kovalev V. I., Lushik V. G., Sizov V. I., Yakubenko A. E., Three-parameter turbulence model: numerical study of the boundary layer in a curtain-cooled nozzle, *Fluid Dynamics*, 1992, vol. 27, pp. 35–42 [in Russian].

6. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Three-parameter model of shear turbulence, *Fluid Dynamics*, 1978, vol. 13, no 3, pp. 350–360 [in Russian].
7. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A.E., Three-parameter turbulence model: heat transfer calculation, *Fluid Dynamics*, 1986, vol. 21, no 2, pp. 200–211 [in Russian].
8. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Turbulent flows. Models and numerical studies (review), *Fluid Dynamics*, 1994, vol. 29, no 4, pp. 440–457 [in Russian].
9. Lushchik V. G., Yakubenko A. E., Comparative analysis of turbulence models for calculating the wall boundary layer, *Fluid Dynamics*, 1998, no. 33, pp. 36–47. <https://doi.org/10.1007/BF02698159>
10. Lushchik V. G., Yakubenko A. E., Supersonic Boundary Layer on a Plate. Comparison of Calculation with Experiment, *Fluid Dynamics*, 1998, no 33, pp. 864–875. <https://doi.org/10.1007/BF02698655>
11. Clauser F. H., Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1954, vol. 21. pp. 91–108. <https://doi.org/10.2514/8.2938>
12. Monty J. P., Harun Z, and Marusic I, A parametric study of adverse pressure gradient turbulent boundary layers, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2011, vol. 32, no 3, pp. 575–585. DOI:10.1016/j.ijheatfluidflow.2011.03.004
13. Araya G and Castillo L, Direct numerical simulations of turbulent thermal boundary layers subjected to adverse streamwise pressure gradients, *Phys. Fluids*, 2013, vol. 25, DOI:10.1063/1.4820816
14. Harun Z., Monty J. P., Mathis R., and Marusic I., Pressure gradient effects on the large-scale structure of turbulent boundary layers, *Journal of Fluid Mechanics*, 2013, 715: pp. 477–498. DOI:10.1017/jfm.2012.531
15. Melnick M. B. and Thurow B. S., Comparison of large-scale three-dimensional features in zero and adverse-pressure gradient turbulent boundary layers, *AIAA J.* 2015, vol. 53. DOI:10.2514/1.J054049
16. Kiselev N. A., Leontiev A. I., Vinogradov Yu. A., Zditovets A. G., Popovich S. S., Heat transfer and skin-friction in a turbulent boundary layer under anon-equilibrium longitudinal adverse pressure gradient, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2021, vol. 89, 108801. DOI:10.1016/j.ijheatfluidflow.2021.108801
17. Lushchik V. G., Makarova M. S., Numerical study of turbulent boundary layer with positive pressure gradient, *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, no 3, pp. 328–340. <https://doi.org/10.1134/S0015462822030119>
18. Lushchik V. G., Makarova M. S., Reynolds Analogy Coefficient in a Boundary Layer on a Plate. Effect of Prandtl Molecular Number, Injection (Suction) and Streamwise Pressure Gradient, *Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no 11, pp. 482–488 [in Russian].
19. Lushchik V. G., Makarova M. S., Reshmin A. I., Flow laminarization during flow with heat exchange in a flat channel with a confuser, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no 1, pp. 67–76.
20. Lushchik V. G., Makarova M. S., Medvetskaya N. V., Reshmin A. I. Numerical study of flow and heat transfer in flat channels of variable cross-section, *Thermal processes in engineering*, 2019, vol. 11, no 9, pp. 386–394 [in Russian].
21. Lushchik V. G., Reshmin A. I., Teplovodskii S. Kh, Trifonov V. V., Numerical Modeling of Flow and Heat Transfer in a Flat Confuser, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2024, vol. 25, issue 1, [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-1/articles/1082/>
22. Lushchik V. G., Reshmin A. I., Numerical Modeling of Flow Laminarization in Channels with a Negative Pressure Gradient, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2024, vol.25, issue 4, [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-4/articles/1121/>
23. Lushchik V.G., Pavel'ev A.A., Yakubenko A.E., Transfer equation for turbulent heat flow. Calculation of heat transfer in a pipe, *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, no 6, pp. 835–842 [in Russian].
24. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1979, 711 p.

25. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Reshmin A. I., Yakubenko A. E., The influence of boundary conditions on the transition to turbulence in the boundary layer on a plate at a high level of external disturbances, *Fluid Dynamics*, 1999, vol. 34, no 6, pp. 867–873 [in Russian]/

Статья поступила в редакцию 14 января 2025 г.