Method of Elliptic Differential Equations Solving with Nonlinear Compact Polynomial Scheme

V. V. Kuzenov, S. V. Ryzhkov

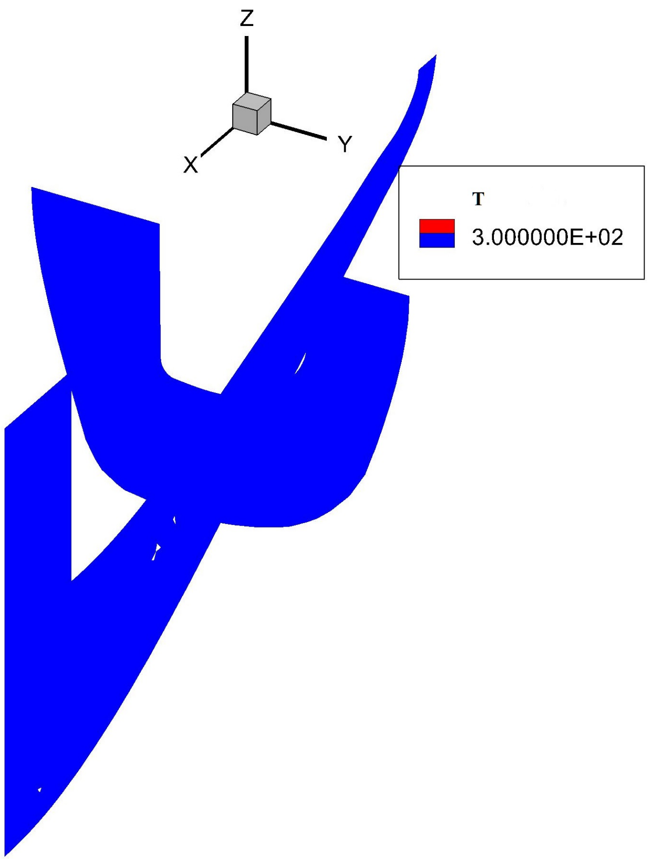
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

vik.kuzenov@gmail.com, svryzhkov@bmstu.ru

Abstract

The paper describes a numerical method for solving elliptic differential equations (on unstructured computational grids), which is based on a nonlinear compact polynomial computational scheme and a method for approximate transition from elliptic equations to a system of hyperbolic equations. Some examples of initial testing of the computational method proposed in the paper are given.

Keywords: mathematical modeling, unstructured computational grids, development of numerical methods.



Temperature distribution T [K] (the error value is normal $\|T_{err}(t)\|_{Ch}$ equal to 1×10^{-6}, the number of iterations is 1205)

УДК 621.039.05, 621.039.06, 539.1

Разработка метода решения эллиптических дифференциальных уравнений на основе нелинейной компактно-полиномиальной схемы

В. В. Кузенов, С. В. Рыжков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
vik.kuzenov@gmail.com; svryzhkov@bmstu.ru

Аннотация

В работе описан численный метод решения эллиптических дифференциальных уравнений (на неструктурированных расчетных сетках), который основывается нелинейной компактно-полиномиальной вычислительной схеме и способе приближенного перехода от уравнений эллиптического типа к системе гиперболических уравнений. Приведены некоторые примеры первоначального тестирования, предложенного в работе вычислительного метода.

Ключевые слова: математическое моделирование, неструктурированные расчетные сетки, разработка численных методов.

1. Введение

Как известно гиперболические и эллиптические типы систем уравнений встречаются при математическом моделировании упругих, термодеформационных и упругопластических взаимодействий в материалах конструкции различного рода объектов (летательных аппаратов – ЛА), при описании течений газа или плазмы с умеренными и большими числами Рейнольдса, а также при математическом моделировании волновых полей в сложных средах.

Во всех указанных случаях используют следующую группу вычислительных методов [1-3]: метод конечных объемов, метод конечных элементов, метод опорных операторов, а также сеточно-характеристический метод и метод сглаженных частиц. Заметим, что одной из основных трудностей при решении уравнений конвекции-диффузии и линейной термоупругости является необходимость подавления нефизичных осцилляций в численном решении. Такие осцилляции могут возникать в задачах с доминирующей конвекцией в пограничных и внутренних слоях, в задачах с доминирующей диффузией на неортогональных сетках, а также в случае сильно анизотропии изучаемой сплошной среды.

Наиболее часто при решении задач указанного класса задач применяются консервативные схемы. К консервативным схемам относятся следующие вычислительные методы: метод конечных объемов с многоточечной дискретизацией потока [4] (MPFA – multipoint flux approximaion), метод смешанных конечных элементов [5] (MFE – mixed finite element), метод опорных операторов [6, 7] (MFD – mimetic finite difference). Следует отметить вариант метода конечных объемов, который описан в работах [8]–[17]. Данный метод основан на схеме дискретизации уравнения диффузии с полным анизотропным разрывным тензором диффузии на неструктурированных сетках с многогранными ячейками [10, 18]. Он относится к классу методов с нелинейной дискретизацией потоков, обеспечивает аппроксимацию потоков и сохраняет неотрицательность дискретного решения.

Рассмотрим теперь численные методы (повышенного и высокого порядка точности), применимые для описания термоупругих деформаций и интерференции системы упругих волн в анизотропном материалах, а также для решения эллиптических вариантов уравнений Навье-Стокса. К схемам повышенного и высокого порядков точности относят схемы ENO, WENO, компактные схемы, а также вычислительные схемы, основанные на решении продолженных (дифференциально) систем уравнений.

В схемах ENO (essentially nonoscillatory) TVD-ограничение [19] заменяется требованием, уменьшающим количество возникающих экстремумов, допуская их появление при наличии ограничения на их величину. Алгоритмически это обеспечивается выбором вычислительного шаблона полиномиальной интерполяции высокого порядка, обеспечивающим наименьшие осцилляции из всех возможных. В то время как схемы ENO используют наиболее гладкий из нескольких шаблонов, схемы WENO (weighted essentially nonoscillatory) [20, 21] выбирают усредненный с весами шаблон, использующий все возможные шаблоны. Веса подбираются на основе локальной гладкости решения таким образом, чтобы они были близки к нулю для негладких шаблонов, но были оптимальны в областях гладкости решения. WENO-схемы действуют по аналогии с ENO-схемам возле разрывов первого рода, но в областях гладкости решения WENO-схемы ближе к центрированным противопоточным схемам. К недостаткам WENO схем можно отнести их неэкономичность и необходимость специальных видоизменений в окрестности расчетных границ.

Компактные схемы используют уравнения, которые связывают значения результата в нескольких соседних точках со значениями данных в нескольких соседних точках. Это позволяет повысить порядок аппроксимации, не увеличивая шаблон [22, 23]. Класс консервативных абсолютно устойчивых компактных схем, монотонных в широком диапазоне значений локального числа Куранта для решения квазилинейных уравнений гиперболического типа представлен в работах [24, 25]. Отметим также, что существует и другой подход (составные компактные схемы), позволяющий поднять порядок аппроксимации схемы без расширения пространственного шаблона. Для этого можно при решении задачи интерполяции использовать не только значения искомой функции в узлах, но и значения её производной.

Характеристические свойства гиперболических систем уравнений сохраняются и в следствиях (дифференциальных) исходных уравнений, получаемых дифференцированием исходных уравнений (продолженных или расширенных системах уравнений). Такие продолженные системы используются для построения схем высокого порядка аппроксимации на нерасширяющемся шаблоне, в том числе монотонных схем [26, 27].

Для решения задач (требующих прецизионного моделирования волновых процессов), в которых фигурируют гиперболические системы уравнений, относительно часто применяют сеточно-характеристический метод. К таким задачам относятся математическое моделирование состояния сплошной линейно-упругой среды [28, 29, 31–33] (в том числе, в анизотропном случае [30–33]). Использование неструктурированных расчетных сеток позволяет проводить численное моделирование границ (в том числе контактных) сложной формы. Отметим также, что математическое моделирование волновых полей в сложных средах важно в задачах радиолокации, антенной техники, в задачах электроразведки.

2. Приближенная характеристическая форма для уравнений эллиптического типа на неструктурированных расчетных сетках

Рассмотрим систему уравнений, описывающую упругое изотропное формирование термоупругих напряжений

$$\rho \frac{\partial \vec{V}(\vec{r},t)}{\partial t} = \left(\nabla \cdot \sigma(\vec{r},t) \right)^T + \rho \vec{F},$$

$$\frac{\partial\sigma(\vec{r},t)}{\partial t}=\left(\rho c_p^2-2\rho c_s^2\right)\left(\nabla\cdot\vec{V}(\vec{r},t)\right)I+\rho c_s^2\left[\nabla\otimes\vec{V}(\vec{r},t)+\left(\nabla\otimes\vec{V}(\vec{r},t)\right)^T\right]-3K\alpha_T\frac{\partial\theta}{\partial t},$$

где $\vec{V}(\vec{r},t)$ – скорость (производная смещения среды); $\sigma(\vec{r},t)$ – тензор напряжений Коши; ρ – плотность; $\vec{F}$ – вектор массовых внешних сил, действующих на единицу массы конструкцию; c_p, c_s – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно; $K=\frac{(3\lambda+2\mu)}{3}$ – модуль всестороннего сжатия; $\vec{a}\otimes\vec{b}$ – тензорное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\left(\vec{a}\otimes\vec{b}\right)^{ij}=a^i b^j$; I – единичный тензор второго ранга; $\vec{r}$ – радиус-вектор; t – время.

При условии $\Delta T/T \ll 1$ температурную деформацию ε_{ij}^T в ЛА можно считать пропорциональной изменению температуры $\varepsilon_{ij}^T=(3\lambda+2\mu)\alpha_T\Delta T$, где α_T – является коэффициентом теплового расширения материалов ЛА. В этом случае тензор напряжений σ_{ik} будет определяться соотношением Дюамеля – Неймана [28], [29]

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\left[\lambda\sum_k^3\varepsilon_{kk}-(3\lambda+2\mu)\alpha_T\left(T-T_0\right)\right]\delta_{ij}$$

Слагаемое $(3\lambda+2\mu)\alpha_T\left(T-T_0\right)\delta_{ij}$ в приведенном соотношении представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры T тела; $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ – тензор деформации. Последнее уравнение данной системы получается дифференцированием по времени t закона Гука, в нем λ,μ – параметры Ламе, которые определяют упругие свойства материала. Скорость продольных упругих волн в линейно-упругой среде можно найти по формуле: $c_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. Скорость поперечных волн вычисляется в соответствии с выражением: $c_s=\sqrt{\mu/\rho}$.

Считая, что скорость акустических волн в конструкционных элементах летательных аппаратов существенно больше скорости распространения в них тепловых волн можно ограничиться решением квазистатической задачи термоупругости. Предполагая также выполненным условие пренебрежения слагаемым вида $\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}(\vec{U})\right)\approx 0$ (т.е. имеется возможность введения понятия термоупругого потенциала перемещений $\vec{U}=\mathrm{grad}(\varPhi)$ [28]) можно свести обсуждаемую задачу к нахождению термического потенциала $\varPhi$ путем решения упрощённого варианта уравнений термоупругих напряжений

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}(\varPhi)\right)=\frac{(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)}\alpha_T\theta=\frac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)}\alpha_T\theta,\ \vec{U}=\mathrm{grad}(\varPhi),$$

где σ – коэффициент Пуассона; μ,λ – коэффициенты Ламэ; $\theta=T-T_0$ – избыточная температура; $\vec{U}=\vec{r}^*-\vec{r}$ – перемещение; α_T – коэффициент термического расширения; $\varPhi$ – термоупругий потенциал. Здесь $\vec{r}$ и $\vec{r}^*$ радиус векторы точек областей до $\vec{r}$ и после $\vec{r}^*$ термической деформации. Отметим, что математическая запись данного уравнения соответствует эллиптическому (1) типу уравнения.

Пространственное распределение термических напряжений σ_{ik} находится подстановкой найденных значений термоупругого потенциала Φ в выражение $\vec{U} = \mathrm{grad}(\Phi)$ и далее в соотношение Дюамеля – Неймана [28],[29].

Для поиска численного решения приведем переход к приближенной (гиперболической) форме (2) представления упрощённого варианта уравнения термоупругих напряжений. Для этого эллиптическое уравнение (1) переформулируется (на основе Cattaneo Approximation) и записывается в виде гиперболической по типу системы уравнений (3), в котором градиенты $\nabla(\bar{u})$ от решения $\bar{u}$ вводятся, как дополнительные уравнения (неизвестные переменные).

В стандартной (эллиптической) форме записи уравнение диффузии выглядит следующим образом (1):

$$\mathrm{div}\left(\bar{v}\nabla\left(\bar{u}\right)\right) = \bar{f}\,, \tag{1}$$

где $\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$ – может представлять собой термоупругий потенциал Φ перемещений $\vec{U}$ (уравнения линейной термоупругости), температура T (уравнение теплопроводности) или скорость (вариант уравнений Навье – Стокса); $\bar{v}$ – положительный транспортный коэффициент (например: коэффициент теплопроводности); $\bar{f}$ – источник внешнего воздействия.

Источник $\bar{f}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$ может быть линейной функцией пространственных переменных $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$ или нелинейный функцией $\bar{f}\left(\bar{u}\right)$ решения $\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$. Известно [40–43], что точность численного определения градиента $\nabla\left(\bar{u}\right)$ от решения $\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$ заметно ухудшается на неструктурированной расчетной сетке. Здесь отметим, что переход к приближенной форме (2) представления уравнений диффузионного типа позволяет частично преодолеть отмеченную трудность.

Способ приближенного перехода от уравнений эллиптического (диффузионного) типа (1) к системе гиперболических (Cattaneo Approximation) уравнений (2) основан на введение «псевдовременных» переменных $\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\tau}}$, $\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\tau}}$, $\dfrac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{\tau}}$, $\dfrac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\tau}}$, а также дополнительных (по отношению к $\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)$) неизвестных $\left(\bar{p},\bar{q},\bar{r}\right)^T = \bar{v}\nabla\left(\bar{u}\right)$:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\partial\vec{\bar{p}}}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{y}} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{z}} - \bar{f}\,,$$

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\bar{v}}{\bar{T}_r}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} - \frac{\bar{p}}{\bar{v}}\right),\quad \frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\bar{v}}{\bar{T}_r}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} - \frac{\bar{q}}{\bar{v}}\right),\quad \frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{\tau}} = \frac{\bar{v}}{\bar{T}_r}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{z}} - \frac{\bar{r}}{\bar{v}}\right), \tag{2}$$

где $\bar{\tau}$ – псевдопеременная эквивалентная временной переменной $\bar{t}$, $\bar{T}_r$ – свободный параметр физически эквивалентный времени релаксации; $\bar{p}$, $\bar{q}$ и $\bar{r}$ – переменные, описывающие градиент $\left(\bar{p},\bar{q},\bar{r}\right)^T = \bar{v}\bar{\nabla}\left(\bar{u}\right)$.

Заметим, что приведенная выше система (2) дифференциальных уравнений в частных производных эквивалентна (при условии $\bar{T}_r, \bar{v} = \mathrm{const}$) следующему уравнению смешанного типа $\bar{T}_r \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{\tau}^2} + \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{\tau}} = \bar{v}\left(\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} + \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} + \dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{z}^2}\right)$. Из формы записи данного уравнения следует, что в случае $\bar{T}_r \to 0$ система уравнений (2) близка к «параболическому» варианту, а при $\bar{T}_r \to \infty$

к полностью «гиперболическому» типу уравнения. В установившемся состоянии Ω_i система (2) приближается к исходному эллиптическому уравнению (1).

Рассмотрим гиперболическую (приближенную) формулировку уравнения (1), представленную в предобусловленной консервативной форме (3)

$$P^{-1}\frac{\partial \overline{\vec{U}}}{\partial \overline{\tau}}+\frac{\partial \overline{\vec{F}}}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial \overline{\vec{G}}}{\partial \overline{y}}+\frac{\partial \overline{\vec{H}}}{\partial \overline{z}}=\overline{\vec{S}}, \tag{3}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \overline{T_r}/\overline{v} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \overline{T_r}/\overline{v} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{T_r}/\overline{v}\end{bmatrix},\quad \overline{\vec{U}}=\begin{bmatrix}\overline{u}\\ \overline{p}\\ \overline{q}\\ \overline{r}\end{bmatrix},\quad \overline{\vec{F}}=\begin{bmatrix}-\overline{p}\\ -\overline{u}\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad \overline{\vec{G}}=\begin{bmatrix}-\overline{q}\\ 0\\ -\overline{u}\\ 0\end{bmatrix},\quad \overline{\vec{H}}=\begin{bmatrix}-\overline{r}\\ 0\\ 0\\ -\overline{u}\end{bmatrix},\quad \overline{\vec{S}}=\begin{bmatrix}-\overline{f}\\ -\overline{p}/\overline{v}\\ -\overline{q}/\overline{v}\\ -\overline{r}/\overline{v}\end{bmatrix},$$

где $\left(\overline{p}=\overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}},\overline{q}=\overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}},\overline{r}=\overline{v}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{z}}\right)^T=\overline{v}\nabla\left(\overline{u}\right)$.

Для придания безразмерного вида гиперболической формулировке диффузионных уравнений отнесем все переменные, входящие в систему уравнений (3), к их характерным значениям, а пространственные $\left(\overline{x},\overline{y},\overline{z}\right)$ и временную $\overline{\tau}$ переменные соответственно к характерному размеру L_* и характерному времени t_*:

$$\tau=\frac{\overline{\tau}}{t_*},\ x=\frac{\overline{x}}{L_*},\ y=\frac{\overline{y}}{L_*},\ z=\frac{\overline{z}}{L_*},\ v=\frac{\overline{v}}{\left(L_*^2/t_*\right)},$$

$$T_r=\frac{\overline{T_r}}{t_*},\ L_r=\frac{\overline{L_r}}{L_*},\ u=\frac{\overline{u}}{U_*},\ p=\frac{\overline{p}}{(U_*/L_*)},q=\frac{\overline{q}}{(U_*/L_*)},\ r=\frac{\overline{r}}{(U_*/L_*)}$$

Далее рассмотрим обобщенную криволинейную систему координат ($q_1=\xi,q_2=\eta$, $q_3=\zeta$) и сформулируем (в безразмерной «гиперболической» форме) относительно неё уравнения $\operatorname{div}\left(v\nabla(u)\right)=f$ и $\left(p,q,r\right)^T=v\nabla(u)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-\frac{\partial P_\xi}{\partial q^1}-\frac{\partial Q_\eta}{\partial q^2}-\frac{\partial R_\zeta}{\partial q^3}=S_1,$$

$$\left(\frac{T_r}{v}\right)\frac{\partial p}{\partial \tau}-x_\xi\frac{\partial u}{\partial q^1}-x_\eta\frac{\partial u}{\partial q^2}-x_\zeta\frac{\partial u}{\partial q^3}=-\frac{\left(x_\xi P_\xi+x_\eta Q_\eta+x_\zeta R_\zeta\right)}{v}-\left(\frac{T_r}{v}\right)A,$$

$$\left(\frac{T_r}{v}\right)\frac{\partial q}{\partial \tau}-y_\xi\frac{\partial u}{\partial q^1}-y_\eta\frac{\partial u}{\partial q^2}-y_\zeta\frac{\partial u}{\partial q^3}=-\frac{\left(y_\xi P_\xi+y_\eta Q_\eta+y_\zeta R_\zeta\right)}{v}-\left(\frac{T_r}{v}\right)B,$$

$$\left(\frac{T_r}{v}\right)\frac{\partial r}{\partial \tau}-z_\xi\frac{\partial u}{\partial q^1}-z_\eta\frac{\partial u}{\partial q^2}-z_\zeta\frac{\partial u}{\partial q^3}=-\frac{\left(z_\xi P_\xi+z_\eta Q_\eta+z_\zeta R_\zeta\right)}{v}-\left(\frac{T_r}{v}\right)C,$$

$$a=x_\xi y_\xi+x_\eta y_\eta+x_\zeta y_\zeta,\quad b=x_\xi z_\xi+x_\eta z_\eta+x_\zeta z_\zeta,\quad c=y_\xi z_\xi+y_\eta z_\eta+y_\zeta z_\zeta,$$

$$A=a\frac{\partial q}{\partial t}+b\frac{\partial r}{\partial t},\quad B=a\frac{\partial p}{\partial t}+c\frac{\partial r}{\partial t},\quad T\left(x,y,z\right), \tag{4}$$

где $\left(P_\xi = x_\xi p + y_\xi q + z_\xi r, Q_\eta = x_\eta p + y_\eta q + z_\eta r, R_\zeta = x_\zeta p + y_\zeta q + z_\zeta r\right)^T$ – контравариантный вектор; $S_1 = -f - \frac{P_\xi}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{g}\right) - \frac{Q_\eta}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{g}\right) - \frac{R_\zeta}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{g}\right)$; $g = \det\|g_{ik}\|$ – фундаментальный определитель метрического тензора g_{ik}; $x_\xi = \partial x/\partial\xi$, $y_\xi = \partial y/\partial\xi$, $z_\xi = \partial z/\partial\xi$, $x_\eta = \partial x/\partial\eta$, $y_\eta = \partial y/\partial\eta$, $z_\eta = \partial z/\partial\eta$, $x_\zeta = \partial x/\partial\zeta$, $y_\zeta = \partial y/\partial\zeta$, $z_\zeta = \partial z/\partial\zeta$.

Тогда в криволинейной системе координат (q_1, q_2, q_3) уравнения (1) примут вид векторного варианта уравнения переноса (5):

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau} + \left(P\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial q^1} + \left(P\frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{U}}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial q^2} + \left(P\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{U}}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial q^3} = P\vec{S}, \qquad (5)$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} -P_\xi \\ -u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{G} = \begin{bmatrix} -Q_\eta \\ 0 \\ -u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} -R_\zeta \\ 0 \\ 0 \\ -u \end{bmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ -\left(x_\xi P_\xi + x_\eta Q_\eta + x_\zeta R_\zeta\right)/v - T_r A/v \\ -\left(y_\xi P_\xi + y_\eta Q_\eta + y_\zeta R_\zeta\right)/v - T_r B/v \\ -\left(z_\xi P_\xi + z_\eta Q_\eta + z_\zeta R_\zeta\right)/v - T_r C/v \end{bmatrix},$$

Здесь использована следующая (6) запись матриц Якоби $\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}}$, $\frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{U}}$, $\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{U}}$ и матрицы P:

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_\xi & -y_\xi & -z_\xi \\ -x_\xi & 0 & 0 & 0 \\ -y_\xi & 0 & 0 & 0 \\ -z_\xi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_\eta & -y_\eta & -z_\eta \\ -x_\eta & 0 & 0 & 0 \\ -y_\eta & 0 & 0 & 0 \\ -z_\eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -x_\zeta & -y_\zeta & -z_\zeta \\ -x_\zeta & 0 & 0 & 0 \\ -y_\zeta & 0 & 0 & 0 \\ -z_\zeta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v/T_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v/T_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v/T_r \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Отметим, что численный способ (основывается на методе расщепления по физическим процессам) нахождения решения системы уравнений (5) состоит из двух этапов. На первом этапе решается система уравнений (6) без учета членов $T_r A/v$, $T_r B/v$ и $T_r C/v$. На втором этапе осуществляется их учет. Для упрощения дальнейшего анализа введем единичный вектор $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, который имеет следующие компоненты:

$\vec{n} = \left(n_x = x_\xi, n_y = y_\xi, n_z = z_\xi\right)^T$ для направления q^1;

$\vec{n} = \left(n_x = x_\eta, n_y = y_\eta, n_z = z_\eta\right)^T$ для направления q^2;

$\vec{n} = \left(n_x = x_\zeta, n_y = y_\zeta, n_z = z_\zeta\right)^T$ для направления q^3.

Матрицы $P\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}}$, $P\frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{U}}$, $P\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{U}}$ можно описать в общей (единой) форме (7)

$$\widehat{PA_i} = \begin{bmatrix} 0 & -n_x & -n_y & -n_z \\ -vn_x/T_r & 0 & 0 & 0 \\ -vn_y/T_r & 0 & 0 & 0 \\ -vn_z/T_r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

С учетом соотношений (4)–(7) приходим к следующей обобщенной форме (8) гиперболического варианта уравнения диффузионного типа

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{3} \widehat{PA_i} \frac{\partial \vec{U}}{\partial q^i} = P\vec{S} \tag{8}$$

Найдем собственные значения ω матрицы $\widehat{PA_i}$ из условия (характеристического уравнения) существования невырожденного решения (9)

$$\begin{Vmatrix} \omega & -n_\xi & -n_\eta & -n_\zeta \\ -\nu n_\xi / T_r & \omega & 0 & 0 \\ -\nu n_\eta / T_r & 0 & \omega & 0 \\ -\nu n_\zeta / T_r & 0 & 0 & \omega \end{Vmatrix} = \omega^2 \left[\omega^2 - \nu / T_r \left(n_\xi^2 + n_\eta^2 + n_\zeta^2 \right) \right] = 0 \tag{9}$$

Отсюда следует, что собственные значения симметричной матрицы $\widehat{PA_i} = R_i^{-1} \Omega^i R_i$ определяются, как $\left(\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\nu/T_r}, \omega_3 = 0, \omega_4 = 0\right)$ и могут быть использованы при записи диагональной матрицы Ω^i (10)

$$\Omega^i = \begin{bmatrix} \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ i = \overline{1,3}, \ \ \omega = \sqrt{\nu/T_r} = \nu/L_r \tag{10}$$

Матрица $\widehat{PA_i}$ является особенной т.к. $\omega_3 = 0, \omega_4 = 0$. Напомним, что для собственных значений $\omega_{3,4} = 0$ система уравнений (11) перестает быть гиперболичной. Левые ℓ^k и правые r^j собственные вектора матрицы $\widehat{PA_i}$ находятся из соотношений $\ell^k \widehat{PA_i} = \omega_k \ell^k$, $\widehat{PA_i} \cdot r^j = \omega_j \cdot r^j$ и условий ортогональности $\left(\ell^k, r^j\right) = 0$, $k \neq j$. Вектора ℓ^k с учетом собственных чисел $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\nu/T_r}, \omega_{3,4} = 0$ определяются из решения системы уравнений: $\ell^k \widehat{PA_i} = \omega_k \ell^k$, $k = \overline{1,3}$. Для $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\nu/T_r}$ имеем: $\ell^1 = \left(\frac{\nu}{L_r\sqrt{2}}, -\frac{n_\xi}{\sqrt{2}}, -\frac{n_\eta}{\sqrt{2}}, -\frac{n_\zeta}{\sqrt{2}} \right)^T$, $\ell^2 = \left(-\frac{\nu}{L_r\sqrt{2}}, -\frac{n_\xi}{\sqrt{2}}, -\frac{n_\eta}{\sqrt{2}}, -\frac{n_\zeta}{\sqrt{2}} \right)^T$. При этом правые собственные вектора r^j находятся с учетом условия ортогональности $\left(\ell^k, r^j\right) = 0$, $k \neq j$.

В вырожденном случае $\omega_{3,4} = 0$ имеем: $\ell^3 = \left(0, n_\eta, -n_\xi, 0\right)^T$, $\ell^4 = \left(0, n_\zeta, 0, -n_\xi\right)^T$. Здесь заметим, что вектора ℓ^3, ℓ^4 линейно зависимы (это допустимо т.к. $\omega_{3,4} = 0$ и матрица $\widehat{PA_i}$ вырождена), но ортогональны векторам ℓ^1, ℓ^2.

Строки, состоящие из левых собственных векторов ℓ^k, образуют матрицу R_i (11)

$$R_i = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{L_r\sqrt{2}} & -\frac{n_\xi}{\sqrt{2}} & -\frac{n_\eta}{\sqrt{2}} & -\frac{n_\zeta}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\nu}{L_r\sqrt{2}} & -\frac{n_\xi}{\sqrt{2}} & -\frac{n_\eta}{\sqrt{2}} & -\frac{n_\zeta}{\sqrt{2}} \\ 0 & n_\eta & -n_\xi & 0 \\ 0 & n_\zeta & 0 & -n_\xi \end{bmatrix}, \ i = \overline{1,3} \tag{11}$$

Столбцы, состоящие их правых собственных векторов r^k, образуют матрицу $R_i^{-1} = R_i^T$ (12)

$$R_i^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{L_r}{v\sqrt{2}} & -\dfrac{L_r}{v\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\dfrac{n_\xi}{\sqrt{2}} & -\dfrac{n_\xi}{\sqrt{2}} & n_\eta & n_\zeta \\ -\dfrac{n_\eta}{\sqrt{2}} & -\dfrac{n_\eta}{\sqrt{2}} & -n_\xi & 0 \\ -\dfrac{n_\zeta}{\sqrt{2}} & -\dfrac{n_\zeta}{\sqrt{2}} & 0 & -n_\xi \end{bmatrix}, \ i = \overline{1,3} \tag{12}$$

Таким образом, характеристическая форма гиперболического варианта диффузионного уравнения может быть следующим образом (13) представлена через квазиинварианты Римана $\left(R_i\vec{U}\right)$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + R_1^{-1}\Omega^1 \frac{\partial\left(R_1\vec{U}\right)}{\partial q^1} + R_2^{-1}\Omega^2 \frac{\partial\left(R_2\vec{U}\right)}{\partial q^2} + R_3^{-1}\Omega^3 \frac{\partial\left(R_3\vec{U}\right)}{\partial q^3} = P\vec{S} \tag{13}$$

При записи уравнений (13) неявно используются дополнительные предположения вида: $\partial R_i/\partial\tau \approx 0$, $\partial R_i/\partial q^i \approx 0$, $i = \overline{1,3}$. Однако следует заметить, что введение в уравнениях (14) матрицы R_i под знак производных $\partial/\partial q^i$ формирует в данных уравнениях источник вычислительной ошибки. Поэтому вышеприведенные уравнения необходимо изменить следующим образом (14):

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + R_1^{-1}\Omega^1 \frac{\partial\left(R_1\vec{U}\right)}{\partial q^1} + R_2^{-1}\Omega^2 \frac{\partial\left(R_2\vec{U}\right)}{\partial q^2} + R_3^{-1}\Omega^3 \frac{\partial\left(R_3\vec{U}\right)}{\partial q^3} - \sum_{i=1}^{3} R_i^{-1}\Omega^i\, \partial R_i/\partial q_i\left(\vec{U}\right) = P\vec{S}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial q_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{v}{L_r\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\xi}{\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\eta}{\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\zeta}{\sqrt{2}}\right) \\ -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{v}{L_r\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\xi}{\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\eta}{\sqrt{2}}\right) & -\dfrac{\partial}{\partial q_i}\left(\dfrac{n_\zeta}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 & \partial\left(n_\eta\right)/\partial q_i & -\partial\left(n_\xi\right)/\partial q_i & 0 \\ 0 & \partial\left(n_\zeta\right)/\partial q_i & 0 & -\partial\left(n_\xi\right)/\partial q_i \end{bmatrix}, \ i = \overline{1,3}$$

Характеристическое представление (14) систем уравнений в частных производных гиперболического типа (8) служит основой для «характеристических» и «сеточнохарактеристических» методов численного решения этих уравнений. Для эффективного поиска численного решения уравнений (14) в работе [39] была предложена и использована компактно-полиномиальная вычислительная схема, а также рациональный вариант метода Рунге – Кутта. Шаг по времени Δt необходимый для интегрирования данной системы уравнений (14) выбирается из условия выполнения локального (по пространству) критерия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви.

3. Вычислительная методика решения гиперболического варианта уравнений эллиптического типа на неструктурированных расчетных сетках

Одним из ключевых моментов при построении численного решения гиперболического варианта уравнения диффузионного типа является выбор способа дискретизация расчетной области и типа используемой в ней расчетной сетки. Здесь можно отметить, что наиболее предпочтительной расчетной сеткой для разрабатываемого вычислительно метода является гексагональная нерегулярная расчетная сетка. В рамках данной работы рассматриваются следующий способ получения гексагональной нерегулярной расчетной сетки: на основе перестроения (до гексагональных) симплициальных конечных элементов – треугольников в двумерном случае и тетраэдров в трехмерном [34].

В дальнейшем будем считать, что вся расчетная область разбивается на конечное число непересекающихся контрольных объемов Ω_i – криволинейных параллелепипедов (гексаэдров), которые покрывают всю расчетную область $\Omega \approx \bigcup_i \Omega_i$ вплоть до её границы. Здесь отметим, что объединение $\Omega \approx \bigcup_i \Omega_i$ представляет исходную расчетную область Ω с некоторой погрешностью аппроксимации геометрии исходной области. Будем рассматривать случай нахождения физических переменных в центрах сеточных ячеек (контрольных объемов). Под центром ячейки будем понимать некоторую точку строго внутри расчетной ячейки. Граница ячейки может быть представлена в виде: $\partial C_i = \bigcup_{k \in \Omega_i} \partial C_{ik}$, где Ω_i – множество ячеек, имеющих общую грань с ячейкой под номером i; ∂C_{ik} – совокупность граней, разделяющих ячейки i и k будем называть сегментом.

Следующим шагом методики является переход к криволинейным координатам ξ,η,ζ при локальном нахождении решения гиперболического варианта диффузионного уравнения. После этого шага в окрестности расчетной ячейки Ω_i (в координатах ξ,η,ζ) гексагональная неструктурированная расчетная сетка локально становится «квазиструктурированной». При этом в силу компактности шаблона аппроксимации, переход от исходной криволинейной (физической) расчетной области к некоторой обобщенной нормализованной по форме области может быть осуществлен не глобальным способом, а локально в рамках каждой отдельной расчетной ячейки Ω_i.

В целом нахождение численного решения гиперболического варианта диффузионного уравнений (1) можно описать с помощью двух этапов (шагов): этапа «предиктор», этапа «корректора» [39]. Необходимость в этапе «корректор» обусловлена требованием восстановления консервативности уравнений (1), которая была утрачена при численной реализации этапа «предиктор».

Поиск решения на этапе «предиктор» основывается на характеристической форме (16) гиперболического варианта диффузионного уравнения. При практическом использовании характеристической формы (16) необходимо сначала воспользоваться методом расщепления (напомним, что данный метод не является консервативным) по пространственным координатам $q^i = (\xi,\eta,\zeta)$. Этот вариант метода расщепления (учет правой части $P\vec{S}$ выполнен в виде отдельного этапа) приводит для системы уравнений (16) к четырем векторным одномерным уравнениям (15)

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} + R_i^{-1}\Omega^i \frac{\partial \left(R_i \vec{U}\right)}{\partial q^i} - R_i^{-1}\Omega^i D R_i \left(\vec{U}\right) = \vec{F_s}\,, \qquad (15)$$

$$\overrightarrow{F_s} = -\sum_{j \neq i}^{3} R_j^{-1} \Omega^2 \frac{\partial \left(R_j \overrightarrow{U} \right)}{\partial q^j} + \sum_{j \neq i}^{3} R_j^{-1} \Omega^i \, \partial R_j \big/ \partial q_j \left(\overrightarrow{U} \right), \; i = \overline{1,3}$$

В рамках такого локально-одномерного подхода для поиска численного решения уравнений (15) применяется нелинейная квазимонотонная компактная разностная схема повышенного порядка точности [35, 36]. Для этого система уравнений (15) записывается в локальных квазиинвариантах Римана ($\overrightarrow{W} = R_i \overrightarrow{U}$). После этой операции система уравнений (15) распадается на одномерные (вдоль пространственных направлений ξ, η, ζ) векторные варианты уравнения переноса (14), связанные между собой через начальные условия задачи и слагаемые правой части $R_i \overrightarrow{F_s}$ уравнения (16)

$$\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial \tau} + \Omega^i \frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial q^i} - \Omega^i D R_i \left(\overrightarrow{U} \right) = R_i \overrightarrow{F_s}, \; i = \overline{1,3} \tag{16}$$

Эти одномерные уравнения переноса (16) могут быть разрешены численно с помощью нелинейной квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схемы повышенного порядка точности [35,36].

Этап «корректор» основывается на решении, найденном на этапе «предиктор», а также дивергентной форме диффузионного уравнения (1), (4). В целом этап «корректор» (консервативный этап) можно описать в виде трех шагов:

1) «реконструкция» [39] значений переменных $\overrightarrow{U}$ на гранях и внутри объема расчетных ячеек на основе значений $\overrightarrow{U_i}, \overrightarrow{U_j}$ (j – индекс соответствует контрольным объемам соседним с i –м контрольным объемом) в центрах ячеек, а также кусочно–полиномиальных распределений $U(q^i)$ (вдоль направлений $q^i = (\xi, \eta, \zeta)$) следующего вида [35]:

$$U\left(q^i\right) = R\left(q^i\right) + a_i \left[q - q^i \right]^3 +$$
$$+ b_i \left[q - q^i \right]^4 + c_i \left[q - q^i \right]^5 + d_i \left[q - q^i \right]^6 + e_i \left[q - q^i \right]^7 + g_i \left[q - q^i \right]^8 + h_i \left[q - q^i \right]^9$$

Эти распределения были ранее найдены на этапе «предиктор»;

2) вычисление численных потоков в «точках Гаусса» [37] через грани расчетных ячеек путем точного или приближенного решения задачи между значениями на двух (противоположных) сторонах каждой грани;

3) интегрирования (метод контрольного объема (17)) дивергентных уравнений (4) относительно временной переменной t и перехода на новый временной слой $t + \Delta t$.

Для полноценного использования на этапе «корректор» дивергентного варианта диффузионных уравнений необходимо сформулировать [39] семейство методов интерполяции («реконструкции») высоких порядков на неструктурированных сетках. Среди конечно – обьёмных вычислительных схем наиболее часто используется «реконструкция» консервативных переменных $\overrightarrow{U}$, как на поверхности граней (относительной внутренней части ячейки), так и внутри контрольного объема (ячейки) Ω_i. Под «реконструкцией» значений переменных понимаются величины $P_{i,m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n}\left(\vec{x}\right)$, установленные внутри $\vec{x} \in \Omega_i$ контрольного объема (расчетной ячейки) и определяемые на основе комбинации (например: полиномиальной) значений сеточных функции $\overrightarrow{U}$, заданных в центрах некоторого набора ячеек. Нахождение этой полиномиальной комбинации будем называть реконструкцией [39], а используемый для этого набор ячеек – шаблоном реконструкции (в шаблон входят ближайшие контрольные объемы, окружающие контрольный объем Ω_i, в котором строится интерполяция). После данного шага вычислительного алгоритма для нахождения консервативных переменных $\vec{U}$ в каждой расчетной ячейки $\Omega_i \in \Omega$ метода контрольного объема следует выполнить расчет диффузионных потоков q_w в точках «Гаусса» (i, j) грани ∂C_{ij}: $q_w = F\left(\nabla u_{i,j}(t)\right) \cdot n_k\big|_{\partial C_{ij}}$, где $\nabla u_{i,j}(t)$ – значение градиента «реконструированного» решения $u(t)$ на грани ∂C_{ij} конечного элемента Ω_i. Таким образом, на грани ∂C_{ij} между двумя сопряженными расчетными ячейками Ω_i и Ω_j возникает необходимость в решение обобщенной задачи Римана (17) о распаде произвольного разрыва для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка [39]. В силу бесконечной малой толщины пространственной области разрывного решения на грани сопряжения ∂C_{ij} задачу Римана о «распаде разрыва» можно рассматривать в следующей одномерной постановке (17):

$$P^{-1}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial P_q}{\partial s} = 0, \quad P_q = \nu\frac{\partial u}{\partial s}, \; s \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

с начальными данными: $u(t = 0, \mathrm{s}) = u_0(s)$, которые всюду непрерывны, кроме грани ∂C_{ij}. Здесь s – расстояние вдоль единичного вектора внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности грани ∂C_{ik}, разделяющей ячейки i и k. Подробное аналитическое решение данной задачи приведено в работе [39].

Далее применим для каждой расчетной ячейки $\Omega_i \in \Omega$ метод контрольного объема (18) для аппроксимации дивергентных по форме диффузионных уравнений (4)

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{|\Omega_i|}\int\limits_{\partial C_i}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{|\Omega_i|}\int\limits_{\Omega_i} S_1 \mathrm{d}V, \tag{18}$$

где $Q_i = \dfrac{1}{|\Omega_i|}\iiint\limits_{\Omega_i} u \;\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$ – среднее значение u в i–м контрольном объеме; $\vec{F} = \left(F^{(1)} = P_\xi, F^{(2)} = Q_\eta, F^{(3)} = R_\zeta\right)$; $|\Omega_i|$ – объем замкнутой области (контрольного объема Ω_i); ∂C_i – поверхность i–го контрольного объема Ω_i; $\mathrm{d}V = \mathrm{d}q^1\mathrm{d}q^2\mathrm{d}q^3$; $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности ∂C_i.

Для достижения высокого порядка аппроксимации на этапе «корректор» интегралы (поверхностные $\int\limits_{\partial C_i}\left(\vec{F}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}s$ или объемные $\int\limits_{\Omega_i} S_1\mathrm{d}V$) необходимо заменить квадратурными формулами, которые должны приближать исходные интегралы с точность согласованной с порядком точности численного метода решения диффузионного уравнения (4). Это обстоятельство накладывает достаточно высокие требования на квадратурные формулы интегрирования и требует большего количества гауссовых точек. Отсюда следует, что при вычислении объемных (и поверхностных) интегралов следует использовать экономичные Гауссовы квадратуры [37], точные для полиномов порядка $3k$ (k – максимальная степень базисных полиномов).

4. Первоначальное тестирование численной методики

Для первоначальной проверки работоспособности расчетно-теоретической методики был решен набор тестовых (валидационных) задач. С этой целью обычно используются нормы в пространствах C, L_1, L_2, W_2^1. В данной работе при вычислении нормы ошибки решения f_{err} использовалась норма в пространстве C: $\|f_{err}(t)\|_{Ch} = \max\limits_{\Omega_x}|f_{test} - f_{num}|$, где f_{test}, f_{num} – значения аналитического и численного решения в центре некоторой ячейки расчетной сетки $\vec{x} \in \Omega_i$.

В тестовой задаче, связанной с процессом распространения тепла, применялось (с учетом краевого условия вида: $\theta|_{\partial G} = \psi(s), T|_{\partial G} = T_w, T_w = 300$) дифференциальное уравнение теплопроводности $\rho c_{\varepsilon=0} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{div}\left(\vec{k} \cdot \mathrm{grad}\,\theta\right)$. Результат численного решения данной тестовой задачи показан на рис. 1.

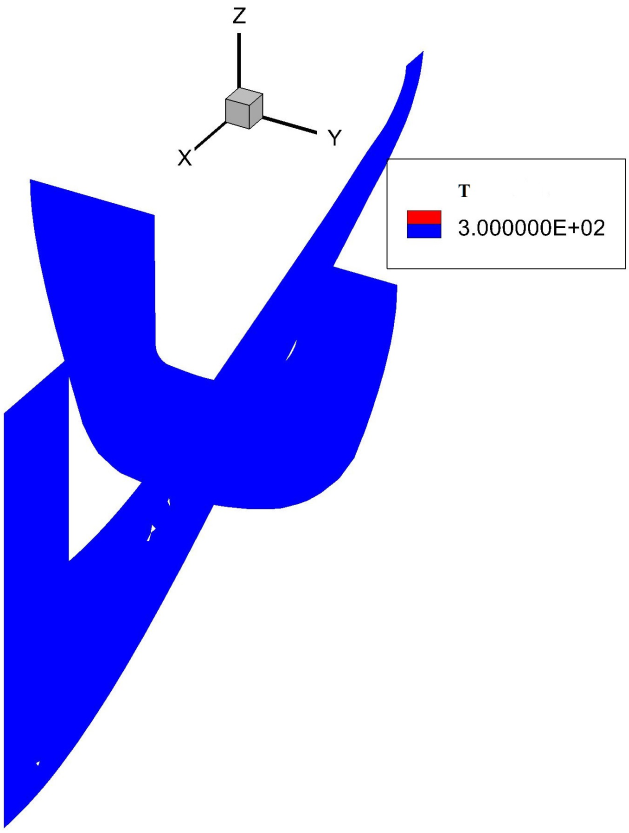


Рис. 1. Распределение температуры T [K] (величина ошибки в норме $\|T_{err}(t)\|_{Ch}$ составляет величину 1×10^{-6}, число итераций 1205)

Вторая тестовая задача (рис. 2) математической модели (1) основывалась на поиске температурного поля $T(x,y,z)$ в изотропном материале с источниками теплоты q_V, которые располагаются в расчетной области G. Данное температурное поле $T(x,y,z)$ может быть определено с помощью решения 1-й краевой задачи ($T|_{\partial G} = \psi(s)$) уравнения *3D* стационарной теплопроводности $\Delta T = \varphi$, $\varphi = -q_V / \lambda_q$. При этом использовалось точное решении $T(x,y,z) = C(Z - z)(Y - y)(X - x)$ (константы имеют следующие значения: $C = 100$, $X = 1, Y = 1, Z = 1$) уравнения Пуассона $\Delta T = \varphi$, $\varphi|_{\vec{r}\subset G} = 0$, $T|_{\partial G} = \psi(s)$, где $\psi|_{\partial G} = C(Z - z)(Y - y)(X - x)$. Начальное условие для рассматриваемого итерационного процесса задавалось в виде $T = 0$.

На рис. 2 приведен результат численного решения второй тестовой задачи. В этом случае значение невязки $\varepsilon = 10^{-2}$, число итераций 457, максимальная значение ошибки в норме $\|T_{err}(t)\|_{Ch}$ составляет 5×10^{-3}.

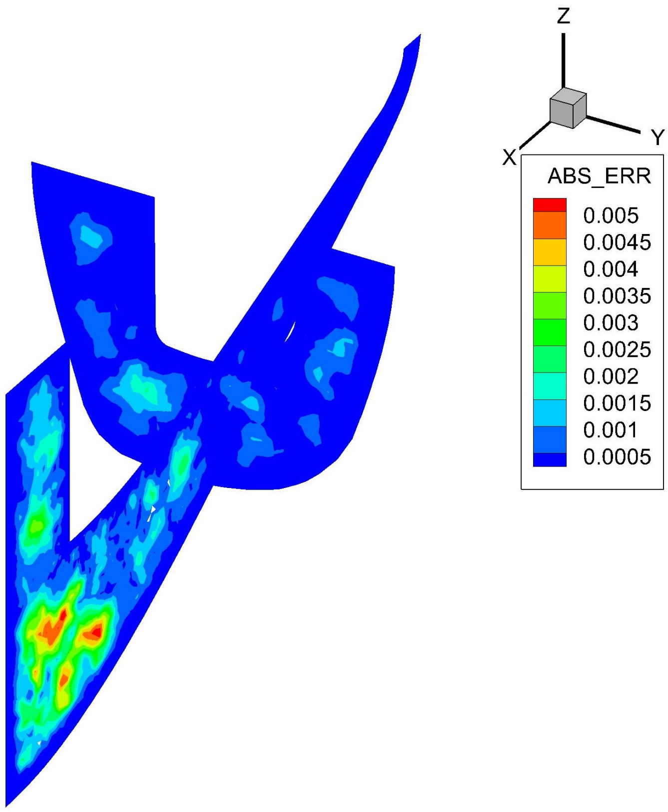


Рис. 2. Распределение величины ошибки в норме $\|T_{err}(t)\|_{Ch}$

5. Заключение

В работе сделано математическое описание 3D численного метода решения эллиптических дифференциальных уравнений (на неструктурированных расчетных сетках), который основывается нелинейной компактно-полиномиальной вычислительной схеме [39] и приближенном переходе от эллиптического уравнения к гиперболическому варианту уравнений. Для нахождения решения гиперболического варианта эллиптического уравнения выполнен переход (в окрестности расчетной ячейки Ω_i) в локальную криволинейную систему координат, а также применен метод контрольного объема (этап «корректора»). Отметим, что при «реконструкции» решения (на этапе «корректор») в пределах расчетной ячейки Ω_i учтено, что вдоль направлений $q^i = (\xi, \eta, \zeta)$ (на этапе «предиктор») уже найдены коэффициенты $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i, h_i)$ реконструкции. Поэтому на этом этапе следует найти лишь только перекрестную часть разложения. Приведены результаты первоначального тестирования предложенного численного метода.

Благодарности и ссылки на гранты

Данное исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Минобрнауки России), проект № FSFN-2024-0022.

Литература

1. Libersky L.D., Petschek A.G. Smoothed particles hydrodynamics with strength of materials // Proceedings of The Next Free Language Conference. 1991. Pp. 248–257.
2. Liu Q.H., Sinha B.K. A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations // Geophysics. 2003. Vol. 68, № 5. Pp. 1731–1743.
3. Медин С.А., Паршиков А.Н. Развитие метода SPH и его применение в задачах гидродинамики конденсированных сред // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, № 6. С. 973–980.

4. Aavatsmark I., Eigestad G., Mallison B., Nordbotten J. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness // Num. Meth. for Part. Diff. Eqs. 2008. Vol. 24, no. 5. Pp. 1329–1360.
5. Brezzi F., Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 1991.
6. Пергамент А. Х., Семилетов В. А. Метод опорных операторов для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными коэффициентами в анизотропных средах // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 5. С. 105–115.
7. Lipnikov K., Gyrya V. High-order mimetic finite difference method for diffusion problem on polygonal meshes // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227. Pp. 8841–8854.
8. Василевский Ю. В., Капырин И. В. Две схемы расщепления для нестационарной задачи конвекции-диффузии на тетраэдральных сетках // Ж. Выч. Мат. и Мат. Физ. 2008. Т. 48, № 8. С. 1429–1447.
9. Капырин И. В. Семейство монотонных методов численного решения трёхмерных задач диффузии на неструктурированных тетраэдральных сетках // Доклады Академии Наук. 2007. Т. 416, № 5. С. 588–593.
10. Danilov A., Vassilevski Yu. A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009. Vol. 24, no. 3. Pp. 207–227.
11. LePotier C. Schema volumes finis monotone pour des operateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangle non structures // C. C. Acad. Sci. Paris, 2005. Vol. 341. Pp. 787–792.
12. LePotier C. Finite volume scheme satisfying maxcimum and minimum principles for anisotropic diffusion operators // Finite Volumes for Complex Applications / Ed. by R. Eymard, J.-M. H´erard. 2008. Pp. 103–118.
13. Lipnikov K., Svyatskiy D., Shashkov M., Vassilevski Yu. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes // J. Comp. Phys. 2007. Vol. 227. Pp. 492–512.
14. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228, no. 3. Pp. 703–716.
15. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu. A monotone finite volume method for advection-diffusion equations on unstructured polygonal meshes // J. Comp. Phys. 2010. Vol. 229. Pp. 4017–4032.
16. Nikitin K., Vassilevski Yu. A monotone finite folume method for advection-diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2010. Vol. 25, no. 4. Pp. 335–358.
17. Yuan A., Sheng Z. Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes // J. Comp. Phys. 2008. Vol. 227, no. 12. Pp. 6288–6312.
18. Данилов А. А. Технология построения неструктурированных сеток и монотонная дискретизация уравнения диффузии: Кандидатская диссертация / ИВМ РАН. Москва, 2010.
19. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
20. Balsara D.S., Shu C.W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 160. Pp. 405–452.
21. De la Puente J., Kaser M., Dumbser M., Igel H. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV: Anisotropy // Geophysical Journal International. 2007. Vol. 169. Pp. 1210–1228.
22. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
23. Толстых А.И. О построении схем заданного порядка с линейными комбинациями операторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 40, № 8. С. 1206–1220.

24. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // Доклады Академии Наук. 2010. Т. 430, № 4. С. 1–5.
25. Михайловская М. Н., Рогов Б. В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 32, № 4. С. 672–695.
26. Холодов А. С. О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1601–1620.
27. Холодов А. С., Холодов Я. А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 9. С. 1638–1667.
28. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд. "Мир", 1975. 872 с.
29. Новацкий В. Волновые задачи теории пластичности. М.: Изд. "Мир", 1978. 307 с.
30. Hsu C.-J., Schoenberg M. Elastic waves through a simulated fractured medium // Geophysics. 1993. Vol. 58, № 7. Pp. 964–977.
31. Thomsen L. Weak elastic anisotropy // Geophysics. 1986. Vol. 51, № 10. Pp. 1954–1966.
32. Thomsen L. Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rock // Geophysical Prospecting. 1995. № 43. Pp. 805–829.
33. Winterstein D.F. Velocity anisotropy terminology for geophysicists // Geophysics. 1990. Vol. 55. Pp. 1070–1088.
34. Kuzenov V. V., Dobrynina A. O., Shumaev V. V., Starostin A. V. Numerical analysis of the effects of intense energy flows on a cylindrical target in a magnetic field // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1686. P. 012021.
35. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Starostin A. V. Development of a Mathematical Model and the Numerical Solution Method in a Combined Impact Scheme for MIF Target // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 16, issue 2. Pp. 325–341. DOI: 10.20537/nd200207
36. Кузенов В. В., Рыжков С. В. Численное моделирование процесса лазерного сжатия мишени, находящейся во внешнем магнитном поле // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 9. С. 19–32.
37. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений (том 1), М.: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
38. Кузенов В. В., Шумаев В. В. Разработка методики и моделирование отдельных характеристик мишени магнитно-инерциального синтеза при комбинированном воздействии // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Т. 20, вып. 4. http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/843/
39. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V. Development of a method for solving elliptic differential equations based on a nonlinear compact-polynomial scheme // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2024. Vol. 451. https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116098
40. Кузенов В. В., Рыжков С. В. Численный анализ и вычислительные модели в плотной и разреженной плазме: монография. М.: Русайнс, 2024. 520 с.
41. Гасилов В. А., Москаленко Р. Д. Стабилизированная сеточно-характеристическая схема для системы уравнений переноса излучения // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2023. N 44. DOI: 10.20948/prepr-2023-44
42. Суржиков С. Т. Радиационно-конвективный нагрев марсианского аппарата EDL MSL под углом атаки // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2015. Т. 16, вып. 2. http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/604/
43. Суржиков С. Т., Шувалов М. П. Анализ радиационно-конвективного нагрева четырех типов спускаемых космических аппаратов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15, вып. 4. http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/237/

References

1. Libersky L. D., Petschek A. G., Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials, *Proceedings of The Next Free Language Conference*, 1991, vol. 395, pp. 248–257. DOI:10.1007/3-540-54960-9_58
2. Liu Q. H., Sinha B. K., A 3D cylindrical PML/FDTD method for elastic waves in fluid-filled pressurized boreholes in triaxially stressed formations, *Geophysics*, 2003, vol. 68, № 5, pp. 1731–1743. https://doi.org/10.1190/1.1620646
3. Medin S. A., Parshikov A. N., Development of smoothed particle hydrodynamics method and its application in the hydrodynamics of condensed matter, *High Temperature*, 2010, vol. 48, no. 6, pp. 926–933. https://doi.org/10.1134/S0018151X10060210 [in Russian].
4. Aavatsmark I., Eigestad G., Mallison B., Nordbotten J., A compact multipoint flux approximation method with improved robustness, *Num. Meth. for Part. Diff. Eqs*., 2008, vol. 24, no. 5, pp. 1329–1360. DOI: 10.1002/num.20320
5. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. New York: Springer-Verlag, 1991.
6. Pergament A. Kh., Semiletov V. A., Support Operator Method for Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems with Discontinuous Coefficients in Anisotropic Media, *Mathematical Modeling*, 2007, vol. 19, No. 5, pp. 105–115 [in Russian].
7. Lipnikov K., Gyrya V., High-order mimetic finite difference method for diffusion problem on polygonal meshes, *J. Comp. Phys*., 2008, vol. 227, pp. 8841–8854. DOI:10.1016/j.jcp.2008.06.028
8. Vasilevsky Yu. V., Kapyrin I. V., Two splitting schemes for a nonstationary convection-diffusion problem on tetrahedral meshes, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 8, pp. 1429–1447. DOI: 10.1134/S0965542508080071 [in Russian].
9. Kapyrin I. V., A Family of monotone methods for the numerical solution of three-dimensional diffusion problems on unstructured tetrahedral meshes, *Doklady Math.*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 734–738. DOI:10.1134/S1064562407050249 [in Russian].
10. Danilov A., Vassilevski Yu., A monotone nonlinear finite volume method for diffusion equations on conformal polyhedral meshes, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling*, 2009, vol. 24, no. 3, pp. 207–227. DOI: 10.1515/RJNAMM.2009.014
11. LePotier C., Schema volumes finis monotone pour des operateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages de triangle non structures, *C. C. Acad. Sci. Paris*, 2005, vol. 341, pp. 787–792. DOI:10.1016/j.crma.2005.10.010
12. LePotier C., Finite volume scheme satisfying maxcimum and minimum principles for anisotropic diffusion operators, *Finite Volumes for Complex Applications* / Ed. by R. Eymard, J.-M. H´erard. 2008, pp. 103–118.
13. Lipnikov K., Svyatskiy D., Shashkov M., Vassilevski Yu., Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes, *J. Comp. Phys*., 2007, vol. 227, pp. 492–512.
14. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu., Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes, *J. Comp. Phys*., 2009, vol. 228, no. 3, pp. 703–716. DOI:10.1016/j.jcp.2008.09.031
15. Lipnikov K., Svyatskiy D., Vassilevski Yu., A monotone finite volume method for advection-diffusion equations on unstructured polygonal meshes, *J. Comp. Phys*. 2010, vol. 229, pp. 4017–4032. DOI:10.1016/j.jcp.2010.01.035
16. Nikitin K., Vassilevski Yu., A monotone finite folume method for advection-diffusion equations on unstructured polyhedral meshes in 3D, Russ. *J. Numer. Anal. Math. Modeling*, 2010, vol. 25, no. 4, pp. 335–358. DOI 10.1515/ RJNAMM.2010.022
17. Yuan A., Sheng Z., Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes, *J. Comp. Phys*., 2008, vol. 227, no. 12, pp. 6288–6312. DOI:10.1007/s10915-018-0651-8

18. Danilov A. A., Technology of constructing unstructured grids and monotone discretization of the diffusion equation: PhD dissertation / ICM RAS. Moscow, 2010 [in Russian].
19. Kulikovsky A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu., *Mathematical issues of numerical solution of hyperbolic systems of equations*. Moscow: FIZMATLIT, 2001. 608 p [in Russian]. https://doi.org/10.1201/9781482273991
20. Balsara D. S., Shu C. W., Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy, *Journal of Computational Physics*, 2000, vol. 160, pp. 405–452. DOI:10.1006/jcph.2000.6443
21. De la Puente J., Kaser M., Dumbser M., Igel H., An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes IV: Anisotropy, *Geophysical Journal International*, 2007, vol. 169, pp. 1210–1228. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2006.03193.x
22. Tolstykh A. I., *Compact difference schemes and their application in aerohydrodynamics problems*. Moscow: Nauka, 1990. 230 p. [in Russian].
23. Tolstykh A. I., On the construction of schemes of a given order with linear combinations of operators, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, No. 8, pp. 1159–1172. DOI:10.1134/s0965542516060221
24. Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N., Fourth-order accurate bicompact schemes for hyperbolic equations, *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, No. 1, pp. 146–150 [in Russian]. DOI: 10.1134/S1064562410010400
25. Mikhailovskaya M. N., Rogov B. V., Monotone compact schemes of running calculation for systems of equations of hyperbolic type, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 672–69 [in Russian]. DOI:10.1134/s09655425120401245
26. Kholodov A. S., On the construction of difference schemes of a higher order of accuracy for equations of hyperbolic type, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, no. 6, pp. 234–253 [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90017-8
27. Kholodov A. S., Kholodov Ya. A., On Monotonicity Criteria for Difference Schemes for Hyperbolic Equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 9, pp. 1560–1588 [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542506090089
28. Novatsky V., *Theory of Elasticity*. Moscow: Mir Publishing House, 1975, 872 p. [in Russian]. DOI: 10.1007/bf00888613
29. Novatsky V., *Wave Problems in Plasticity Theory*. Moscow: Mir Publishing House, 1978. 307 p. [in Russian].
30. Hsu C.-J., Schoenberg M., Elastic Waves through a Simulated Fractured Medium, *Geophysics*, 1993, vol. 58, no. 7, pp. 964–977. DOI: 10.1190/1.1443487
31. Thomsen L., Weak elastic anisotropy, *Geophysics*, 1986, vol. 51, no. 10, pp. 1954–1966. DOI:10.1190/1.1442051
32. Thomsen L., Elastic anisotropy due to aligned cracks in porous rocks, *Geophysical Prospecting*, 1995, no. 43, pp. 805–829. https://doi.org/10.1190/1.1891932
33. Winterstein D. F., Velocity anisotropy terminology for geothysicists, *Geophysics*, 1990, vol. 55, pp. 1070–1088. DOI:10.1190/1.1442919
34. Kuzenov V. V., Dobrynina A. O., Shumaev V. V., Starostin A. V., Numerical analysis of the effects of intense energy flows on a cylindrical target in a magnetic field, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1686, pp. 012021. DOI: 10.1088/1742-6596/1686/1/012021
35. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Starostin A. V., Development of a Mathematical Model and the Numerical Solution Method in a Combined Impact Scheme for MIF Target, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics,* 2020, vol. 16, issue 2, pp. 325–341. DOI: 10.20537/nd200207

36. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Numerical modeling of laser target compression in an external magnetic field, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2018, vol. 10, pp. 255–264 [in Russian]. DOI: https://doi.org/10.1134/S2070048218020096
37. Berezina I. S., Zhidkov N. P., Methods of calculations (volume 1), Moscow: GIFML, 1962, 464 p. [in Russian].
38. Kuzenov V. V., Shumaev V. V., Development of methods and modeling of individual characteristics of the target of magnetic inertial synthesis under combined exposure, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2019, vol. 20, issue 4. [in Russian]. http://chemphys.edu.ru/issues/2019-20-4/articles/843/ doi.org/10.33257/PhChGD.20.4.843
39. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., Varaksin A. Yu., Development of a Method for Solving Elliptic Differential Equations Based on a Nonlinear Compact-Polynomial Scheme, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2024, vol. 451, pp. 116098. https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116098
40. Kuzenov V. V., Ryzhkov S. V., *Numerical analysis and computing models in dense and rare plasma*, Moscow, RuScience, 2024 [in Russian].
41. Gasilov V. A., Moskalenko R. D., Stabilized grid-characteristic scheme for the system of radiative transfer equations, Keldysh Institute Preprints, 2023, no. 44 [in Russian]. DOI: 10.20948/prepr-2023-44
42. Surzhikov S. T., Radiative-convective heating of the EDL MSL Martian spacecraft at an angle of attack, *Physical-chemical kinetics in gas dynamics*, 2015, vol. 16, issue 2 [in Russian]. http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/604/
43. Surzhikov S. T., Shuvalov M. P., Analysis of radiative-convective heating of four types of descent spacecraft, *Physical-chemical kinetics in gas dynamics*, 2014, vol. 15, issue 4 [in Russian]. http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-4/articles/237/

Статья поступила в редакцию 14 января 2025 г.