

Obtaining and Regularizing of a Hexagonal Irregular Computational Grid

V. V. Kuzenov

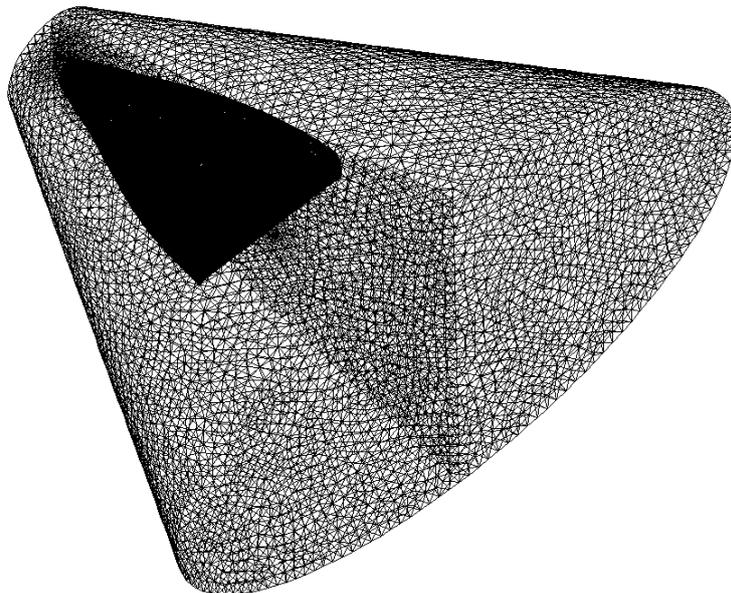
*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, 105005, Russia*

vik.kuzenov@gmail.com

Abstract

The paper proposes a method for transition from a tetrahedral to a hexagonal irregular computational grid. A variant of an elliptical grid «regularizer» has been developed, which is based on a «mechanical analogy» and is based on solving the linear equations of elasticity theory. A brief analysis of the advantages and disadvantages of irregular and regular grids has been performed. The initial results of rebuilding and «regularization» of the computational grid are presented, as well as the distribution of the «angular» criterion for assessing its quality.

Keywords: mathematical modeling, irregular computational grid, development of numerical methods



Hexagonal rearranged surface grid of the geometric model of the X -33 aircraft

УДК 621.039.05, 621.039.06, 539.1

Построение и регуляризация гексагональной нерегулярной расчетной сетки

В. В. Кузенов

*МГТУ им. Н.Э. Баумана,
Россия, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
vik.kuzenov@gmail.com*

Аннотация

В работе предложен способ перехода от тетраэдральной к гексагональной нерегулярной расчетной сетке. Разработан вариант эллиптического «регуляризатора» сетки, который основывается на «механической аналогии» и базируется на решении линейных уравнений теории упругости. Выполнен краткий анализ преимуществ и недостатков нерегулярных и регулярных сеток. Приведены первоначальные результаты перестроения и «регуляризация» расчетной сетки, а также распределение «углового» критерия оценки её качества.

Ключевые слова: математическое моделирование, нерегулярная расчетная сетка, разработка численных методов.

1. Введение

Для проведения математического моделирования аэротермодинамики летательных аппаратов (ЛА) необходимо описать геометрическую форму изучаемых элементов ЛА, определить их размеры и взаимное расположение, т.е. создать геометрическую модель ЛА. Построение таких моделей базируются на аналитической и дифференциальной геометрии, методах вычислительной математики. Усложняющей особенностью при построении геометрической модели летательных аппаратов является необходимость учета многосвязности областей, составляющих поверхность тела, наличия сопряжений между элементами поверхности. Такой тщательный учет особенностей формы поверхности связан с решением последующей задачи построения расчетных сеток высокого качества. Создание сложной модели поверхности ЛА таким способом представляет собой достаточно медленный, трудоемкий процесс и требует многократного редактирования модели поверхности. Для оптимизации конструкции и рабочих характеристик ЛА (имеющих сложную пространственную форму) целесообразно использовать комплекс вычислительных моделей.

Таким образом, важным моментом при численном решении уравнений механики сплошной среды является построение расчетной сетки в сложных двумерных и трехмерных областях Ω , которая представляет расчетную область Ω в виде отдельных конечных элементов (ячеек). Применительно к обсуждаемой задаче «сложными» называются расчетные области, на которые математические особенности решаемой задачи или численного метода накладывают некоторые дополнительные ограничения. Обычно эти ограничения имеют вид линий или поверхностей, которые не должны пересекаться ребрами расчетной сетки Ω_h .

В принципе можно рассматривать несколько способов получения гексагональной нерегулярной расчетной сетки, например:

1. на основе перестроения (до гексагональных) симплицеальных конечных элементов – треугольников в двумерном случае и тетраэдров в трехмерном;

- использование гибридных неструктурированных блочно-тетраэдральных расчетных сеток. Для этого в качестве начального приближения используется равномерное разбиение области на прямоугольные ячейки размера D_s , а граница расчетной области Ω представляется в виде кусочно-гладкого контура $\partial\Omega$, состоящего из криволинейных отрезков, аппроксимируемых кривыми Безье.

В первом случае построение нерегулярной гексагональной сетки происходит последовательно в несколько этапов: построение геометрической модели, расстановка граничных узлов (или триангуляция поверхности, ограничивающей расчетную область Ω), инициализация тетраэдральной объемной расчетной сетки и её перестроение в гексаэдральную, а также последующая коррекция («регуляризация») гексаэдральной сетки. Для проведения перестроения сетки в «центр масс» каждой грани и в сам тетраэдральный конечный элемент вводятся дополнительные узлы. При таком способе перестроения расчетной сетки требуется дополнительный этап её «оптимизации» (улучшения – «регуляризации») с оценкой её качества. Время, затрачиваемое на проведение расчетов на нерегулярных сетках, заметно больше по сравнению с расчетами на структурированных сетках. Так как в этом случае необходимо хранить в памяти вычислительного устройства всю информацию о структуре расчетных ячеек и многократно выполнять поиск её отдельных элементов. Таким образом, неструктурированные расчетные сетки порождают нерегулярный доступ к памяти в процессе численного решения задачи. В результате производительность программных реализаций решаемых уравнений (для сеток данного типа) оказывается, ограничена не только числом выполняемых в единицу времени арифметических операций (compute-bound), а пропускной способностью памяти (memory-bound). Отметим также, что качество начальной сетки напрямую влияет на качество получаемой расчетной сетки Ω_h , а в некоторых случаях даже на самую возможность ее построения. Поэтому необходима проверка начальной сетки на предмет самопересечений, удаление «двойных» узлов, определение списка граней для измельчения (грани на узких участках сетки, грани большой площади и т. д.) и дробление таких граней на четырехугольники, переход к плоским граням и т.д.

Однако неструктурированные сетки имеют одно важное преимущество: они позволяют произвольным образом расположить узлы сетки в геометрически сложной физической области. Эта особенность обуславливает основное преимущество неструктурированных сеток по сравнению с регулярными сетками, которое заключается в большей гибкости при дискретизации физической области сложной геометрической формы. Процесс построения неструктурированной сетки в области сложной пространственной формы происходит во много раз быстрее по сравнению с регулярным случаем (в этом случае часто необходимо использовать многоблочный вариант метода построения сетки). Произвольность расположение узлов сетки следует понимать в том смысле, что отсутствуют сеточные направления и нет структуры сетки, подобной структурированным сеткам.

Наиболее предпочтительным при решении задач механики сплошной среды является второй способ, основанный на квазиструктурированных расчетных сетках. При использовании квазиортогональной структурированной сетки близки к нулю (уменьшается погрешность аппроксимации) некоторые параметры преобразования – компоненты метрического тензора преобразования (матрицы Якоби), находящиеся не на главной диагонали тензора преобразования.

В целом для обоих осуждаемых способов создания нерегулярной расчетной сетки к пространственным размерам и форме конечных элементов предъявляются определенные требования, так как они существенно влияют на ошибку аппроксимации и скорость сходимости используемых численных методов. Определенную проблему также представляет импорт геометрии границ расчетной области Ω , проверка корректности расчетной сетки Ω_h , проблема её визуализации и оценки качества [1–4].

2. Создание гексагональной нерегулярной расчетной сетки

Далее рассматривается следующий способ получения гексагональной нерегулярной расчетной сетки: на основе перестроения (до гексагональных) симплицальных конечных элементов – треугольников в двумерном случае и тетраэдров в трехмерном. Предлагаемый подход к «регуляризации» гексагональной расчетной сетки Ω_h позволяет в случае моделирования на неструктурированной сетке термодеоформаций или течений газа (плазмы), учитывающего движения жестких границ $\partial\Omega$ (эта граница может, представляется в виде кусочно-гладкого контура или поверхностей, аппроксимируемых соответственно кривыми Безье или NURBS поверхностями) расчетного объема Ω или течений со свободными границами подстраивать расчетную сетку Ω_h под положения границ, меняющихся с течением времени. Очевидно, что такой способ деформирования сетки основан на использовании существующей (до деформирования) связанности узлов расчетной сетки Ω_h . При этом главная трудность деформируемых неструктурированных сеток Ω_h состоит в сохранении качества деформированной сетки внутри расчетной области Ω (например: необходимо обеспечить положительность объемов конечных элементов деформированной сетки).

В данной работе вариант эллиптического «регуляризатора» сетки основывается на «механической аналогии» и базируется на решении линейных уравнений теории упругости (1), описывающих деформацию неограниченной упругой среды, к малому участку которой приложена сила F (задача W. Thomson) [5]

$$\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) = -\frac{2(1+\sigma)}{E} F \delta(\vec{r}), \quad (1)$$

где $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, а начало системы координат выбрано в точке приложения силы F ; $\vec{u} = \vec{r}^* - \vec{r}$ – вектор деформации (или вектором смещения); \vec{r}^*, \vec{r} – радиусы векторы узлов расчетной сетки Ω_h после и до её деформации; σ – коэффициент Пуассона; $E = 2(1+\sigma)\mu$ – модуль растяжения (модуль Юнга); μ – модуль сдвига (можно положить $\mu \approx 1$).

Отметим, что коэффициент Пуассона σ , который характеризует отношение поперечной деформации к продольной, в физической области изменения параметров для различных веществ может изменяться только в пределах от -1 до $1/2$. Таким образом, область физических (напомним, что здесь уравнения теории упругости применяются для решения задачи не имеющей физического смысла: «регуляризации» гексагональной расчетной сетки Ω_h) изменений коэффициента Пуассона располагается $-1 \leq \sigma \leq 1/2$. Коэффициент Пуассона σ заметно влияет на форму расчетной сетки Ω_h . Большее значение коэффициента σ приводит к деформациям, похожим на деформацию резины ($\sigma \sim 0.9$) и значит, коэффициент Пуассона для этих целей может принимать диапазон значения $\sigma \in [1/2, \infty)$. При $\sigma \rightarrow \infty$ уравнения теории упругости приобретут более простую форму: $\Delta \vec{u} = -F \delta(\vec{r})$.

Аналитическое решение данной задачи приведено в работе [5], [6] и определяется выражением (2)

$$\vec{u} = \frac{\Phi}{|\vec{r}|}, \quad \Phi = \frac{(1+\sigma)}{8\pi E(1-\sigma)} \left[(3-4\sigma) \vec{F} + \vec{n}(\vec{n}\vec{F}) \right], \quad (2)$$

где \vec{n} – единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора \vec{r} ; $(\vec{n}\vec{F})$ – скалярное произведение единичного вектора \vec{n} и силы \vec{F} .

В дальнейшем для упрощения описания введены дополнительные обозначения: ребро, соединяющее узлы i и j , обозначим через (i, j) , а грань расчетной сетки Ω_h , образованную узлами i, j и k обозначим через (i, j, k) .

Соотношение $\vec{u} = \Phi/|\vec{r}|$ позволяет (если известно значение силы \vec{F}_i в узле i) определить вектор смещения \vec{u}_j во всех узлах j , связанных с узлом i через ребра (i, j) или смещение \vec{u}_i в узле i . То есть найти смещение \vec{u} от действия сил \vec{F}_j точка приложения (узлы j) которых располагается на поверхности S_i , находящейся от узла i на расстоянии длины ребра $|\vec{r}_{ij}|$, связанного с узлом i . Отсюда имеем следующее выражение:

$$\langle \vec{u} \rangle = \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\Phi_j}{|\vec{r}_{ij}|} \approx \int_{S_i} \frac{\Phi}{|\vec{r}|} ds$$

Тогда приближенное значение смещения \vec{u}_i можно определить следующим образом:

$$\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\Phi_j}{|\vec{r}_{ij}|} \approx \int_{S_i} \frac{\Phi}{|\vec{r}|} ds \left\langle \frac{1}{|\vec{r}|} \right\rangle,$$

где $\langle 1/|\vec{r}| \rangle = \int_{S_i} \frac{1}{|\vec{r}|} ds$; N_i – число ребер, связанных с узлом i .

Предложенный в работе способ (эллиптической «регуляризации» сетки (2)) является универсальным с точки зрения используемой в нем формы (вида) сил \vec{F} и типа конечного элемента (гексагональный, тетраэдральный и т.д.).

Так, например, для определения сил \vec{F} , действующих на узлы расчетной сетки Ω_h можно воспользоваться результатами работы [7]. В этом случае главная идея метода опирается на «электростатическую аналогию» и состоит в том, что узлы будущей сетки это одноименно заряженные частицы, с зарядами q_i , имеющие массу m_i . Заряженные частицы взаимодействуют между собой. Силы взаимодействия имеют электрическую природу и отталкивающая сила \vec{F}_{ij} , действующая на i -ю частицу (узел i) со стороны j -й частицы (узел j) пропорциональна расстоянию между зарядами. Равнодействующая сил межчастичного взаимодействия можно представить в виде [7]

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}, \quad \vec{F}_{ij} = -C \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_{ij}|^k} \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad k \geq 1, \quad |\vec{r}_{ij}| = \ell$$

Здесь ℓ – длина радиус-вектора или расстояние между зарядами; C – постоянная нормировки. Для предлагаемого метода важно, что кроме силы кулоновского взаимодействия \vec{F}_i на частицы действуют силы сопротивления $\vec{F}_{fr,i}$, которые определяются их скоростью и имеют направление противоположное вектору скорости (3)

$$\vec{F}_{fr,i} = -K \frac{|V_i|^m}{|V_i|} \vec{V}_i, \quad m \geq 2 \quad (3)$$

Можно также применить результаты работы [8]. В ней предложен метод генерации тетраэдральной расчетной сетки Ω_h , в котором узлы сетки рассматриваются, как взаимодействующие атомарные частицы («молекулярно-динамическая аналогия»). Такой подход к генерации сетки начинается с определения функции потенциальной энергии системы φ . Обычно наиболее важной частью потенциала φ является парный потенциал $\phi(|\vec{r}_{ij}|)$, который зависит только от расстояния $|\vec{r}_{ij}|$ между двумя частицами [8], [9]. Учитывая только парный потенциал $\phi(|\vec{r}_{ij}|)$, потенциальная энергия системы φ может быть представлена как

$\varphi = \sum_i \sum_{j>i} \phi(|\vec{r}_{ij}|)$, где $\phi(|\vec{r}_{ij}|)$ – парный потенциал, который может быть записан через потенциал Леннарда – Джонса $\phi(|\vec{r}_{ij}|) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{|\vec{r}_{ij}|} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{|\vec{r}_{ij}|} \right)^6 \right]$ (рис. 1), где σ , ε – подбираемые параметры при «регуляризации» сетки.

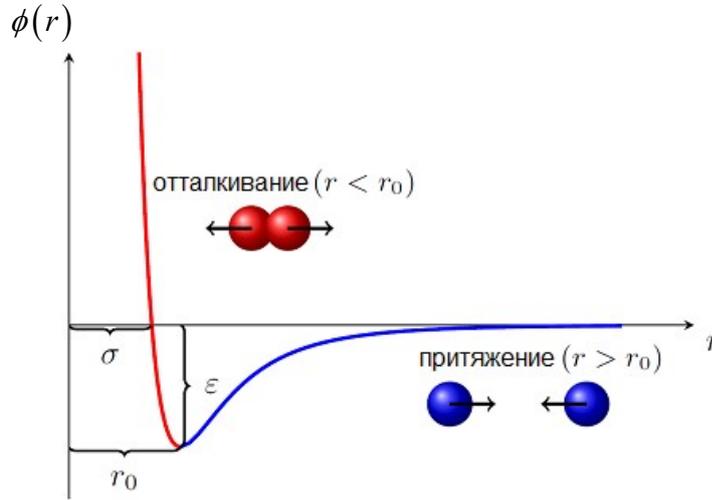


Рис. 1. Схематичное представление потенциала Леннарда – Джонса

Тогда парная сила \vec{F} , следующая из потенциала Леннарда – Джонса, будет иметь вид:

$$\vec{F}_i = -\nabla \phi(|\vec{r}_{ij}|) = -24\varepsilon \left[2 \left(\frac{\sigma}{|\vec{r}_{ij}|} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{|\vec{r}_{ij}|} \right)^6 \right] \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}$$

В рассматриваемой здесь работе для определения сил \vec{F} , действующих на узлы расчетной сетки Ω_h используется «механическая аналогия». В этом случае растягивающая или сжимающая сила, действующая на ребро (i, j) , представляется в виде аналога «силы Гука» [10]

$$\vec{F}_i = -\frac{\alpha(\ell_i - h_i)}{\max(\ell, h)} \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|},$$

где $h_i = (V_i)^{1/3}$; V_i – локальный объем гексагонального конечного элемента, приписываемый узлу i ; $\alpha \sim S_i$.

Для учета «кручения» ребер гексагонального конечного элемента относительно узла i вводятся дополнительные силы, присоединенные к каждому узлу расчетной сетки Ω_h и учитывающие возможное «кручение» ребер конечного элемента. Использование данной силы для «регуляризация» гексаэдральной сетки приводит к уменьшению в ней числа ячеек с малыми углами между гранями. Эти силы можно записать следующим образом [10]:

$$\vec{F}_i = -\frac{\beta(\ell_j - L_i)}{\max(\ell_j, L_i)} \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad L_i = (\ell_{in} + \ell_{im}) \cos(\pi/4), \quad \ell_j = |\vec{r}_{ij}|, \quad \beta \sim S_i,$$

где ℓ_{in} , ℓ_{im} – длины ребер (i, n) и (i, m) , начинающиеся из узла i и располагающиеся на грани (i, n, j, m) гексаэдрального конечного элемента; $\ell_j = |\vec{r}_{ij}|$ – расстояние между противоположащими узлами i и j , лежащими на грани (i, n, j, m) .

Учет адаптации расчетной сетки Ω_h к физическим особенностям рассматриваемой задачи осуществляется за счет введения в «силы Гука» дополнительных управляющих функ-

ций P^i . Так например (4), для адаптации расчетной сетки Ω_h в окрестности узла i силу \vec{F}_i можно записать в следующей форме [10]-[12]:

$$\vec{F}_i = \alpha P^i \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, P^i = b \cdot \text{sign}(\vec{r} - \vec{r}_i) \exp[-d|\vec{r} - \vec{r}_i|], \alpha \sim S_i, b > 0, d > 0 \quad (4)$$

В этой формуле константа $b > 0$ управляет интенсивностью сгущения, а $d > 0$ размером области сгущения. В случае, когда константа $b < 0$ отрицательная, происходит разрежение сетки вблизи узла i . Так как каждая произвольная кривая L или поверхность S образует множество точек в пространстве \mathbb{R}^3 ($L \subset \mathbb{R}^3$ или $S \subset \mathbb{R}^3$), то применение данной формулы к этому множеству точек (или S) позволяет адаптировать расчетную сетку Ω_h к соответствующей кривой L или поверхности S .

3. Построение неструктурированных блочно-тетраэдральных расчетных сеток

Как уже указывалось выше наиболее предпочтительными при решении задач сверхзвуковой аэродинамики являются структурированные расчетные сетки. Однако диапазон технических объектов, геометрию поверхности которых можно описать структурированными расчетными сетками, достаточно ограничен. Поэтому компромиссным вариантом может являться использование гибридных составных неструктурированных блочно-тетраэдральных расчетных сеток (multi-block structuring или zonal block).

Использование составных блочно-структурированных сеток предполагает формирование геометрии расчетной области с помощью представления её в виде группы блоков-примитивов гексаэдральной формы (рис. 2), в каждом из которых строится своя структурированная сетка, согласованная с сеткой Ω_h в соседних блоках. Реализация данного подхода требует, чтобы блоки-примитивы были состыкованы по границам друг с другом, а расчетная сетка, сформированная в каждом блоке, была объединена в единую неструктурированную сетку с общей нумерацией узлов (рис. 3).

В этом случае не требуется дополнительно создавать интерфейс стыковки: вспомогательный виртуальный блок, состоящий из двух приграничных слоев ячеек сетки каждого из стыкуемых блоков-примитивов. Важным отрицательным моментом в случае использования интерфейса стыковки является то, что в этих приграничных слоях необходимо проводить дополнительные (особым образом организованные) вычисления, связанные с определением потоков массы, импульса и энергии.

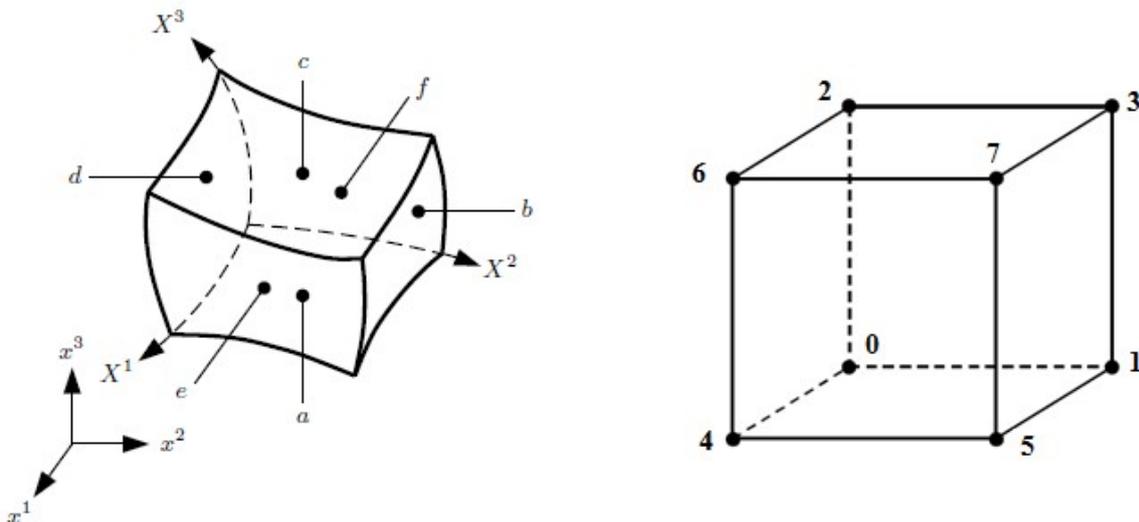


Рис. 2. Вид блока-примитива в сеточной области Ω_h

Первоначальным этапом построения блока-примитива (см. рис. 2) гексаэдральной формы (он ограничен шестью гладкими криволинейными поверхностями) является разработка способов математического описания геометрии криволинейных поверхностей граней. Для геометрического моделирования криволинейных поверхностей граней исходная информация о таком объекте наиболее часто представляется в виде набора опорных точек p_{ij} , описывающих эту поверхность. В зависимости от интерпретации этих точек, а также от требований к гладкости поверхности, методы геометрического моделирования сложных поверхностей можно разделить на три группы: интерполяционные поверхности, поверхности в форме Эрмита и Безье, B-сплайны и NURBS [13].

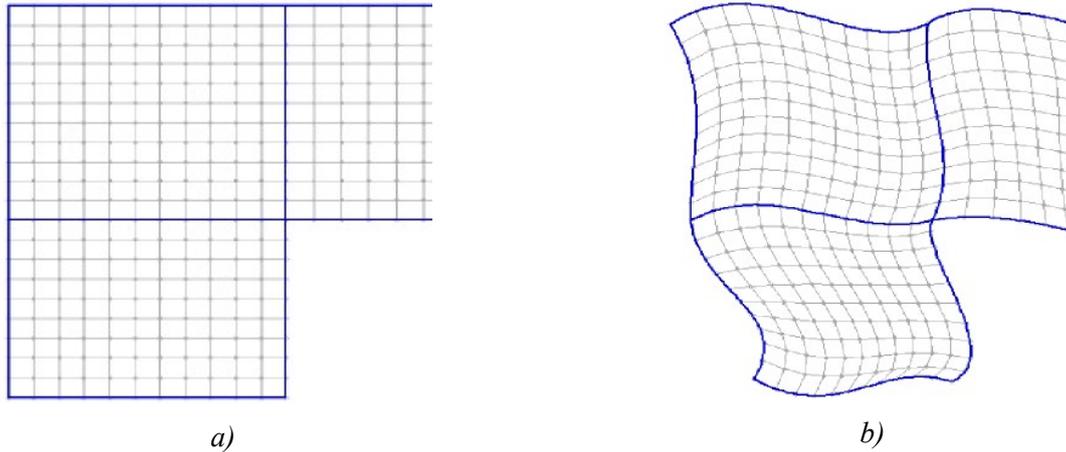


Рис. 3. Формирование вычислительной сетки из блоков-примитивов в расчетной области Ω в декартовой *a)* и криволинейной областях *b)*

В данной работе для аппроксимации криволинейных поверхностей граней (см. рис. 2) применяется проективная поверхность Безье [13], которая определяется конечным набором упорядоченных точек пространства, называемых матрицей полюсов p_{ij} и матрицей весов w_{ij} , приписываемыми этим же точкам. За счёт изменения положения полюсов p_{ij} (контрольных точек) и значений весов w_{ij} , можно контролировать близость формы проективной поверхности Безье $\vec{r}(u, \nu)$ к форме гладких криволинейных поверхностей граней. Здесь заметим, что чем больше (относительно остальных точек) значение весового коэффициента w_{ij} , тем ближе поверхность Безье к соответствующей точке на поверхности грани блока-примитива (уменьшение веса вершины будет приводить к обратному эффекту).

Важно также, то, что, объединяя элементарные поверхности Безье, можно с достаточно высокой точностью описать форму произвольной поверхности и, в частном случае, замкнутой поверхности. Указанное обстоятельство обусловило широкое использование кривых и поверхностей Безье в современных CAD/CAE/CAM – системах.

В аналитическом плане проективная поверхность Безье порядка $n \times m$ (её представление связано с базисными полиномами Бернштейна $B_i^n(\nu)$, $B_j^m(u)$) описывается дробно-рациональной функцией $\vec{r}(u, \nu)$ следующего вида (веса w_{ij} угловых вершин считаются равными единице):

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, \nu) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(\nu) B_j^m(u) \langle w_{ij} \rangle \overline{p_{ij}} = \\ &= \left(\sum_{j=0}^m B_0^n(\nu) B_j^m(u) \langle w_{0j} \rangle \overline{p_{0j}} + \dots + \sum_{j=0}^m B_n^n(\nu) B_j^m(u) \langle w_{nj} \rangle \overline{p_{nj}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\langle w_{ij} \rangle = \frac{w_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(\nu) B_j^m(u) w_{ij}}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq \nu \leq 1,$$

$$B_i^n(\nu) = \binom{n}{i} \nu^i (1-\nu)^{n-i}, \quad B_j^m(u) = \binom{m}{j} u^j (1-u)^{m-j}, \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_i^n(\nu) B_j^m(u) = 1,$$

где $\binom{n}{i} = C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, $\binom{m}{j} = C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ – биномиальные коэффициенты; $\overline{p_{ij}}$ – матрица полюсов, состоящая из векторов (с компонентами x, y, z) контрольных точек.

При записи данной формулы принято, что имеется совокупность контрольных точек, условно расположенных в виде $n+1$ рядов по $m+1$ точек в каждом ряду. Индексы точки $\overline{p_{ij}}$ означают, что данная контрольная точка расположена j -й по счету в i -м ряду (первый индекс равен номеру ряда, второй – номеру точки в ряду). Заметим также, что выражение для $\overline{r}(u, \nu)$ представляет собой выпуклую оболочку полюсов $\overline{p_{ij}}$. Т.е., проективная поверхность Безье будет располагаться внутри этой выпуклой оболочки, «натянутой» на эти полюса.

Поверхность Безье можно (для удобства дальнейших вычислений) записать в векторной форме (6)

$$\overline{r}_x(u, \nu) = (\overline{c}_x \cdot \overline{\varphi}) = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell,x} \varphi_\ell, \quad \overline{r}_y(u, \nu) = (\overline{c}_y \cdot \overline{\varphi}) = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell,y} \varphi_\ell, \quad \overline{r}_z(u, \nu) = (\overline{c}_z \cdot \overline{\varphi}) = \sum_{\ell=0}^n c_{\ell,z} \varphi_\ell, \quad (6)$$

$$\overline{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_\ell, \dots, \varphi_n)^T, \quad \varphi_\ell = (B_\ell^n(\nu) B_0^m(u) \langle w_{\ell 0} \rangle, \dots, B_\ell^n(\nu) B_m^m(u) \langle w_{\ell m} \rangle), \quad \ell = \overline{0, n},$$

$$\overline{c}_x = (p_{0,x}, \dots, p_{\ell,x}, \dots, p_{n,x})^T, \quad \overline{c}_y = (p_{0,y}, \dots, p_{\ell,y}, \dots, p_{n,y})^T, \quad \overline{c}_z = (p_{0,z}, \dots, p_{\ell,z}, \dots, p_{n,z})^T,$$

где $p_{\ell,x} = (p_{\ell 0,x}, \dots, p_{\ell m,x})$, $p_{\ell,y} = (p_{\ell 0,y}, \dots, p_{\ell m,y})$, $p_{\ell,z} = (p_{\ell 0,z}, \dots, p_{\ell m,z})$.

Будем считать, что на любой криволинейной поверхности грани заданы $N \times M$ точек – узлов интерполяции, для которых известны их декартовы x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} ($i = \overline{1, N}, j = \overline{1, M}$) координаты (а также соответствующие им значения параметров u_{ij}, ν_{ij}), перечисленные в порядке их соединения в каркасе контрольных точек конструируемой поверхности грани. Тогда используя значения координат узлов интерполяции x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} (и u_{ij}, ν_{ij}) и формулу для $\overline{r}(u, \nu)$, можно сформулировать систему линейных уравнений, неизвестными в которой будут координаты контрольных точек (матрица полюсов $\overline{p_{ij}}$) (7)

$$A \overline{c}_x = \overline{q}_x, \quad A \overline{c}_y = \overline{q}_y, \quad A \overline{c}_z = \overline{q}_z, \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(u_1, \nu_1) & \dots & \varphi_\ell(u_1, \nu_1) & \dots & \varphi_n(u_1, \nu_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(u_i, \nu_i) & \dots & \varphi_\ell(u_i, \nu_i) & \dots & \varphi_n(u_i, \nu_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(u_{N \times M}, \nu_{N \times M}) & \dots & \varphi_\ell(u_{N \times M}, \nu_{N \times M}) & \dots & \varphi_n(u_{N \times M}, \nu_{N \times M}) \end{bmatrix},$$

$$\overline{c}_x = (p_{0,x}, \dots, p_{\ell,x}, \dots, p_{n,x})^T, \quad \overline{c}_y = (p_{0,y}, \dots, p_{\ell,y}, \dots, p_{n,y})^T, \quad \overline{c}_z = (p_{0,z}, \dots, p_{\ell,z}, \dots, p_{n,z})^T,$$

$$\vec{q}_x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{N \times M}), \vec{q}_y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_{N \times M}), \vec{q}_z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_{N \times M}),$$

где $N \times M = (n+1) \times (m+1)$ – число узлов интерполяции на криволинейной поверхности грани; $(n+1) \times (m+1)$ – число неизвестных для каждой компоненты (x, y или z) матрицы полюсов \vec{p}_{ij} ; $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)^T$ – радиус вектор и декартовы координаты заданных точек (в количестве $N \times M$) на криволинейной поверхности грани, которая аппроксимируется поверхностью Безье; u_s, v_s – значения параметров (с областью изменения $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$), соответствующих заданным точкам \vec{r}_s ; $s = \overline{1, N \times M}$ на криволинейной поверхности грани.

Однако такая система уравнений в большинстве случаев будет переопределенной ($N \times M \neq (n+1) \times (m+1)$). Для преодоления указанного недостатка можно воспользоваться (8) методом наименьших квадратов [14]

$$A \vec{c}_x = \vec{q}_x, \quad A \vec{c}_y = \vec{q}_y, \quad A \vec{c}_z = \vec{q}_z, \quad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_0(u_s, v_s) \varphi_0(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_0(u_s, v_s) \varphi_\ell(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_0(u_s, v_s) \varphi_n(u_s, v_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_i(u_s, v_s) \varphi_0(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_i(u_s, v_s) \varphi_\ell(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_i(u_s, v_s) \varphi_n(u_s, v_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_n(u_s, v_s) \varphi_0(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_n(u_s, v_s) \varphi_\ell(u_s, v_s) & \dots & \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_n(u_s, v_s) \varphi_n(u_s, v_s) \end{bmatrix},$$

$$\vec{c}_x = (p_{0,x}, \dots, p_{\ell,x}, \dots, p_{n,x})^T, \quad \vec{c}_y = (p_{0,y}, \dots, p_{\ell,y}, \dots, p_{n,y})^T, \quad \vec{c}_z = (p_{0,z}, \dots, p_{\ell,z}, \dots, p_{n,z})^T,$$

$$q_{k,x} = \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_k(u_s, v_s) \cdot x_s, \quad q_{k,y} = \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_k(u_s, v_s) \cdot y_s, \quad q_{k,z} = \sum_{s=1}^{N \times M} \varphi_k(u_s, v_s) \cdot z_s, \quad k = \overline{0, n},$$

$$\vec{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_\ell, \dots, \varphi_n)^T, \quad \varphi_\ell = (B_\ell^n(v) B_0^m(u) \langle w_{\ell 0} \rangle, \dots, B_\ell^n(v) B_m^m(u) \langle w_{\ell m} \rangle), \quad \ell = \overline{0, n},$$

$$p_{\ell,x} = (p_{\ell 0,x}, \dots, p_{\ell m,x}), \quad p_{\ell,y} = (p_{\ell 0,y}, \dots, p_{\ell m,y}), \quad p_{\ell,z} = (p_{\ell 0,z}, \dots, p_{\ell m,z}),$$

где $N \times M \neq (n+1) \times (m+1)$ – число узлов интерполяции на криволинейной поверхности грани; $(n+1) \times (m+1)$ – число неизвестных для каждой компоненты (x, y или z) матрицы полюсов \vec{p}_{ij} ; $\vec{r}_s = (x_s, y_s, z_s)^T$ – радиус вектор и декартовы координаты заданных точек (в количестве $N \times M$) на криволинейной поверхности грани, которая аппроксимируется поверхностью Безье; u_s, v_s – значения параметров (с областью изменения $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$), соответствующих заданным точкам \vec{r}_s ; $s = \overline{1, N \times M}$ на криволинейной поверхности грани.

Используя найденный проективный вариант (поверхность Безье) каждой криволинейной поверхности граней блока-примитива, можно построить поверхностную сетку блока-примитива. Далее оперируя этой поверхностной сеткой и используя метод трансфинитной интерполяции [15], а также метод квазиортогонализации, создается объемная структурированная квазиортогональная расчетная сетка (состоящая из сеточных поверхностей, узлы которой нумеруются с помощью параметров α, β, γ) внутри блока-примитива. Затем, как уже отмечалось выше, построенная локальная (в блоках-примитивах) расчетная сетка объединя-

ется (рис. 4) в единую глобальную неструктурированную сетку с общей нумерацией узлов [15]. После чего применяется дополнительный этап её оптимизации (улучшения – «регуляризации») с оценкой её качества.

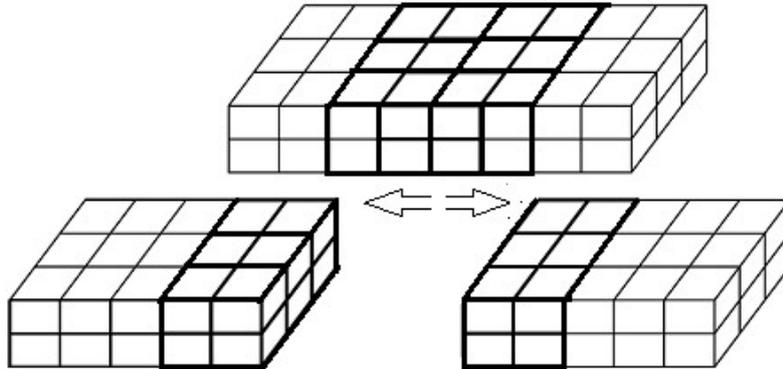


Рис. 4. Формирование единой глобальной неструктурированной сетки

Для численной адаптации (к особенностям решения) объемной расчетной сетки, используется результаты работы [16] или принцип равномерного распределения (метод эквираспределения) «адаптационной» (весовой) функции w . При этом исходными параметрами при численной перестройке сетки являются максимальный $\Delta v_{\max}^{\alpha}, \Delta u_{\max}^{\alpha}$, минимальный $\Delta v_{\min}^{\alpha}, \Delta u_{\min}^{\alpha}$ шаги и некоторая (дополнительно монотонизированная, т.е. имеющая один минимум и максимум) управляющая функция f .

Весовая функция w задается следующим образом [16] (9):

$$w = \begin{cases} (1 + AF)^{1/B}, & B \neq 0, \\ 1, & B = 0 \end{cases}, \quad A = \left(\frac{\Delta v_{\max}}{\Delta v_{\min}} \right)^B - 1, \quad F = \frac{|f - f_{\min}|}{(f_{\max} - f_{\min})}, \quad (9)$$

где v – может быть параметром v или u .

Величина B определяется из условия того, что минимальный расчетный шаг сетки $\min_i \Delta v_i^{\alpha}$ равен заданному минимальному значению Δv_{\min}^{α} шага. Для определения шагов сетки Δv_i^{α} , значение которых позволяют найти минимальный расчетный шаг сетки $\min_i \Delta v_i^{\alpha}$ на соответствующем временном слое, служит уравнение [17]:

$$\frac{d}{dq^{\alpha}} \left[w \frac{dx^{\alpha}}{dq^{\alpha}} \right] = 0, \quad v^{\alpha}(0) = 0, \quad v^{\alpha}(1) = L, \quad q^{\alpha} \in [0, 1],$$

где L – длина границы области в физическом пространстве. В случае $A = 0$ узлы сетки расположены равномерно. Окончательные значения шагов адаптированной расчетной сетки [17] находятся с помощью уравнения $\Delta v_i = L / \left(w_i \sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i} \right)$.

Для придания объемной структурированной расчетной сетки (вообще говоря неортогональной) внутри блока-примитива свойств квазиортогональности находится приближенное решения уравнение описывающих продольную деформацию пластин [16]. Начальным приближением для метода квазиортогонализации является расчетная сетка, полученная после этапа численной адаптации.

При описании метода квазиортогональности введем в декартовой системе координат XYZ прямоугольный параллелепипед $ABFEDCGH$, который непрерывно дифференцируемым образом необходимо отобразить в криволинейный параллелепипед (гексаэдр)

$A'B'F'E'D'C'G'H'$. При этом прямоугольная сетка, нанесенная на область $ABFEDCGH$, образует гладкую криволинейную сетку в области $A'B'F'E'D'C'G'H'$.

Обозначим через \vec{r} радиус вектор в системе координат XYZ и введем вектор $\vec{U} = \vec{r}^* - \vec{r}$, характеризующий смещение точек. Здесь \vec{r} и \vec{r}^* радиус векторы точек областей до $\vec{r} \in ABCD$ и после $\vec{r}^* \in A'B'F'E'D'C'G'H'$ преобразования. В данной работе для построения регулярных адаптивных сеток близких к ортогональным используются следующие уравнения, определяющие величины смещений U_x, U_y, U_z и описывающие продольную деформацию пластин [16]–[18] (10)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(W \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(W \sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(W \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right\} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(W \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(W \sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(W \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right\} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(W \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(W \sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(W \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

Граничные условия, необходимые для решения данной системы уравнений, задаются следующим образом: $U_i|_{\Gamma} = r_i^*|_{\partial(A'B'F'E'D'C'G'H')} - r_i|_{\partial(ABFEDCGH)}$, $i \in \{x, y, z\}$, где символ ∂ означает, что компоненты радиусов векторов \vec{r} и \vec{r}^* определяются на границе соответствующей области.

Компоненты ковариантного и контравариантного метрического тензора, входящие в систему уравнений (10), определяются соотношениями

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial q^i} \frac{\partial r'^{\alpha}}{\partial q^k}, \quad \sum_{k=1}^3 g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z,$$

а контравариантные компоненты метрического тензора находятся с помощью формулы

$$g^{ik} = \frac{\Delta^{ik}}{g},$$

где g – фундаментальный определитель $\det \|g_{ik}\|$; Δ^{ik} – алгебраическое дополнение элемента g_{ik} в этом определителе.

Коэффициент $\sigma \in [-1, 1]$ характеризует отношение поперечной деформации к продольной деформации. Коэффициент $W(x, y, z)$ является управляющей функцией, используемый для достижения нужной степени сгущения сеточных линий в области наиболее сильного изменения газодинамических функций или пространственных границ.

Для решения задачи $A\vec{U} = 0$ используем метод установления [16]. Шаг по «времени» τ найдем с помощью итерационного метода вариационного типа [16]. Для этого определим вектор невязок $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$

$$R_{x,i,j,m}^k = (AU_{i,j,m})_x^k - b_{x,i,j,m}^k, \quad R_{y,i,j,m}^k = (AU_{i,j,m})_y^k - b_{y,i,j,m}^k, \quad R_{z,i,j,m}^k = (AU_{i,j,m})_z^k - b_{z,i,j,m}^k,$$

$$\vec{b}_{i,j,m}^k = \{b_{x,i,j,m}^k, b_{y,i,j,m}^k, b_{z,i,j,m}^k\} = \{0, 0, 0\}, \quad i = 2, \dots, L-1; j = 2, \dots, M-1; m = 2, \dots, N-1,$$

где n – индекс временного слоя; k – номер итерации.

Введем скалярное произведение следующим образом [18]:

$$(a, b) = \sum_{i=2}^{L-1} \sum_{j=2}^{M-1} \sum_{m=2}^{N-1} a_{x,i,j,m} b_{x,i,j,m} h_x h_y h_z + \sum_{i=2}^{L-1} \sum_{j=2}^{M-1} \sum_{m=2}^{N-1} a_{y,i,j,m} b_{y,i,j,m} h_x h_y h_z +$$

$$+ \sum_{i=2}^{L-1} \sum_{j=2}^{M-1} \sum_{m=2}^{N-1} a_{z,i,j,m} b_{z,i,j,m} h_x h_y h_z$$

Будем минимизировать значение невязки $\vec{R}_{i,j,m} = A\vec{U}_{i,j,m} - \vec{b}_{i,j,m}$, используя модифицированный вариант итерационного метода вариационного типа – метод минимальных невязок [19]. В этом случае итерации следует проводить по формулам [16]–[24]

$$\vec{U}_{i,j,m}^{k+1} = \vec{U}_{i,j,m}^k + c\tau \vec{R}_{i,j,m}^k, \quad c \approx 0.9, \quad \tau = \frac{(\vec{R}, A\vec{R})}{(A\vec{R}, A\vec{R})}$$

4. Некоторые результаты апробации численной методик

В работе сформулирован и описан способ создания гексагональной нерегулярной расчетной сетки симплицальных конечных элементов – четырехугольников в двумерном случае и гексаэдров в трехмерном. Этот способ основывается на перестроении (до гексагональных) тетрагональных конечных элементов, а затем последующей коррекции («регуляризации») гексаэдральной расчетной сетки.

Описываемый подход к созданию расчетной сетки должен удовлетворять некоторым требованиям: узлы сетки располагаются строго внутри области моделирования; каждый узел находится на пересечении только трех координатных линий (без «двойных» узлов); направляющие линии сетки образуют определённую структурированную систему, элементом которой является гексаэдр произвольной формы; отсутствуют вогнутые, вырожденные, пересекающиеся (самопересекающиеся) ячейки; соседние ячейки относительно близки по объёму. С этой целью формируется список граней для измельчения (границы на узких участках сетки, грани большой площади и т. д.) и т.д.

Напомним, что в работе рассматривается результат «регуляризации» сетки, состоящей гексаэдральных конечных элементов. Поэтому для оценки качества расчетной сетки $\partial\Omega$ в этом случае был использован следующий критерий: «отношение среднего арифметического значения углов между ребрами, содержащими рассматриваемый узел, к углу $\pi/2$ ». Эта величина изменяется в пределах отрезка $[0, 1]$ так, что чем ближе она к 1, тем ближе качество конечного элемента к «идеальному».

Далее приведем некоторые первоначальные примеры перестроения и «регуляризация» 3D расчетной сетки.

Подход к коррекции («регуляризации») перестроенной сетки, основывается на «механической аналогии» растяжения и кручения, имеет хорошие показатели производительности, в том числе, и на трехмерных сетках. При этом получают гексаэдральные ячейки с близким отношением сторон. На рис. 5 приведены результаты численного преобразование в гексаэдральную расчетную сетку для геометрической модели ЛА X -33.

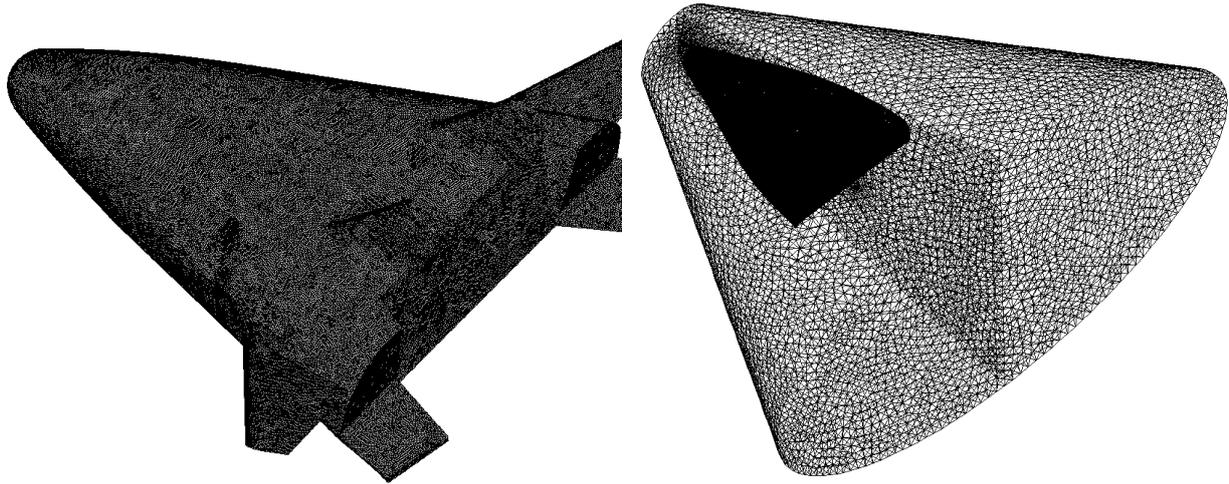


Рис. 5. Тетраэдральная поверхностная сетка геометрической модели ЛА X -33

На рис. 7 и рис. 8 приведены результаты численного перестроения тетраэдральной сетки для геометрической модели ЛА X -43 (преобразование её в гексаэдральную расчетную сетку). На рис. 6 и рис. 9 показано распределение «углового» критерия оценки её качества для геометрической модели ЛА X -33 и ЛА X -43.

Из результатов расчетов следует, что «регуляризованная» сетка Ω_h заполняет практически весь объем расчетной области Ω , а критерий оценки качества гексагональной «регуляризованной» расчетной сетки больше 0.7. При этом для достижения данного результата потребовалось всего лишь ~ 20 итераций.

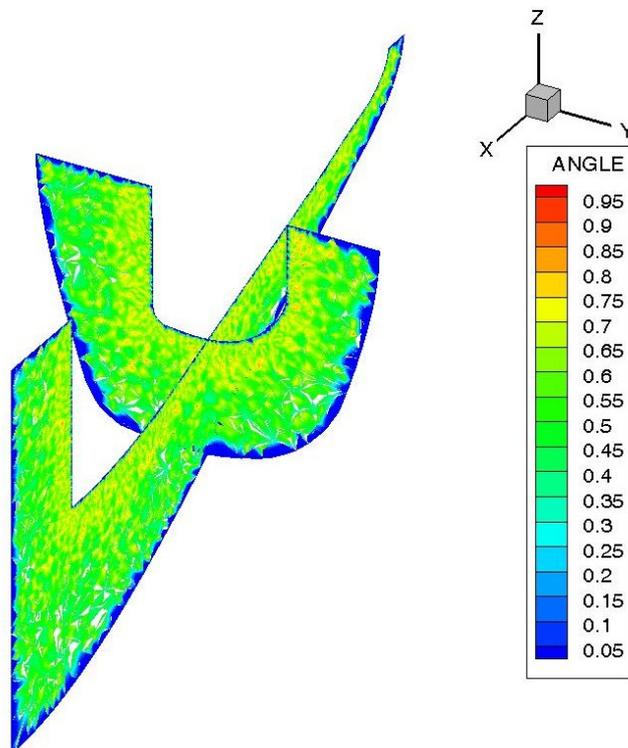


Рис. 6. Распределение «углового» критерия оценки качества гексагональной «регуляризованной» расчетной сетки геометрической модели ЛА X -33

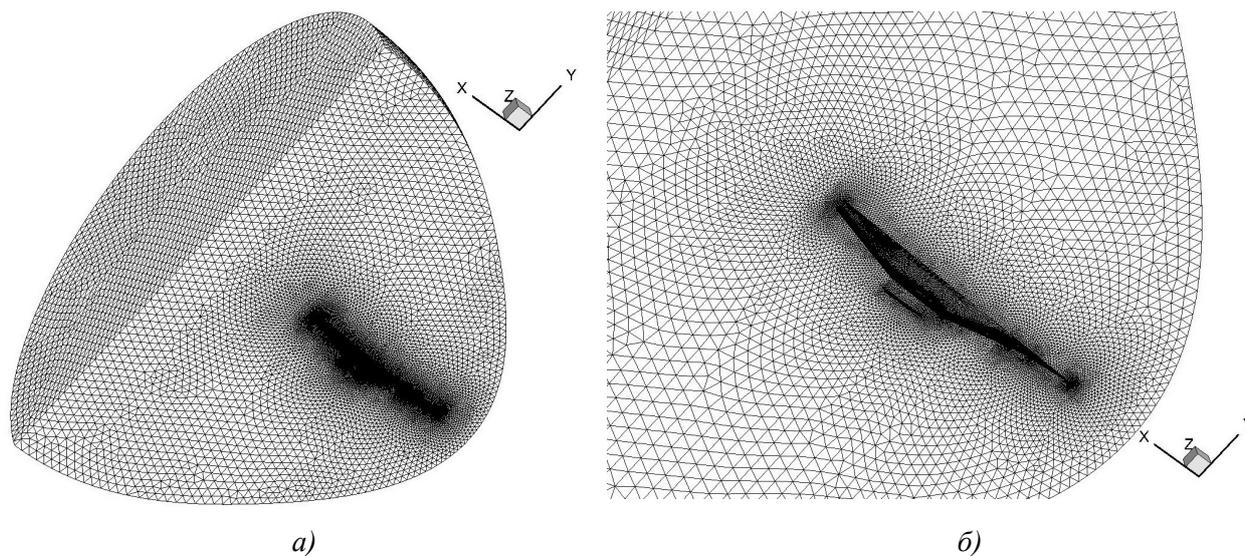


Рис. 7. Тетраэдральная поверхностная сетка (а, б) геометрической модели ЛА X -43

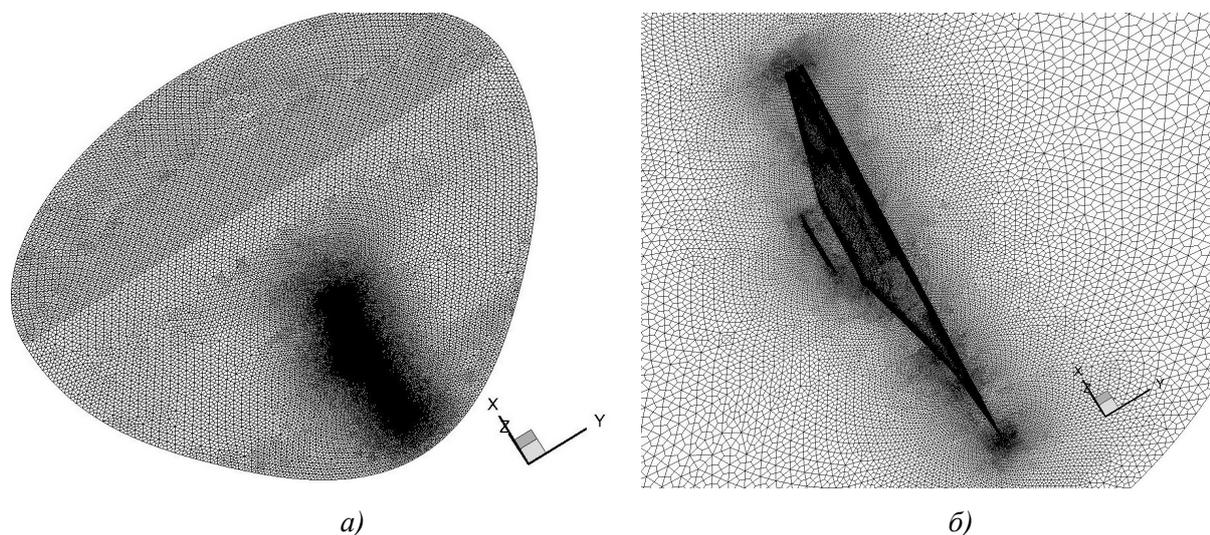


Рис. 8. Гексагональная перестроенная поверхностная сетка (а, б) геометрической модели ЛА X -43

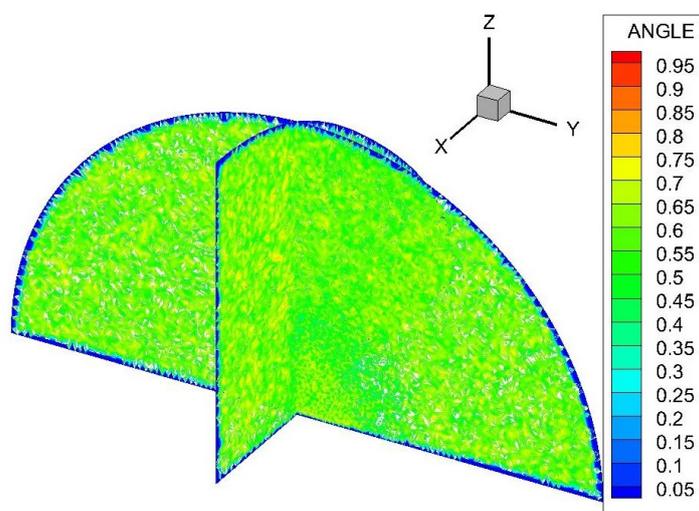


Рис. 9. Распределение «углового» критерия оценки качества гексагональной «регуляризованной» расчетной сетки геометрической модели ЛА X -43

На рис. 10 показан вариант построенной (с использованием гибридного блочно-структурированного метода) квазирегулярной криволинейной адаптивной сетки. Этот вариант сетки (которая была создана путем объединения регулярных вычислительных сеток блоков-примитивов в общую неструктурированную сетку) применялся при 2D численном анализе возможности поджига кислородно-водородной горючей смеси [20], которая движется в канале двигателя модельного ЛА [21]. В нижней части рис. 10 приведено пространственное распределение температуры T [K].

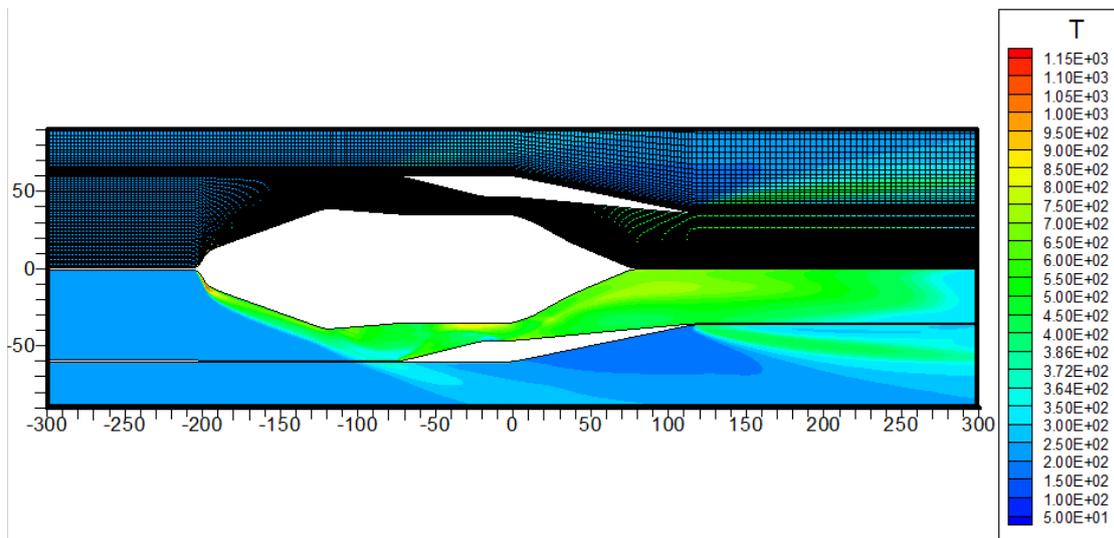


Рис. 10. Пример объединения регулярных вычислительных сеток блоков-примитивов в общую неструктурированную сетку 2D расчетной области

5. Заключение

В работе указан способ перехода от тетраэдральной к гексагональной нерегулярной расчетной сетке, разработана численная методика её «регуляризации» [23]-[24]. Эта «регуляризация» основывается на «механической аналогии» и базируется на решении линейных уравнений теории упругости. Приведены первоначальные результаты перестроения и «регуляризация» расчетной сетки, а также распределение «углового» критерия оценки её качества.

Благодарности и ссылки на гранты

Данное исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Минобрнауки России), проект № FSFN-2024-0011.

Литература

1. Kim J. Maze terrain authoring system in immersive virtual reality for new visual realism // *Symmetry*. 2019. Vol. 11. P. 490.
2. Uher V., Gajdoš P., Snášel V., Lai Y.-C., Radecký M. Hierarchical hexagonal clustering and indexing // *Symmetry*. 2019. Vol. 11. P. 731.
3. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V. Approximate method for calculating convective heat flux on the surface of bodies of simple geometric shapes // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. Vol. 815. P. 012024.
4. Nagy B., Abuhmaidan K. A continuous coordinate system for the plane by triangular symmetry // *Symmetry*. 2019. Vol. 11. P. 191.
5. Landau L. D., Lifschitz E. M. *Course of Theoretical Physics. V.VII. Theory of Elasticity.* Butterworth-Heinemann, 3 edition, 2012, 198 p.
6. Shepard D. A. Two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data // *Proc. of the 1968 ACM National Conference.* New York: ACM Press, 1968. Pp. 517–524.

7. Zheleznyakova A. L., Surzhikov S. T. Molecular dynamic-based unstructured grid generation method for aerodynamic application // *Computer Physics Communication*. 2013. Vol. 184. Pp. 2711–2727.
8. Zhang H., Smirnov A. V. Node placement for triangular mesh generation by Monte Carlo simulation // *Int J Numer Meth Eng*. 2005. Vol. 64. Pp. 1–16.
9. Mastin C. W., Thompson J. F. Discrete quasiconformal mappings // *J. Appl. Math. Phys*. 1978. Vol. 29. Pp. 1–11.
10. Thompson J. F., Thames T. C., Mastin C. W. TOMCAT – A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies // *J. Comput. Phys*. 1977. Vol. 24. Pp. 274–302.
11. Суржиков С. Т. Радиационно-конвективный нагрев марсианского аппарата EDL MSL под углом атаки // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т. 16, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/604/>
12. Суржиков С. Т., Шувалов М. П. Анализ радиационно-конвективного нагрева четырех типов спускаемых космических аппаратов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2014. Т. 15, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/237/>
13. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование Изд. физ.-мат. лит., 2002. 472 с.
14. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. 8-е изд., испр. М.: Дело, 2007. 504 с.
15. Jochem Häuser, Yang Xia. Modern Introduction to Grid Generation. COSMASE Shortcourse Notes EPF Lausanne. 1996. Department of Parallel Computing.
16. Кузенов В. В., Рыжков С. В. Численный анализ и вычислительные модели в плотной и разреженной плазме: монография. М.: Русайнс, 2024. 520 с.
17. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
18. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
19. Альшина Е. А., Болтнев А. А., Качер О. А. Эмпирическое улучшение простейших градиентных методов // *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17, № 6. С. 43–57.
20. Evans J. S., Schexnayder C. J. Influence of chemical kinetics and unmixedness on burning in supersonic hydrogen flames // *AIAA J*. 1980. Vol. 18, iss. 2. Pp. 188–193.
21. Steelant J. et al. Comparison of supersonic combustion tests with shock tunnels, flight and CFD 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. & Exhibition. 2006. AIAA Paper 2006–4684.
22. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Evaluation of the possibility of ignition of a hydrogen-oxygen mixture by erosive flame of the impulse laser // *Laser Physics*. 2019. Vol. 29. P. 096001.
23. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Varaksin A. Yu. Development of a Method for Solving Elliptic Differential Equations Based on a Nonlinear Compact-Polynomial Scheme // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2024. Vol. 451. P. 116098.
24. Kuzenov V. V., Dobrynina A. O., Shumaev V. V., Starostin A. V. Numerical analysis of the effects of intense energy flows on a cylindrical target in a magnetic field // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1686. P. 012021.

Reference

1. Kim J., Maze terrain authoring system in immersive virtual reality for new visual realism, *Symmetry*, 2019, vol. 11, pp. 490. <https://doi.org/10.3390/sym11040490>
2. Uher V., Gajdoš P., Snášel V., Lai Y.-C., Radecký M., Hierarchical hexagonal clustering and indexing, *Symmetry*, 2019, vol. 11, pp. 731. <https://doi.org/10.3390/sym11060731>
3. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Approximate method for calculating convective heat flux on the surface of bodies of simple geometric shapes, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 815, pp. 012024. DOI: 10.1088/1742-6596/815/1/012024

4. Nagy B., Abuhmaidan K., A continuous coordinate system for the plane by triangular symmetry, *Symmetry*, 2019, vol. 11, pp. 191. <https://doi.org/10.3390/sym11020191>
5. Landau L. D., Lifschitz E. M., *Course of Theoretical Physics. V.VII. Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, 3 edition, 2012, 198 p.
6. Shepard D. A., *Two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*, Proc. of the 1968 ACM National Conference. New York: ACM Press, 1968, pp. 517–524.
7. Zheleznyakova A. L., Surzhikov S. T., Molecular dynamic-based unstructured grid generation method for aerodynamic application, *Computer Physics Communication*, 2013, vol. 184, pp. 2711–2727. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2013.07.013>
8. Zhang H., Smirnov A. V., Node placement for triangular mesh generation by Monte Carlo simulation, *Int J Numer Meth Eng.*, 2005, vol. 64, pp. 1–16. DOI: 10.1002/nme.1402
9. Mastin C. W., Thompson J. F., Discrete quasiconformal mappings, *J. Appl. Math. Phys.*, 1978, vol. 29, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1007/BF01797299>
10. Thompson J. F., Thames T. C., Mastin C. W., TOMCAT – A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, *J. Comput. Phys.*, 1977, vol. 24, pp. 274–302. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(77\)90038-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(77)90038-9)
11. Surzhikov S. T., Radiative-convective heating of the EDL MSL Martian apparatus at an angle of attack, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2015, vol. 16, issue 2 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/604/>
12. Surzhikov S. T., Shuvalov M. P., Analysis of radiation-convective heating of four types of descent spacecraft, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2014, vol. 15, issue 4 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/237/>
13. Golovanov N.N., *Geometric modeling*, Publ. of Phys. and Math. Lit., 2002. 472 p. [in Russian].
14. Magnus Ya. R., Katyshev P. K., Peresetsky A. A., *Econometrics. Basic course: Textbook*. 8th ed., corrected. M.: Delo, 2007. 504 p. [in Russian].
15. Häuser J., Xia Y., *Modern Introduction to Grid Generation*, COSMASE Shortcourse Notes EPF Lausanne, 1996, Department of Parallel Computing.
16. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., *Numerical analysis and computing models in dense and rare plasma*, M.: Ruscience, 2024, 520 p. [in Russian].
17. Kovenya V. M., Yanenko N. N., *Splitting method in problems of gas dynamics*, Novosibirsk: Nauka, 1981, 304 p. [in Russian].
18. Samarsky A. A., Nikolaev E. S., *Methods for solving grid equations*, M.: Nauka, 1978. 590 p. [in Russian].
19. Alshina E. A., Boltnev A. A., Kacher O. A., Empirical improvement of the simplest gradient methods, *Mathematical modeling*, 2005, vol. 17, iss. 6, pp. 43–57. <https://www.mathnet.ru/eng/mm201>
20. Evans J. S., Schexnayder C. J., Influence of chemical kinetics and unmixedness on burning in supersonic hydrogen flames, *AIAA J.*, 1980, vol. 18, iss. 2, pp. 188–193. DOI: 10.2514/3.50747
21. Steelant J., et al, Comparison of supersonic combustion tests with shock tunnels, flight and CFD, *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conf. & Exhibition*, 2006, AIAA Paper 2006–4684.
22. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Evaluation of the possibility of ignition of a hydrogen-oxygen mixture by erosive flame of the impulse laser, *Laser Physics*, 2019, vol. 29, iss. 9, pp. 096001.
23. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Varaksin A. Yu., Development of a Method for Solving Elliptic Differential Equations Based on a Nonlinear Compact-Polynomial Scheme, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, vol. 451, pp. 116098. DOI: 10.1016/j.cam.2024.116098
24. Kuzenov V. V., Dobrynina A. O., Shumaev V. V., Starostin A. V., Numerical analysis of the effects of intense energy flows on a cylindrical target in a magnetic field, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1686, pp. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1686/1/012021

Статья поступила в редакцию 19 января 2026 г.