

The Reynolds Analogy Factor in a Compressible Turbulent Boundary Layer on a Cooled Wall

V. G. Lushchik, A. I. Reshmin, A. D. Chicherina

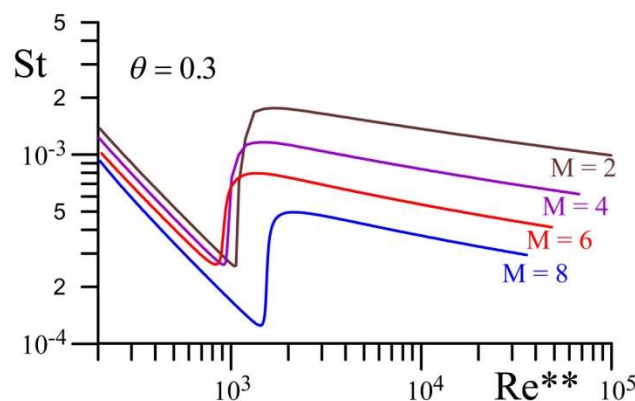
*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russia*

vgl_41@mail.ru, alexreshmin@rambler.ru, chicherina@imec.msu.ru

Abstract

A compressible turbulent boundary layer in a supersonic flow on a cooled wall has been numerically studied using a three-parameter differential RANS turbulence model. The study was carried out for a number of values of the Mach number (from 2 to 8) and a number of values of the temperature factor (from 0.2 to 0.8). Using the results of calculations of the flow and heat transfer characteristics, the dependences of the Reynolds analogy coefficient on the Mach number and the temperature factor are obtained.

Keywords: RANS model of turbulence, Mach number, temperature factor, coefficient of friction, Stanton number, Reynolds analogy factor.



Calculated values of the Stanton number as a function of the Reynolds number for the thickness of the momentum loss Re^{**} for the temperature factor $\theta = 0.3$ and the Mach numbers $M = 2 \div 8$ for a compressible turbulent boundary layer in a supersonic flow on a cooled wall

УДК 532.526.3

Коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое на охлаждаемой стенке

В. Г. Лущик, А. И. Решмин, А. Д. Чичерина

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский проспект д. 1*

vgl_41@mail.ru, alexreshmin@rambler.ru, chicherina@imec.msu.ru

Аннотация

С помощью трехпараметрической дифференциальной RANS-модели турбулентности выполнено численное исследование турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа на охлаждаемой стенке. Исследование проведено для ряда значений числа Маха (от 2 до 8) и ряда значений величины температурного фактора (от 0.2 до 0.8). С использованием полученных в расчетах характеристик течения и теплообмена найдены зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от числа Маха и температурного фактора.

Ключевые слова: RANS-модель турбулентности, число Маха, температурный фактор, коэффициент трения, число Стантона, коэффициент аналогии Рейнольдса.

1. Введение

В инженерной практике при расчете теплообмена на охлаждаемых элементах конструкций для определения теплового потока в стенку (числа Стантона St) используют аналогию Рейнольдса и вводят соответствующий коэффициент, который для пограничного слоя на пластине записывается в виде

$$K_{Re} = \frac{2St_x}{c_f},$$

где $St_x = \frac{q_w x}{\lambda_w (T_{aw} - T_w) Pr Re_x}$ – число Стантона, определенное по длине пластины x ;

$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_1 u_1^2}$ – коэффициент поверхностного трения на пластине. Число Рейнольдса

$Re_x = \frac{\rho_1 u_1 x}{\eta_1}$ в выражении для St_x определено по параметрам в набегающем потоке (индекс

1) и длине пластины; T_w и λ_w – температура и коэффициент теплопроводности в пограничном слое у стенки (индекс w); $T_{aw} = T_1 \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)$ – температура теплоизолированной стенки; r – коэффициент восстановления и γ – показатель адиабаты для воздуха приняты равными $r = Pr^{1/3}$ и $\gamma = 1.4$.

При расчете числа Стантона через коэффициент аналогии Рейнольдса и коэффициент трения следует отметить, что коэффициент трения c_f практически не зависит от числа

Прандтля Pr и может быть рассчитан по известным зависимостям от чисел Рейнольдса Re и Маха M .

Число St зависит от температуры стенки, поэтому в число определяющих параметров, от которых зависит K_{Re} , кроме чисел Re , M и Pr , войдет безразмерная температура охлаждаемой стенки $\theta = T_w/T_{aw}$ – температурный фактор.

Обзор методов расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке представлен в [1]. В инженерной практике распространены интегральные методы расчета [2–4], основанные на использовании соотношений импульса и энергии, замкнутых алгебраическими зависимостями для коэффициента трения, формпараметра и числа Стантона. В [2, 3] разработаны методики расчета турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковых потоках применительно к соплам жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) с экстремальными температурами, давлением и числами Маха.

Ограничение интегральных методов расчета связано с необходимостью использования информации о профилях скорости и температуры и неуниверсальностью при изменении граничных условий, связанных с тепловым режимом стенки. Все это было причиной перехода к дифференциальным методам расчета, обзор которых также содержится в [1].

Для расчета пограничных слоев в сверхзвуковых потоках с переменным числом Маха, например в соплах [5], на основе RANS-модели турбулентности [6, 7] разработана методика, которая прошла проверку для задач дозвукового течения и теплообмена в пограничных слоях и каналах [8]. Сравнительный анализ метода интегральных соотношений, алгебраической и группы дифференциальных моделей турбулентности, проведенный в [9], показал, что модель турбулентности [6, 7] по результатам расчета пограничных слоев в соплах ЖРД не уступает лучшим дифференциальным моделям турбулентности, а по возможностям учета внешних воздействий превосходит их.

Для верификации RANS-модели турбулентности [6, 7] в сверхзвуковом потоке в [10] проведены расчеты пограничного слоя на пластине, которые показали удовлетворительное согласование с известными экспериментальными данными по интегральным и локальным характеристикам течения и теплообмена в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса и Маха.

С использованием RANS-модели турбулентности [6, 7] в [11] проведено численное исследование сжимаемого турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке с положительным и отрицательным градиентом давления, который был реализован за счет изменения числа Маха набегающего потока по длине пластины. Исследование проведено для ряда значений входного числа Маха (от 1 до 3) и двух значений величины температурного фактора (0.5 и 1.5). С использованием результатов расчетов характеристик течения и теплообмена получены зависимости коэффициента аналогии Рейнольдса от параметра градиента давления.

Целью настоящей работы является численное исследование динамического и теплового турбулентного пограничного слоя в потоке сжимаемого газа на охлаждаемой стенке в широком диапазоне чисел Маха и температурного фактора.

2. Постановка задачи

Для расчета течения и теплообмена в сверхзвуковом сжимаемом турбулентном пограничном слое с заданным градиентом давления использовалась система уравнений неразрывности, движения и энергии [2].

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \tau \right), \quad (1)$$

$$c_p \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + c_p \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho q_t \right) + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \rho \tau \frac{\partial u}{\partial y}$$

Здесь x – координата, направленная вдоль пластины; y – координата, отсчитываемая по нормали к пластине; u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно; p – давление; $\rho\tau = -\rho\langle u'v' \rangle$ – турбулентное трение; ρ – плотность; η – динамическая вязкость.

Для определения входящего в уравнение движения (1) турбулентного трения $\rho\tau$ использовалась трехпараметрическая дифференциальная модель турбулентности [6], обобщенная на течения с теплообменом [7]. Модель включает уравнения переноса для напряжения сдвига $\tau = \langle u'v' \rangle$, энергии турбулентности $E = 0.5\sum\langle u_i'^2 \rangle$ и параметра $\omega = E/L^2$, предложенного А.Н. Колмогоровым, имеющего физический смысл квадрата завихренности турбулентности и содержащего поперечный интегральный масштаб турбулентности L .

Для определения входящего в уравнение энергии турбулентного потока тепла $q_t = -c_p\langle v'T' \rangle$ используется полученное в [12] уравнение переноса для этой величины. Эти уравнения для сжимаемого турбулентного пограничного слоя приведены в [6, 7, 12].

Система уравнений неразрывности, движения энергии и модели турбулентности решалась при следующих граничных условиях.

– На стенке ($y=0$):

$$u = v = 0, \quad T = T_w(x), \quad E = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \quad \tau = 0, \quad q_t = 0 \quad (2)$$

Граничное условие (2) принималось для заданной температуры стенки T_w , в качестве безразмерного критерия которой использовался температурный фактор. Для сверхзвукового пограничного слоя температурный фактор принимался в виде $\theta = T_w/T_{aw}$.

– На внешней границе пограничного слоя ($y = \delta(x)$):

$$E = E(x), \quad \omega = \omega(x), \quad \tau = 0, \quad u = u_1(x), \quad T = T_1(x), \quad q_t = 0 \quad (3)$$

Здесь $u = u_1$, $T = T_1$, – скорость и температура набегающего потока, а функции $E(x)$ и $\omega(x)$ описывают изменение уровня турбулентности в потоке. Величина $\delta(x)$ в граничном условии (3) выбирается из условия равенства расстоянию от стенки при значении скорости, равной 99 % от скорости набегающего потока.

В начальном сечении ($x=0$) задавался пограничный слой с ламинарным (по Блазиусу) профилем скорости u/u_1 и температурой $(T - T_1)/(T_1^* - T_1) = 1 - (u/u_1)^2$. Принималось, что $\tau(y) = q_t(y) = 0$, а профили функций $E(y)$, $\omega(y)$ задавались постоянными по сечению. Интенсивность турбулентности набегающего потока на входе $e_0 = \sqrt{E_0}/u_1 = 0.01$. Масштаб турбулентности L_0 в начальном сечении слабо влияет на результаты расчетов, поэтому число Рейнольдса по этой величине было принято достаточно большим ($Re_L = \rho_1 u_1 L_0 / \eta_1 = 10^5$) и при проведении расчетов не менялось.

В качестве теплоносителя использовался воздух с термодинамической температурой $T_1 = 100$ К. Теплофизические свойства воздуха (ρ , η , λ , c_p) в зависимости от температуры и давления задавались в табличном виде.

3. Результаты расчета

В качестве расчетной модели рассматривалась пластина с температурой поверхности T_w , определяемой из задаваемого температурного фактора $\theta = T_w/T_{aw}$, в котором температура адиабатной (теплоизолированной) стенки T_{aw} рассчитывалась по числу Маха набегающего потока M_1 . Длина пластины была выбрана достаточной для прохождения ламинарно-турбулентного перехода и установления развитого турбулентного режима течения.

На рис. 1 для ряда чисел Маха представлено изменение в зависимости от числа Рейнольдса $Re^{**} = \rho_1 u_1 \delta^{**} / \eta_1$ по толщине потери импульса δ^{**} величин коэффициента трения (а) и числа Стантона (б), входящих в определение коэффициента аналогии Рейнольдса $K_{Re} = 2St_x / c_f$. Как видно из рис. 1, а, коэффициент трения уменьшается по длине пластины, но в меньшей степени, чем число Стантона (рис. 1, б). Это уменьшение возрастает с ростом числа Маха по сравнению с зависимостями Никурадзе для турбулентного режима течения

$$c_f = 0.0148 \times Re^{** - 0.182}, \quad St_x = c_f / 2 \cdot Pr^{-3/4}, \quad K_{Re} = 2St_x / c_f = Pr^{-3/4} \quad (4)$$

и Блазиуса для ламинарного режима течения несжимаемой жидкости (см. в [13])

$$c_f = 0.441 / Re^{**}, \quad St_x = c_f / 2 \cdot Pr^{-2/3}, \quad K_{Re} = 2St_x / c_f = Pr^{-2/3} \quad (5)$$

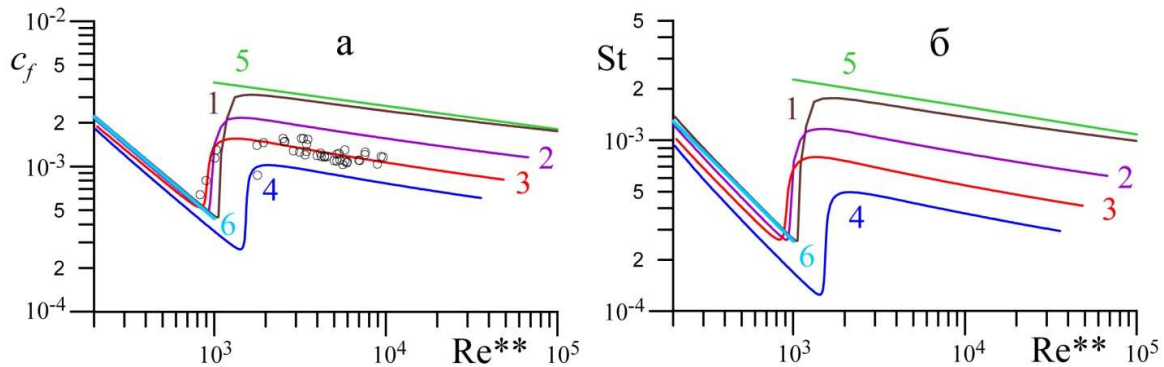


Рис. 1. Изменение коэффициента трения (а) и числа Стантона (б) в зависимости от числа Рейнольдса по толщине потери импульса Re^{**} для чисел Маха $M=2, 4, 6, 8$ (линии 1–4 соответственно при значении температурного фактора $\theta=0.3$; точки – экспериментальные данные [14] для $\theta \approx 0.3$ и чисел Маха $M=5.9 \div 7.7$; линия 5 – турбулентный режим течения (4), 6 – ламинарный режим (5))

Для верификации полученных результатов численного исследования проведено сравнение расчетной зависимости коэффициента трения $c_f(Re^{**})$ при значении температурного фактора $\theta=0.3$ для числа Маха $M=6$ (рис. 1, а, линия 3) с экспериментальными данными [14] для $\theta \approx 0.3$ и чисел Маха $M=5.9 \div 7.7$ (рис. 1, а, точки). Как видно из рис. 1, а, согласование расчетных и экспериментальных данных вполне удовлетворительное, также как и для формпараметра H (см. рис. 2).

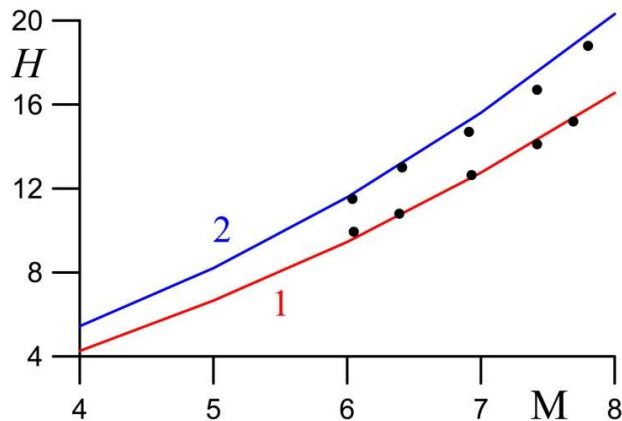


Рис. 2. Изменение формпараметра $H = \delta^* / \delta^{**}$ в зависимости от числа Маха M для двух значений температурного фактора: $\theta=0.3$ – линия 1, $\theta=0.5$ – линия 2; точки – экспериментальные данные [14] для $\theta \approx 0.3$ и $\theta \approx 0.5$

Изменение коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} в зависимости от числа Рейнольдса по толщине потери импульса Re^{**} для значения температурного фактора $\theta = 0.3$ приведено на рис. 3. Как видно, величина K_{Re} после перехода от ламинарного режима течения к турбулентному (при $Re^{**} > 2 \times 10^3$) остается практически постоянной для каждого из рассмотренных чисел Маха. Отметим, что при этом коэффициент трения и число Стантона (см. рис. 1) существенно уменьшаются с ростом числа Рейнольдса Re^{**} .

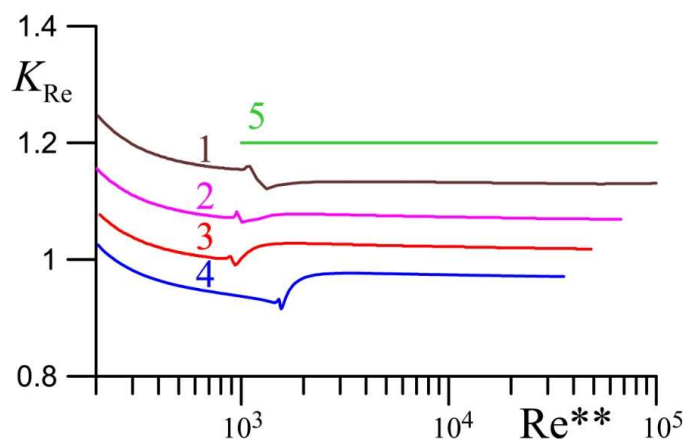


Рис. 3. Изменение коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} в зависимости от числа Рейнольдса по толщине потери импульса Re^{**} для чисел Маха $M=2, 4, 6, 8$ (линии 1–4 соответственно) при значении температурного фактора $\theta=0.3$; линия 5 – турбулентный режим течения (4) для дозвукового пограничного слоя

Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях температурного фактора ($\theta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$). Это позволило представить полученные результаты численного исследования в виде зависимостей коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} при $Re_x = 10^8$ от числа Маха (рис. 4, а) для ряда значений температурного фактора и от температурного фактора (рис. 4, б) для ряда значений числа Маха.

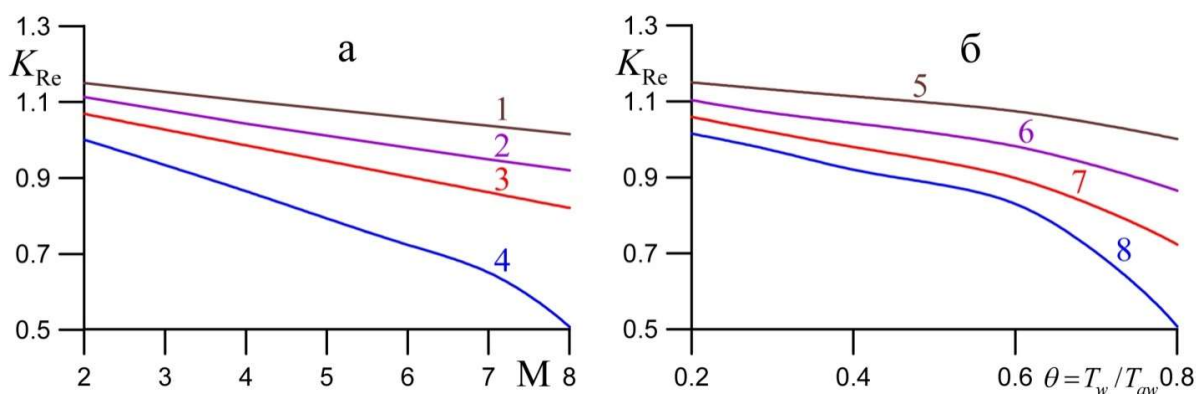


Рис. 4. Изменение коэффициента аналогии Рейнольдса K_{Re} в зависимости от числа Маха M (а) для значений температурного фактора $\theta=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (линии 1–4 соответственно) и температурного фактора θ (б) для значений числа Маха $M=2, 4, 6, 8$ (линии 5–8 соответственно)

Как видно из рис. 4, коэффициент аналогии Рейнольдса $K_{Re} = 2St/c_f$ уменьшается с ростом числа Маха M и температурного фактора θ , что свидетельствует о существенном снижении теплоотдачи (числа Стантона, рис. 1, б) по сравнению с менее значительным уменьшением коэффициента трения c_f (рис. 1, а), что является следствием влияния величин M и θ на характеристики турбулентности пограничного слоя.

Это подтверждают представленные на рис. 5 расчетные профили интенсивности турбулентности $e^+(y^+)$, где $e^+ = \sqrt{E}/u^*$, в зависимости от универсальной координаты $y^+ = yu^*(\rho/\eta)_w$, где $u^* = \sqrt{\tau_w}/\rho_w$ – динамическая скорость, $\tau_w = (\eta \partial u/\partial y)_w$ – трение на стенке.

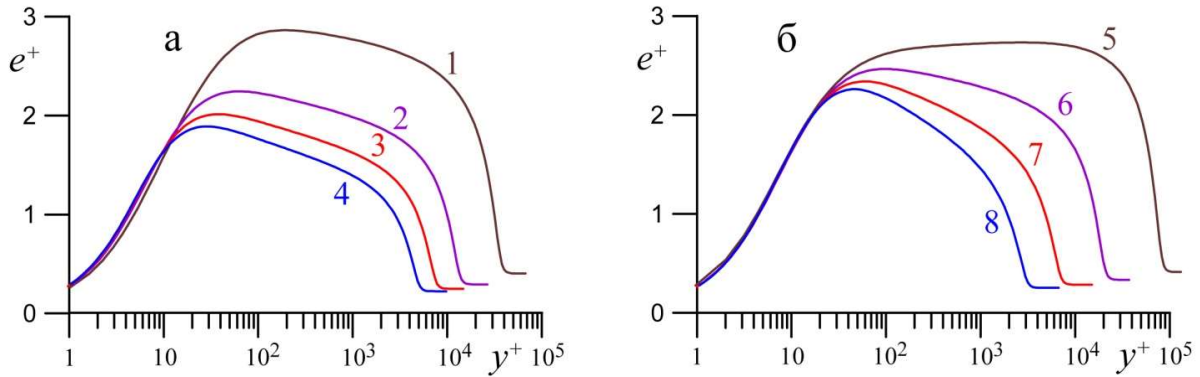


Рис. 5. Расчетные профили интенсивности турбулентности в пограничном слое при $Re_x = 10^8$, числе Маха $M = 4$ для значений температурного фактора $\theta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ (линии 1–4 соответственно) (а) и для значения температурного фактора $\theta = 0.3$ (б) при числах Маха $M = 2, 4, 6, 8$ (линии 5–8 соответственно)

Как видно из рис. 5, интенсивность турбулентности вблизи стенки (при $y^+ < 10$) практически не зависит от числа Маха и температурного фактора, тогда как во внешней части пограничного слоя (при $y^+ > 10$) с ростом температурного фактора и числа Маха интенсивность турбулентности снижается, следствием чего является уменьшение коэффициента аналогии Рейнольдса (см. рис. 4).

4. Заключение

С использованием трехпараметрической дифференциальной RANS-модели турбулентности проведено численное исследование сжимаемого турбулентного пограничного слоя на охлаждаемой стенке. Исследование проведено в диапазоне значений числа Маха $M = 2 \div 8$ и температурного фактора $\theta = 0.2 \div 0.8$.

Для верификации результатов численного исследования проведено сравнение расчетной зависимости коэффициента трения $c_f(Re^{**})$ и формпараметра H при значении температурного фактора $\theta = 0.3$ для числа Маха $M = 6$ с экспериментальными данными для $\theta \approx 0.3$ и чисел Маха $M = 5.9 \div 7.7$. Согласование расчетных и экспериментальных данных вполне удовлетворительное.

Проведенное численное исследование показало, что коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое уменьшается с ростом числа Маха и температурного фактора за счет существенного уменьшения числа Стантона по длине пластины и в меньшей степени уменьшения коэффициента трения. Это является следствием влияния числа Маха M и температурного фактора θ на характеристики турбулентности в сверхзвуковом потоке и подтверждается снижением интенсивности турбулентности по толщине пограничного слоя.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в рамках исследований, финансируемых госбюджетом (AAAA – A19-119012990115-5, AAAA – A19-119012990110-0).

Литература

1. Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В. и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техн. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ. 1978 Т. 11. С 155–304.
2. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
3. Авдудевский В.С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 4. С. 3–12.
4. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М.: Энергия. 1972. 342 с.
5. Ковалев В.И., Лущик В.Г., Сизов В.И., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: численное исследование пограничного слоя в сопле с завесным охлаждением // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 1. С. 48–57.
6. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель сдвиговой турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 3. С. 13–25.
7. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Трехпараметрическая модель турбулентности: расчет теплообмена // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 2. С. 40–52.
8. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Турбулентные течения. Модели и численные исследования (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.
9. Лущик В.Г., Якубенко А.Е. Сравнительный анализ моделей турбулентности для расчета пристенного пограничного слоя // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 1. С. 44–58.
10. Лущик В.Г., Якубенко А.Е. Сверхзвуковой пограничный слой на пластине. Сравнение расчета с экспериментом // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 64–78.
11. Лущик В.Г., Решмин А.И. Коэффициент аналогии Рейнольдса в сжимаемом турбулентном пограничном слое с градиентом давления // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2025. Т. 26, вып. 1. <https://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1170/>
12. Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е. Уравнение переноса для турбулентного потока тепла. Расчет теплообмена в трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 6. С. 42–50.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М: Наука, 1974. 711 с.
14. Хопкинс Е.Д., Кинер Е.Р., Полек Т.Е. Трение на поверхности и профили скорости в гиперзвуковом турбулентном пограничном слое на нетеплоизолированных плоских пластинах // Ракетная техника и космонавтика. 1972. Т. 10. № 1. С. 49–58.

References

1. Ginevskii A. S., Ioselevich V. A., Kolesnikov A. V., Lapin Yu. V., Pilipenko V. N., and Sekundov A. N., *Advances in Science and Engineering*. All-Union Institute of Science and Technical Information. Fluid Mech. Series. 1978, Moscow, vol. 11, pp. 155–304 [in Russian].
2. Ievlev V. M., *Turbulent motion of high-temperature continuous media*, Moscow, Nauka, 1975. 256 p. [in Russian].
3. Avdudovsky V. S., Method for calculating the spatial turbulent boundary layer in a compressible gas. *News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics and mechanical engineering*, 1962, no 4, pp. 3–12 [in Russian].
4. Kutateladze S. S., Leontyev A. I., *Heat and mass transfer and friction in a turbulent boundary layer*, Moscow, Energiya, 1972, 342 p. [in Russian].
5. Kovalev V. I., Lushik V. G., Sizov V. I., Yakubenko A. E., Tree-parameter turbulence model: numerical investigation of boundary layer in a nozzle with gas-film wall cooling, *Fluid Dynamics*, 1992, vol. 27, pp. 35–42. <https://doi.org/10.1007/BF01054170>

6. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Three-parameter model of shear turbulence, *Fluid Dynamics*, 1978, vol. 13, no 3, pp. 350–360. <https://doi.org/10.1007/BF01050525>
7. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Three-parameter model of turbulence: heat transfer calculations, *Fluid Dynamics*, 1986, vol. 21, no. 2, pp. 200–211. <https://doi.org/10.1007/BF01050170>
8. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Turbulent flows. Models and numerical investigation. A review, *Fluid Dynamics*, 1994, vol. 29, no 4, pp. 440–457.
9. Lushchik V. G., Yakubenko A. E., Comparative analysis of turbulence models for calculating a near-wall boundary layer, *Fluid Dynamics*, 1998, no 33, pp. 36–47. <https://doi.org/10.1007/BF02698159>
10. Lushchik V. G., Yakubenko A. E. A supersonic boundary layer on a plate. comparison between the calculation and experiment. *Fluid Dynamics*, 1998, no. 33, pp. 864–875. <https://doi.org/10.1007/BF02698655>
11. Lushchik V. G., Reshmin A. I., Reynolds Analogy Coefficient in a Compressible Turbulent Boundary Layer with a Pressure Gradient, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2025, vol. 26, iss. 1 [in Russian]. <https://chemphys.edu.ru/issues/2025-26-1/articles/1170/>
12. Lushchik V. G., Pavel'ev A. A., Yakubenko A. E., Transfer equation for turbulent heat flux. Calculation of heat exchange in a pipe, *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, no 6, pp. 835–842.
13. Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1979.
14. Hopkins E. J., Keener E. R., Polek T. E., Hypersonic turbulent skin-friction and boundary-layer profiles on nonadiabatic flat plates, *AIAA Journal*, 1972, vol. 10, no. 1, pp. 40–48.

Статья поступила в редакцию 30 января 2026 г.