

Numerical Simulation of Gas-Dispersed Dilute Flows using the Continuum Approach

I. A. Kryukov² I. E. Ivanov^{1,3}

¹ Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

² Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow, 119526, Russia

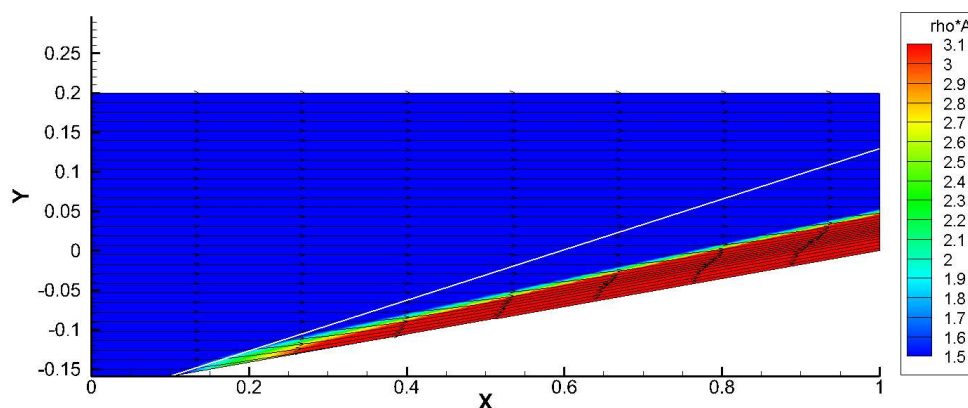
³ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

kryukov@ipmnet.ru

Abstract

A computational algorithm for calculating flows of nonequilibrium gas-dispersed media (gas-solid particles, gas-liquid droplets) with a low volume concentration of the dispersed phase has been developed. Within the Euler-Euler approach, a completely continuous description of a two-phase medium is implemented based on the mathematical model for two-phase flows by A. Chinnayya, R. Saurel, Q. Carmouze (2016). The effect of relaxation of pressure and phase velocities was taken into account during the interaction of phases. The computational algorithm is based on the high-resolution Godunov method and HLL Riemann solver. The main attention is paid to taking into account the influence of the velocity nonequilibrium (slip) of phases on the relative position of the trajectories of particles and the gas phase, as well as on the interaction of the dispersed phase with solid walls. Test calculations were carried out in the case of a one-dimensional flow of a two-phase medium and methodical studies were conducted on the influence of particle size and volume fraction of the dispersed phase on the structure and parameters of gas-dispersed flows in two-dimensional regions limited by solid surfaces.

Keywords: two-phase flow, gas-dispersed flow, Godunov method, Euler and Lagrange approaches, motion trajectories.



Results of the numerical simulation of a gas-dispersed diluted two-phase flow at a compression angle of 10° . Partial density $\alpha_g \rho_g$ field and streamlines (black lines) of the gas phase for $d_l = 10^{-4} \text{ m}$, $\alpha_l = 0.1$

УДК 519.633 533.6.011

Численное моделирование газодисперсных разбавленных течений с использованием континуального подхода

И. А. Крюков², И. Э. Иванов^{1,3}

¹ *Московский государственный университет,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, Москва, 119526, пр-т Вернадского, 101, корп. 1*

³ *Московский авиационный институт,
Россия, Москва, 125993, Волоколамское шоссе, 4
kryukov@ipmnet.ru*

Аннотация

Разработан вычислительный алгоритм расчета течений неравновесных газодисперсных сред (газ-твердые частицы, газ-жидкие капли) с малой объемной концентрацией дисперсной фазы. В рамках Эйлер-Эйлера подхода реализуется полностью континуальное описание двухфазной среды на базе математической модели для течений двухфазных сред A. Chinnayya, R. Saurel, Q. Carmouze (2016). При взаимодействии фаз учитывались эффект релаксации давления и скоростей фаз. Вычислительный алгоритм использует метод Годунова повышенного порядка точности и метода HLL для решения задачи Римана. Основное внимание уделяется учету влияния скоростной неравновесности (скольжению) фаз на соотношение траекторий движения частиц и газовой фазы, а также на взаимодействие дисперсной фазы с твердыми стенками. Проведены тестовые расчеты в случае одномерного течения двухфазной среды и методические исследования влияния размера частиц и объемной доли дисперсной фазы на структуру и параметры газодисперсных течений в двумерных областях, ограниченных твердыми поверхностями.

Ключевые слова: двухфазное течение, газодисперсный поток, метод Годунова, Подход Эйлера и Лагранжа, траектории движения.

1. Введение

Потоки многофазных сред – частое встречаемое явление в природе и технике. Необходимость расчета двухфазных и многофазных потоков возникает при изучении течений в трактах энергетических установок, в камерах сгорания и соплах ракетных двигателей, в межлопаточных зазорах паровых турбин, в холодильных машинах, аппаратах очистки газовых потоков от примесей и т.п.

В настоящее время существуют большое количество методов для моделирования многофазных течений [1–5]. В данной работе рассматриваются, двухфазные, монодисперсные потоки (газ-твердые частицы, газ-жидкие капли). Плотность дисперсной фазы превышает плотность несущей фазы более чем в 1000 раз, при объемной доле дисперсной фазы порядка $0.0001 \div 0.01$ (“разбавленные” течения).

Динамика потока, а, следовательно, и выбор подходящей математической модели для течений в данном диапазоне характеристик определяется размером частиц (капель) или, что равнозначно, временем релаксации τ . Для некоторых частных случаев течения время релаксации можно приближенно определить, как время, за которое частица перейдет из одного

состояния механического равновесия (скоростного) с несущим газом в другое состояние равновесия при мгновенном (быстром) изменении параметров состояния несущего газа. Диапазон возможных подходов к моделированию двухфазных течений в зависимости от возрастания величины времени релаксации τ при фиксированной концентрации частиц можно определить следующим образом [6]:

1. *Модели с эффективной (модифицированной) плотностью (модель гомогенного двухфазного потока).*
2. *Эйлеров подход.*
3. *Лагранжев подход.*
 - 3.а. *Метод супер частиц.*
4. *Метод полного разрешения течения.*

При очень малых размерах частиц, нет скоростного отставания частиц и можно считать течение практически однофазным, с единым скоростным полем и с некоторой усредненной модифицированной плотностью среды – это *модель гомогенного двухфазного потока*. При увеличении размера частиц их инерционность возрастает и скоростные поля дисперсной и несущей фаз различаются и в пространстве, и во времени. При этом количество частиц может быть столь велико, что для описания их динамики возможно континуальное описание. В этой ситуации удобно использовать *Эйлеров (Эйлеров-Эйлеров)* подход, когда и несущая, и дисперсная фазы описываются как сплошные среды. В рамках этого подхода значительное развитие получила модель взаимопроникающих континуумов [1–5, 7–11]. В этом подходе решаются уравнения сохранения массы импульса и энергии для каждой фазы. Взаимодействие фаз учитывается через члены уравнений в правых частях, описывающих трение, тепло-массообмен фаз и эффект выравнивания давления. Метод моделирования фазового взаимодействия определяется в зависимости от типа двухфазного течения и использует в основном эмпирические зависимости. Эволюция поля скорости дисперсной фазы получается путем осреднения (по времени, по пространству или по реализациям) по всем возможным скоростям частиц в точке пространства. Учет полидисперсности в *Эйлер-Эйлеровом* подходе весьма вычислительно затратен и основан на аппроксимации функции распределения частиц по размерам с помощью кусочно-постоянной функции. При этом для каждого размера частиц вводится своя объемная концентрация и свой набор уравнений, описывающих эволюцию параметров для частиц данного размера.

При дальнейшем увеличении диаметра частиц (при сохранении их объемной доли) два процесса становятся критически важными: – уменьшение счетной плотности частиц и - возрастание инерционности частиц. Уменьшение общего количества частиц в единице объема приводит к трудностям применения континуального приближения для частиц, из-за редких столкновений частиц между собой и, вследствие этого, отсутствия давления в “газе” частиц. Большая инерционность частиц приводит к значительным отличиям траекторий движения несущего газа и частиц и возникновению ситуации, когда в одну точку пространства могут попадать траектории частиц из разных точек пространства. В этом случае удобно использовать *Лагранжев (Эйлеров-Лагранжев)* подход, когда несущая фаза описывается в рамках подхода Эйлера как сплошная среда, а дисперсная фаза - в рамках подхода Лагранжа, в котором частицы отслеживаются индивидуально. Трудозатратность этого подхода пропорциональна количеству отслеживаемых частиц. По сравнению с *Эйлеровым* подходом в этом случае возможно получить более детальную информацию о траекториях частиц (учет пересечения траекторий частиц, взаимодействие частиц со стенкой и т.д.) без использования процедуры осреднения скорости в каждой точке пространства. Движение частиц описывается в рамках механики твердого тела, где силы и моменты, действующие на частицу со стороны несущего газа, определяются по эмпирическим соотношениям (типа формулы Стокса) с учетом формального размера частицы. Если частиц слишком много для *Лагранжева* подхода, но они слишком тяжелые для *Эйлерова* подхода, то для их расчета можно использовать метод *Супер-частиц*, в котором каждая расчетная частица представляет собой некоторое объединение большого количества реальных частиц.

При дальнейшем отслеживании главного тренда на возрастание размера частиц, течение вокруг частицы становится очень сложным (вихревое течение, турбулентность, воздействие вихревого следа одной частицы на другую – коллективные эффекты) и простые эмпирические соотношения, используемые в *Лагранжевом* подходе, не удовлетворяют требованиям адекватности моделирования. В таком случае следует решать задачу однофазного течения в области со многими движущимися под воздействием газовой среды, гравитации и т.п. телами (частицами) – *метод полного разрешения течения*. Требуется подробная динамическая расчетная сетка, позволяющая разрешить все необходимые в задаче пространственные и временные масштабы. Практически в такой задаче решение сводится к прямому численному моделированию течения газа в области, содержащей твердые тела.

В общем *Эйлерово-Лагранжевом* подходе дисперсная фаза рассматривается как набор материальных точек, координаты которых совпадают с центрами тяжести отдельных частиц. Размер частицы влияет только на определение силы трения, массу и момент инерции частицы. В большинстве методов для определения динамики многофазных потоков, моделирование межфазного взаимодействия является одной из самых сложных задач. Математические модели расчета параметров многофазных потоков можно классифицировать по возрастающей сложности в соответствии с иерархией проблем в отношении взаимодействия фаз.

Такая иерархия уровней часто обозначается в англоязычной литературе как одно-, двух- и четырехстороннее взаимодействие [9]. В этой же работе [9], где используется *Лагранжев* метод отслеживания частиц, устанавливаются пределы между каждым уровнем взаимодействия.

В наиболее широком смысле одностороннее взаимодействие происходит, когда частицы оказывают незначительное влияние на окружающую их газовую среду. Это наблюдается, когда объемная и массовая доли дисперсной фазы малы. В этом случае воздействие частиц на газовую фазу значительно меньше, чем другие источники возмущений в потоке и поэтому этими воздействиями можно пренебречь. В русскоязычной технической литературе данная ситуация называется расчетом многофазных течений без обратного влияния частиц на газ (метод траекторий, метод пробных частиц). Те течения, в которых присутствие твердой или жидкой фазы оказывает сильное воздействие на окружающий газ, служат примером двусторонней связи. Можно выделить три основных механизма влияния дисперсной фазы на несущую фазу. Это эффект влияния объемной доли дисперсной фазы, эффект скольжения (разности скоростей) фаз, который приводит к заметному изменению импульса несущей фазы, и эффект воздействия частиц или капель на напряженное состояние и деформацию газовой среды, то есть существенное изменение вязкости газовой среды как ламинарной, так и турбулентной. Четырехсторонняя связь вычислительно реализуется путем учета столкновений между парами соприкасающихся частиц.

В *Эйлеровом* подходе органично реализуется в основном двух- и четырехстороннее взаимодействие фаз.

В настоящей работе для моделирования разбавленных газодисперсных потоков используется *Эйлеров* подход, основанный на системе уравнений из [5] и модифицированной в [7]. Основное внимание уделяется вопросам, связанным с моделированием тяжелых частиц, эффекту скольжению фаз, взаимодействию каждой фазы с твердой поверхностью и представлению скоростных и концентрационных полей дисперсной и несущей фазы.

2. Физическая и математическая модель динамики двухфазного течения

В данной работе рассматривается модифицированная математическая модель двухфазного невязкого течения в двумерном случае, состоящая из девяти уравнений (1). Эта математическая модель, описывающая ситуацию, когда каждая фаза образована чистым веществом в газовом, жидком или твердом состоянии, предложена и развита в [10, 11]. Правые части уравнений системы (1) содержат слагаемые, которые описывают релаксацию давлений и скоростей фаз и представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \nabla (\vec{U}_i \cdot \alpha_l) &= \mu (P_l - P_g), \\
 \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_l \rho_l \vec{U}_l) &= 0, \\
 \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_l \rho_l u_l \vec{U}_l) + \frac{\partial p_l}{\partial x} &= P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} - \lambda (u_l - u_g), \\
 \frac{\partial \alpha_l \rho_l v_l}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_l \rho_l v_l \vec{U}_l) + \frac{\partial p_l}{\partial y} &= P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} - \lambda (v_l - v_g), \\
 \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} + \operatorname{div} [(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l p_l) \vec{U}_l] &= P_i \operatorname{div} (\vec{U}_i \alpha_l) - \lambda [\vec{U}_i \cdot (\vec{U}_l - \vec{U}_g)] + \mu P_i (p_g - p_l), \\
 \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_g \rho_g \vec{U}_g) &= 0, \\
 \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_g \rho_g u_g \vec{U}_g) + \frac{\partial p_g}{\partial x} &= P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda (u_l - u_g), \\
 \frac{\partial \alpha_g \rho_g v_g}{\partial t} + \operatorname{div} (\alpha_g \rho_g v_g \vec{U}_g) + \frac{\partial p_g}{\partial y} &= P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} + \lambda (v_l - v_g), \\
 \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \operatorname{div} [(\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g) \vec{U}_g] &= P_i \operatorname{div} (\vec{U}_i \alpha_g) + \\
 + \lambda [\vec{U}_i \cdot (\vec{U}_l - \vec{U}_g)] - \mu P_i (p_g - p_l), & \quad (1)
 \end{aligned}$$

где g – индекс, обозначающий параметры газовой фазы, а l – индекс, обозначающий параметры твердой (жидкой) фазы; α_g, α_l – объемные доли газовой и жидкой фаз; p_k, ρ_k ($k = g, l$) – давление и плотности фаз; $\vec{U}_g = (u_g, v_g)$ и $\vec{U}_l = (u_l, v_l)$ – локальные скорости движения фаз; $\vec{U}_i = (U_i, V_i)$ – скорость движения границы раздела фаз (интерфейсная скорость); P_i – давление двухфазной смеси вблизи границы раздела фаз (интерфейсное давление); E_g, E_l – полные энергии фаз в единице массы.

Члены в правых частях уравнений представляют релаксацию давлений между фазами с коэффициентом μ , релаксацию скорости с коэффициентом λ . Обмен энергией между фазами за счет разности температур на данном этапе в модели не учитывался. Таким образом, только условия релаксации давления и скорости рассматриваются как эффекты взаимодействия.

Система уравнений (1) несколько отличается от аналогичной системы из [7]. Во-первых, первое уравнение описывает эволюцию объемной доли конденсированной фазы, а не газовой фазы как в [7], во-вторых, левая часть этого уравнения записана в дивергентном виде. Так же следует отметить, что эта модель динамики двухфазных потоков справедлива только в пределе бесконечной релаксации давления ($\mu \rightarrow \infty$) [10].

Важным моментом для численного решения системы (1) имеет определение значений интерфейсных параметров P_i и $\vec{U}_i$, которое может производиться с помощью разных алгоритмов:

- в работе [7] предлагается определять эти величины по средневзвешенным по фазам значениям

$$\vec{U}_i = \frac{\alpha_l \rho_l u_l + \alpha_g \rho_g u_g}{\alpha_l \rho_l + \alpha_g \rho_g}, \quad P_i = \alpha_l P_l + \alpha_g P_g; \quad (2)$$

- при моделировании течений газозвесей часто используется соотношения [11]:

$$\vec{U}_i = \vec{U}_l \text{ и } P_i = p_g; \quad (3)$$

- иногда межфазные (интерфейсные) давление и скорость определяются следующим образом [12]:

$$P_i = \frac{z_g p_l + z_l p_g}{z_l + z_g}, \quad U_i = \frac{z_g u_l + z_l u_g}{z_l + z_g}, \quad (4)$$

где $z_k = \rho_k c_k$ – акустический импеданс компонента $k = g, l$; c_k – скорость звука в k -й фазе.

- для “разбавленных” смесей (с малой долей конденсированной фазы) [10,11]:

$$\vec{U}_i = \vec{U}_l \text{ и } P_i = p_l. \quad (5)$$

3. Алгоритмическая модель для двумерных нестационарных задач. Численный метод

Система уравнений (6) описывает нестационарное двумерное (плоское или осесимметричное) течение двухфазной среды. Система (6) основывается на подходе взаимопроникающих континуумов и реализует вариант модели [7].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha_l}{\partial t} + \frac{\partial U_l \alpha_l}{\partial x} + \frac{\partial V_l \alpha_l}{\partial y} = \mu(p_l - p_g), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l v_l}{\partial y} = -v \frac{\alpha_l \rho_l v_l}{y}, \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l v_l}{\partial y} = -v \frac{\alpha_l \rho_l u_l v_l}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} - \lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l v_l}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l v_l}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_l \rho_l v_l^2 + \alpha_l p_l)}{\partial y} = -v \frac{\alpha_l \rho_l v_l^2}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_l}{\partial y} - \lambda(v_l - v_g), \\ \frac{\partial \alpha_l \rho_l E_l}{\partial t} + \frac{\partial u_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l p_l)}{\partial x} + \frac{\partial v_l (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_l p_l)}{\partial y} = -v \frac{(\alpha_l p_l + \alpha_l \rho_l E_l)}{y} + \\ + P_i \frac{\partial U_l \alpha_l}{\partial x} + P_i \frac{\partial V_l \alpha_l}{\partial y} - \lambda U_l (u_l - u_g) - \lambda V_l (v_l - v_g) + \mu P_i (p_g - p_l), \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g v_g}{\partial y} = -v \frac{\alpha_g \rho_g v_g}{y}, \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g v_g}{\partial y} = -v \frac{\alpha_g \rho_g u_g v_g}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \lambda(u_l - u_g), \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g v_g}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_g \rho_g u_g v_g}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_g \rho_g v_g^2 + \alpha_g p_g)}{\partial y} = -v \frac{\alpha_g \rho_g v_g^2}{y} + P_i \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} + \lambda(v_l - v_g), \\ \frac{\partial \alpha_g \rho_g E_g}{\partial t} + \frac{\partial u_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g)}{\partial x} + \frac{\partial v_g (\alpha_g \rho_g E_g + \alpha_g p_g)}{\partial y} = -v \frac{(\alpha_g p_g + \alpha_g \rho_g E_g)}{y} + \\ + P_i \frac{\partial U_l \alpha_g}{\partial x} + P_i \frac{\partial V_l \alpha_g}{\partial y} + \lambda U_l (u_l - u_g) + \lambda V_l (v_l - v_g) - \mu P_i (p_g - p_l) \end{array} \right. \quad (6)$$

В системе (6) $\nu = 0$ для плоского течения и $\nu = 1$ для осесимметричного.

Полные энергии потока фазы в единице массы фазы $E_k = e_k + 1/2(u_k^2 + v_k^2)$, скорость звука $c_k = \left(\frac{p_k}{\rho_k^2} - \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \Big|_{p_k} \right) / \frac{\partial e_k}{\partial p_k} \Big|_{\rho_k}$.

Используется двучленные калорическое и термическое уравнения состояния для каждой фазы отдельно

$$e_k = \frac{p_k + \gamma_k p_{k\infty}}{(\gamma_k - 1)\rho_k}, \quad \frac{p_k + p_{k\infty}}{\rho_k} = R_k T_k \quad (7)$$

В этом случае скорость звука определяется из соотношения

$$c_k = \sqrt{\gamma_k \frac{(p_k + p_{k\infty})}{\rho_k}}$$

Для интерфейсных параметров используются соотношения (2)–(5).

3.1. Численный метод

Системы уравнений (6,7) данной работы решаются с помощью метода расщепления по физическим процессам. На каждом шаге алгоритма расщепления решается подсистема общей системы уравнений, описывающая свой физический процесс: газодинамический, межфазную релаксацию давления, релаксацию скорости, релаксацию температуры (в данной работе не учитывается), учет фактора осесимметричности. При этом каждая подсистема аппроксимируется с помощью уникальной численной схемы. Так, газодинамическая часть системы аппроксимируется с использованием численной схемы Годунова повышенного порядка точности с приближенным решением задачи Римана (методы HLL [15,16], RSIR [17], HLLC [18]).

Численный алгоритм решения системы (6, 7) подробно описан в публикациях [12, 13].

3.2. Граничные условия на твердой стенке для двухфазных потоков

Задание корректных, физически и математически обусловленных граничных условий требует учета характеристических свойств системы уравнений или, по крайней мере, учета направлений распространения возмущений вблизи границы. При численном решении задачи об обтекании двухфазным потоком поверхностей или при расчете течения двухфазной смеси в каналах важным становится установление граничных соотношений для определения параметров течения на твердой стенке.

Для тяжелых частиц (большого времени релаксации τ_v частиц) реализуется большая механическая неравновесность между фазами, что приводит к сильному отличию траекторий движения газа и частиц. Особенно сильно скоростная неравновесность фаз сказывается в пристеночных течениях, в которых частицы в ряде случаев могут попадать на стенку и взаимодействовать с ней. В зависимости от того, какие условия взаимодействия частиц со стенкой надо моделировать, возможны два варианта постановки граничных условий в лагранжевом представлении дисперсной фазы.

В первом варианте (А) частица при ударе о стенку зеркально от нее отражается (“отскок” от стенки). Тогда такие частицы, передав часть импульса стенке, остаются в расчетной области. Эта ситуация характерна для частиц - абсолютно упругих твердых сфер. Так же этот случай в лагранжевом описании характеризуется многочисленными пересечениями траекторий частиц, падающих на стенку и отраженных от стенки.

Во втором случае (Б) – при соударении со стенкой частица остается на стенке (“залипает” на стенке) и тем самым покидают расчетную область. Эта ситуация характерна для частиц – жидких капель сферической формы.

Так как несущая фаза чаще всего моделируется в рамках Эйлера подхода, то граничные условия на твердой стенке для нее в случае течения идеального газа всегда представляются как условия “отсутствия протекания через стенку”, а вязком случае как условия “прилипания”.

При эйлеровом описании дисперсной фазы, граничные условия в варианте “отскока” частиц от стенки моделируются условиями непротекания континуальной фазы частиц сквозь стенку. Математически это означает использование условий симметрии на стенке для параметров: давление, плотность и касательная компонента скорости $\alpha_l^w = \alpha_l^1, p_l^w = p_l^1, \rho_l^w = \rho_l^1, v_{l,\tau}^w = v_{l,\tau}^1$ и антисимметрии для нормальной компоненты скорости $u_{l,n}^w = -u_{l,n}^1$ (верхний индекс “1” относится к параметрам в пристеночной ячейке, индекс “w” относится к параметрам в виртуальной ячейке, нижние индексы “n, τ ” обозначают нормальную и касательную по отношению к стенке компоненты скорости, индекс “l” обозначает дисперсную фазу). В варианте “залипания-протекания” частиц дисперсной фазы на стенке граничные условия моделируются условиями “продолжения решения”. Математически это означает равенство нулю производных по нормали к стенке от всех параметров течения для дисперсной фазы $\frac{\partial p_l}{\partial n} = 0, \frac{\partial \rho_l}{\partial n} = 0, \frac{\partial u_{l,n}}{\partial n} = 0, \frac{\partial v_{l,\tau}}{\partial n} = 0$ на стенке в случае, если нормальная компонента скорости дисперсной фазы в приграничной ячейке направлена в стенку ($u_{l,n}^1, n < 0$ (n – внешняя единичная нормаль к стенке). Если же она направлена от стенки ($u_{l,n}^1, n > 0$), то можно использовать условия отсутствия потока массы из стенки $\alpha_l^w = 0, p_l^w = p_l^1, \rho_l^w = \rho_l^1, v_{l,\tau}^w = v_{l,\tau}^1$ и $u_{l,n}^w = 0$.

Следует отметить, что реализованные простейшие граничные условия на жестких стенках области справедливы в случае сильно разбавленных газо-дисперсных течений, когда рассматривается одно или двухстороннее взаимодействие фаз. В более сложных случаях, например: при рассмотрении четырехстороннего взаимодействия фаз, когда существенно трение частиц друг о друга, или необходимо учитывать турбулентное взаимодействие фаз и сложный обмен импульсами твердой фазы со стенкой из-за шероховатости поверхности, следует использовать более сложные граничные процедуры. Этому вопросу посвящена обширная литература, [19–24]. Большое значение для постановки граничных условий на стенке в газодисперсных течениях имеет работа [20]. В ней сформулированы граничные условия Джонсона-Джексона для тангенциальной скорости твердых тел и флуктуирующей энергии потока несущего газа (из-за турбулентности) на твердой стенке для гранулированного потока. В [20] передача импульса и энергии из-за сталкивающихся частиц характеризуется коэффициентом зеркальности, который играет важную роль в прогнозировании потока дисперсной фазы. Коэффициент зеркальности, изменяется от нуля (гладкие стенки) до единицы (шероховатые стенки). Подробному исследованию моделей турбулентных газодисперсных течений посвящена работа Симонины [21], где также рассматривались разные типы граничных условий на стенке. Наряду с условиями из [20], были исследованы условия типа скольжения-трения. Показано, что для разбавленных газожидкостных потоков взаимодействие частиц со стенкой возле стенки близко к пределу малого трения/полного скольжения Джонсона и Джексона [20] с малым коэффициентом зеркальности или просто к граничному условию свободного скольжения.

Таким образом, в рассматриваемых в данной работе течениях (разбавленных, газодисперсных с твердыми сферическими частицами, с невязкой несущей газовой фазой, гладкой твердой стенкой) для тангенциальной скорости твердых частиц на гладкой твердой стенке

справедливо предположение о коэффициенте зеркальности, стремящемся к нулю или о граничных условиях свободного скольжения, что соответствует условиям отражения (непротекания) дисперсной фазы вариант (А), раздел 2.1) данной работы.

4. Тестирование и валидация численного алгоритма

Кросс-верификационные расчеты проводились для одномерных задач о распаде разрыва в двухфазной смеси. Основное внимание было уделено расчету течений с скольжением фаз друг относительно друга.

4.1. Задача о распаде разрыва

В данном тесте решается одномерная задача о распаде разрыва в канале постоянной ширины [10]. Длина канала 1 м, разрыв помещается в точке с координатами $x = 0.5$ м. Слева от разрыва расположена двухфазная смесь с большим содержанием воды под большим давлением. Параметры двухфазной среды слева от разрыва: $p_g = p_l = 10^7$ Па, $u_g = u_l = 0$ м/с, $\rho_g = 12$ кг/м³, $\rho_l = 1050$ кг/м³, $\alpha_g = 0.9$, $\alpha_l = 0.1$, $\gamma_g = 1.4$, $\gamma_l = 4.4$. Справа от разрыва расположена двухфазная смесь воздуха и воды при атмосферном давлении: $p_g = p_l = 10^5$ Па, $u_g = u_l = 0$ м/с, $\rho_g = 1.2$ кг/м³, $\rho_l = 1050$ кг/м³, $\alpha_g = 0.9$, $\alpha_l = 0.1$, $\gamma_g = 1.4$, $\gamma_l = 4.4$. Эта задача моделирует ситуацию распада разрыва между газо-жидкой смесью без изменения объемной доли каждой фазы на разрыве. Использовалось двухчленное уравнение состояния: $p = (\gamma - 1)\rho e - \gamma p_\infty$, $p_{g,\infty} = 0$ Па, $p_{l,\infty} = 6 \times 10^8$ Па.

Задавалось $N = 100$ ячеек вдоль пространственной координаты и интервал по времени $\Delta t = 0.00002 \Delta x$, где $\Delta x = 1/N$. Получены распределения давления, скорости, плотности и объемной доли для каждой фазы. Особенностью данного расчета является использование процедуры сильной релаксации давления ($\mu \rightarrow \infty$) и отсутствия релаксации скорости ($\lambda = 0$).

На рис. 1 и рис. 2 приведены результаты расчетов при $N = 100$ из работы [10] для момента времени $300 \mu s$, а на рис. 3 и рис. 4 – результаты расчетов из данной работы при $N = 200$.

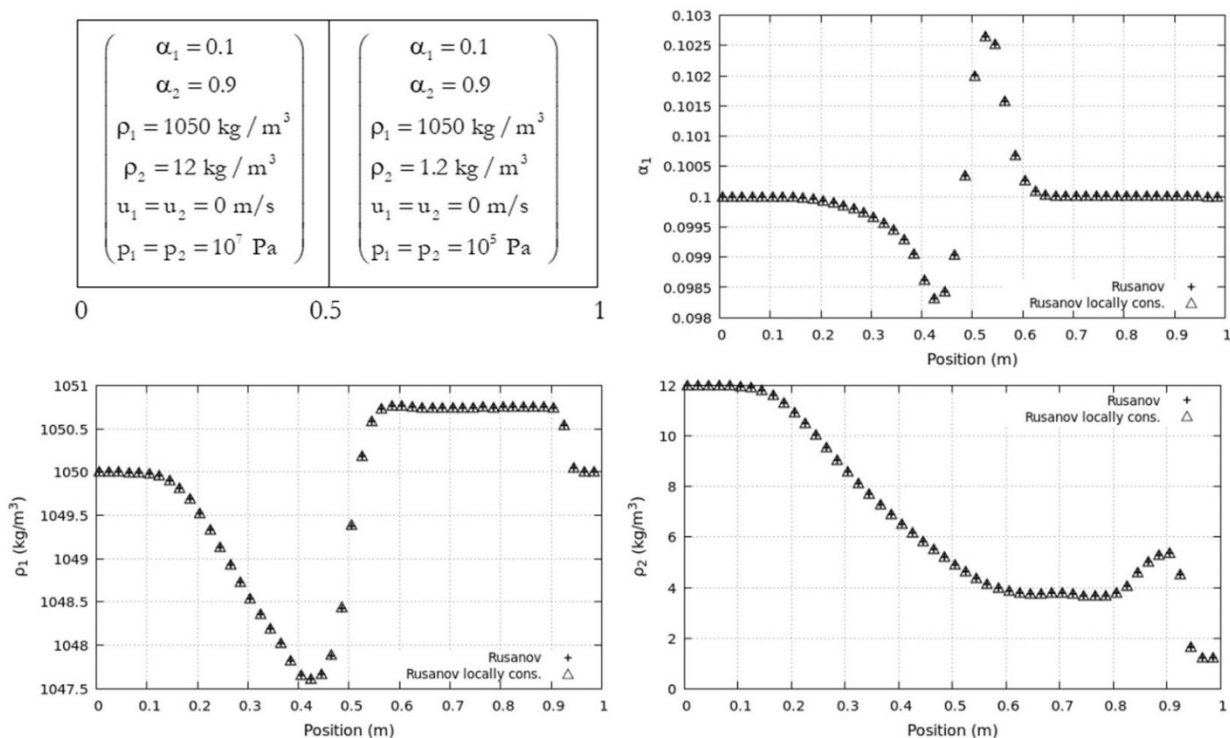


Рис. 1. Параметры течения (объемная концентрация и плотность конденсированной фазы и плотность несущей фазы) из [9] для тестовой задачи о распаде разрыва в двухфазной среде

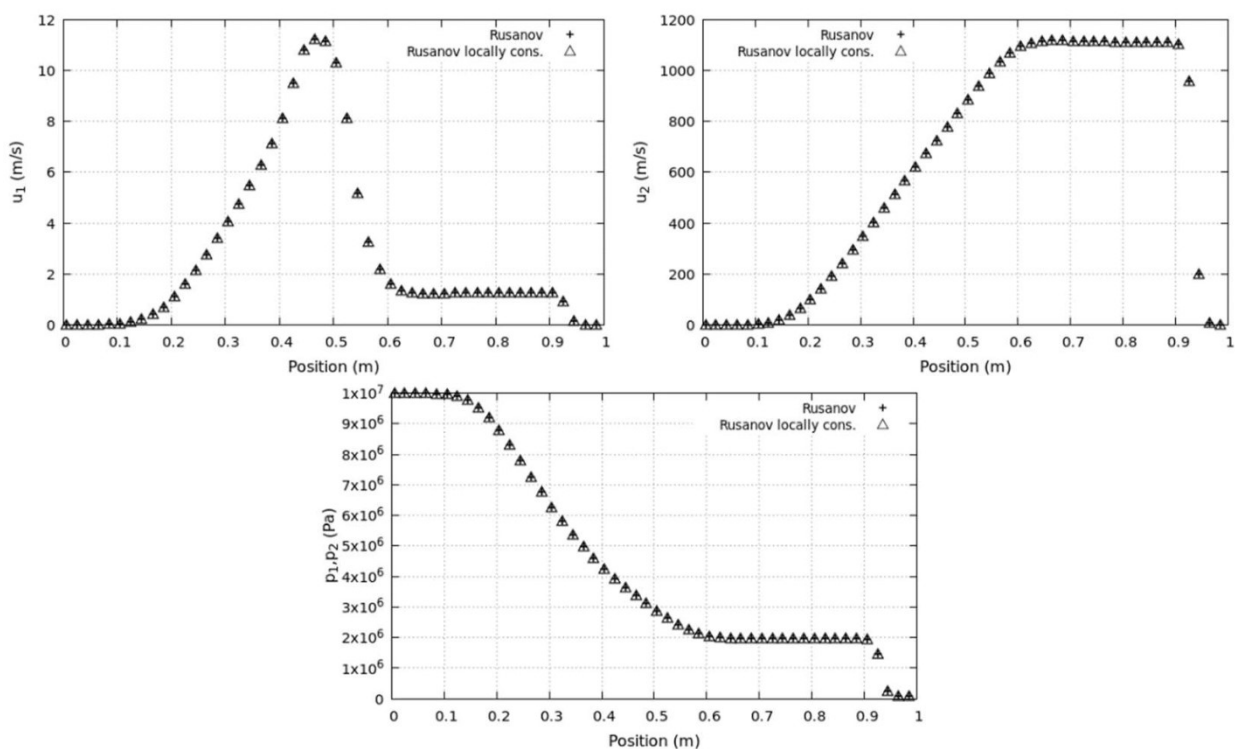


Рис. 2. Параметры течения (скорости конденсированной и несущей фаз и давление) из [10] для тестовой задачи о распаде разрыва в двухфазной среде

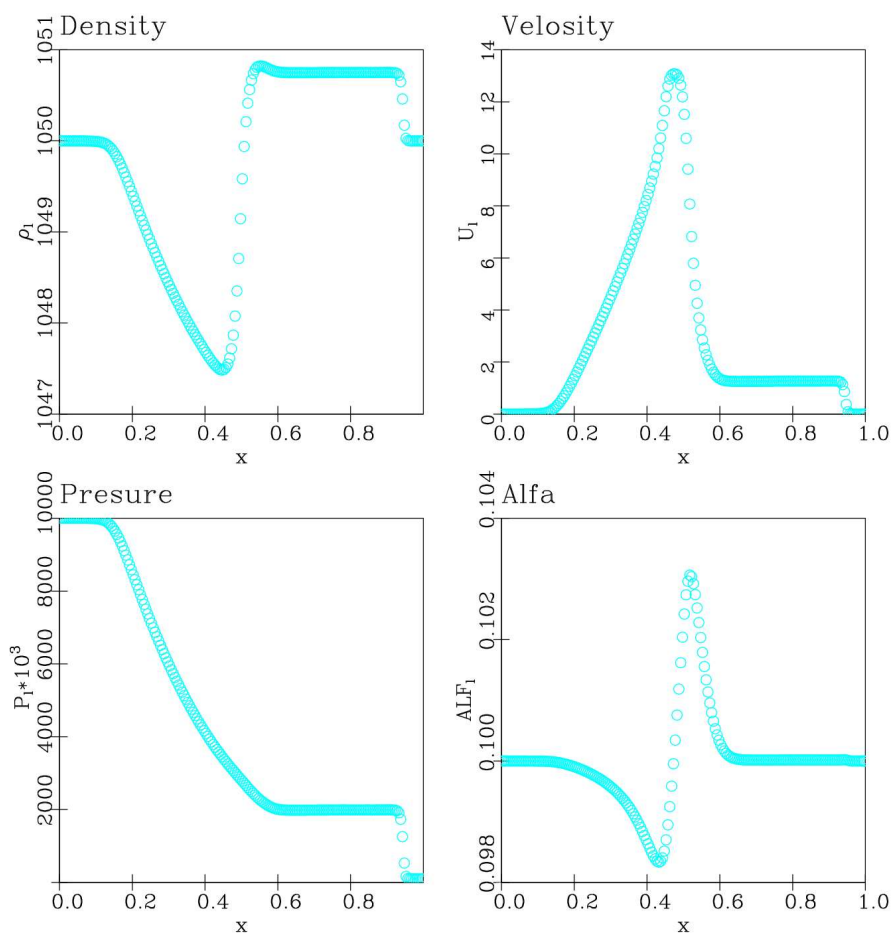


Рис. 3. Параметры течения (плотность, скорость, давление и объемная концентрация конденсированной фазы), рассчитанные по параметрам работы [10], для тестовой задачи о распаде разрыва в двухфазной среде

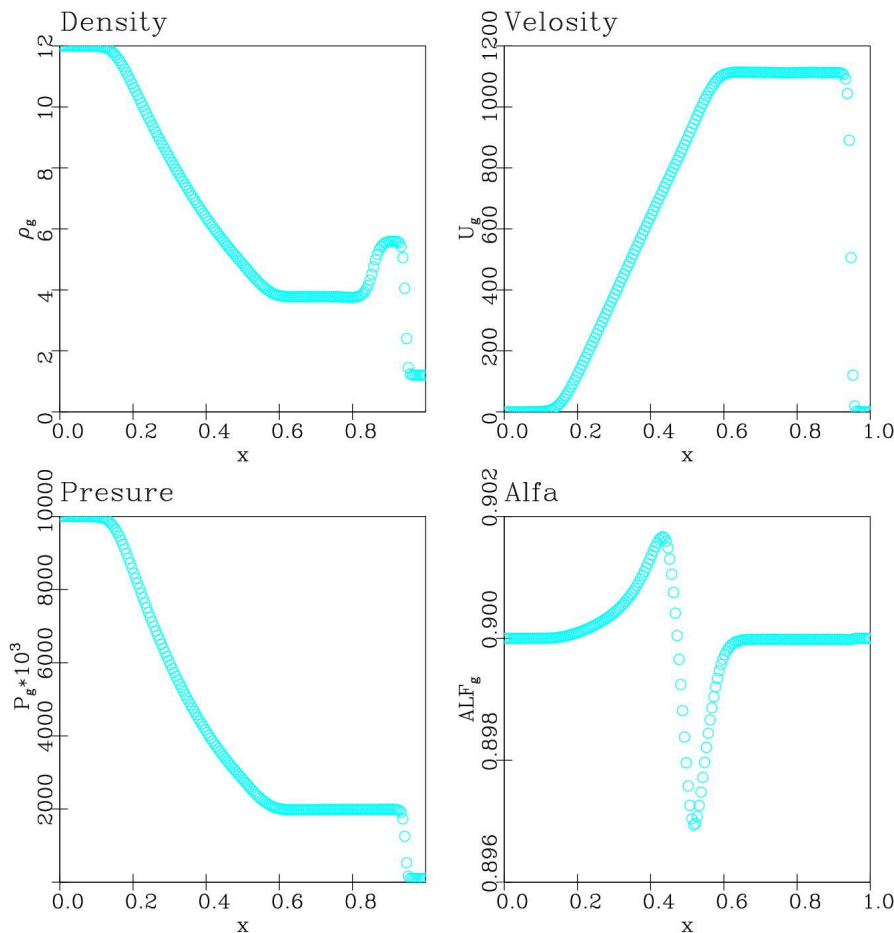


Рис. 4. Параметры течения (плотность, скорость, давление и объемная концентрация несущей фазы), рассчитанные по параметрам работы [9], для тестовой задачи о распаде разрыва в двухфазной среде

Сравнение результатов расчетов (рис. 1 и 2 и рис. 3 и 4) показывает хорошее их соответствие и может служить элементом кросс-верификационного исследования разрабатываемого алгоритма.

4.2. Численное моделирование эксперимента Rogue [25]

В работе [25] экспериментально исследуется дифракция ударной волны в воздухе на слое шариков, не связанных между собой. Рассматривается длинная вертикальная ударная труба, заполненная воздухом при нормальных условиях (рис. 5). На высоте ($x_0 = 0.19$ м) расположена область толщиной 2 см, заполненная твердыми шариками нейлона диаметром 2 мм. Плотность нейлона $\rho_l = 1050$ кг/м³, уравнение состояния такое же, как в предыдущем примере.

Упаковка шариков такова, что объемная доля воздуха в засыпке равна 0.35; параметры невозмущенного воздуха следующие: давление $p_g = 101325$ Па (1 атм), плотность $\rho_g = 1.2$ кг/м³, скорость $u_g = 0$ м/с, показатель адиабаты $\gamma_g = 1.4$. Снизу вверх движется ударная волна с числом Маха $M = 1.3$. Параметры газа (воздуха) за ударной волной: давление $p_g = 182890$ Па, плотность $\rho_g = 1.81883$ кг/м³, скорость $u_g = 152.0744$ м/с, показатель адиабаты $\gamma_g = 1.4$. В начальный момент времени фронт ударной волны имеет координату $x = 0$ (рис. 5). Особенностью данной тестовой задачи является то, что сила трения между газообразной фазой и дисперсной фазой принимает конечные значения и в каждой точке расчетной области обе фазы имеют разные скорости движения. Сила тяжести не учитывалась в расчетах.

Начальные значения переменных приведены в таблице 1.

Таблица 1

Начальные значения переменных в эксперименте Rogue [25]

Параметры	I	II	III
α_g	$1 \div 10^{-8}$	0.65	$1 \div 10^{-8}$
α_l	10^{-8}	0.35	10^{-8}
p_g p_l	182890 Па	101325 Па	101325 Па
ρ_g ρ_l	1.81883 кг/м ³ 0 кг/м ³	1.2 кг/м ³ 1050 кг/м ³	1.2 кг/м ³ 0 кг/м ³
u_g u_l	152.0774 м/с 0 м/с	0 м/с 0 м/с	0 м/с 0 м/с

В ударной трубе расположены два датчика, регистрирующие давление, – один на расстоянии 11 см до передней границы зоны засыпки ($x=0.08$), а другой на расстоянии 4.3 см после засыпки ($x=0.233$) (рис. 5).

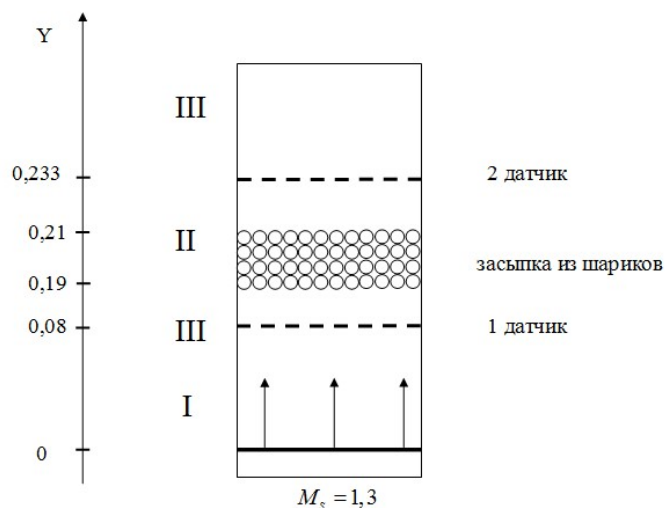


Рис. 5. Схема проведения эксперимента Rogue [25]

Схема распространения газодинамических разрывов в эксперименте на x, t диаграмме показана на рис. 6.

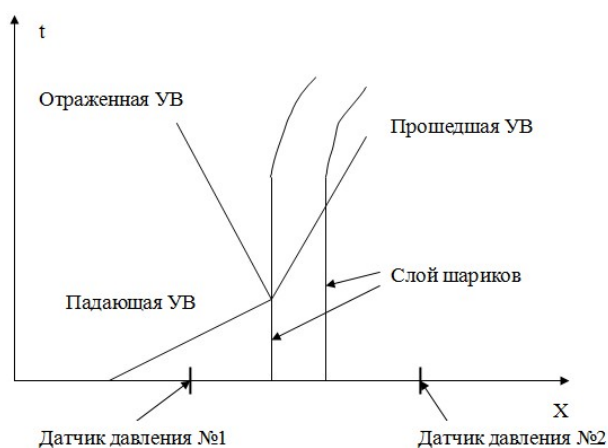


Рис. 6. Схема распространения газодинамических разрывов в эксперименте Rogue [25]

Падающая ударная волна взаимодействует с границей раздела (контактный разрыв с начальной нулевой скоростью), отделяющей область “чистого” газа и область засыпки шариков (пористая среда). В результате взаимодействия образуется отраженная ударная волна, которая движется навстречу потоку к входному сечению, и проходящая волна, которая вначале движется по двухфазной области (пористой среде), а затем выходит в область “чистого” газа.

Давление воздуха за отраженной ударной волной и, следовательно, перед нижней границей области засыпки – 3 атм, давление за проходящей волной и, следовательно, над верхней границей области засыпки – приблизительно 1.2 атм. Таким образом “пробка” из шариков засыпки испытывает перепад давления около 1.8 атм и под действием этого перепада начинает двигаться вверх. Одновременно газ, увлекаемый проходящей ударной волной (спутный поток), движется относительно исходно покоящихся частиц засыпки и сам увлекает эти частицы за счет силы вязкого трения. Оба эти эффекта приводят к тому, что возникает двухфазное (газ+частицы) течение в сторону второго датчика давления (т.е. в направлении увеличения координаты x), при этом область, занятая шариками, смещается и увеличивается в размерах (область засыпки “размазывается”).

Численное исследование данного экспериментального случая связано с определенными трудностями. Во-первых, следует отметить, что не существует аналитического решения, однако сам эксперимент проведен очень тщательно и результаты (показания датчиков давления приведены весьма подробно с небольшими временными интервалами). Основные вычислительные трудности связаны с расчетом границ раздела между чистым газом и двухфазной средой, а также с большой объемной концентрацией твердой фазы.

В данной работе вычислительный эксперимент был проведен с помощью разрабатываемого метода расчета течений многофазных течений. Для того, чтобы можно всё течение описать гиперболической системой уравнений, предполагалось, что дисперсная фаза (твердые частицы) является слабо сжимаемой средой и уравнения состояния для нее принималось как у воды в предыдущем тесте. Практически полагалось, что вся область заполнена двухфазной средой, однако там, где начально задавался “чистый” газ, значение объемной доли частиц принималось 10^{-8} .

Силу вязкого сопротивления частиц, добавляемую в систему уравнений (6), можно представить в виде

$$\mathbf{F} = \lambda (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p), \quad (8)$$

где λ – коэффициент межфазного трения. Для этого коэффициента предложено довольно много выражений, построенных как из анализа экспериментальных данных, так и на основе анализа результатов прямого численного моделирования. В таблице 2 приведены выражения для λ , которые использовались в данной работе.

Таблица 2

Выражения для коэффициента межфазного трения

Авторы	Корреляция
Wen & Yu (1966) [26]	$\lambda = \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{-2.65},$ $C_D = \begin{cases} 24/\text{Re} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) & \text{Re} < 1000, \\ 0.44 & \text{Re} \geq 1000, \end{cases}$ $\text{Re} = \frac{\alpha_g \rho_g d_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{\mu_g};$

Авторы	Корреляция
Gibilaro et al. (1985) [27]	$\lambda = \left(\frac{17.3}{\text{Re}} + 0.336 \right) \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{-2.8}$
Gidaspow (1994) [28]	$\lambda = \begin{cases} \frac{3}{4} C_D \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{-2.65} & \alpha_p \leq 0.2, \\ 150 \frac{\alpha_p^2 \mu_g}{\alpha_g d_p^2} + 1.75 \frac{\rho_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} & \alpha_p > 0.2 \end{cases}$ Эта функция разрывна при $\alpha_p = 0.2$
Di Felice (1994) [29]	$\lambda = \frac{3}{4} \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{\text{Re}}} \right)^2 \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{1-\chi},$ $\chi = 3.7 - 0.65 \exp \left[-\frac{(1.5 - \lg \text{Re})^2}{2} \right]$
Mazzei and Lettieri (2007) [30]	$\lambda = \frac{3}{4} \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{\text{Re}}} \right)^2 \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{2-2n},$ $n = \frac{4.8 + 0.42 \text{Re}^{3/4}}{1 + 0.175 \text{Re}^{3/4}}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_g d_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{\mu_g \alpha_g^{n-1}}$
Beetstra et al. (2007) [31]	$\lambda = \frac{\rho_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \left(180 \frac{\alpha_p}{\text{Re}} + 18 \frac{\alpha_g^4 (1 + 1.5 \sqrt{\alpha_p})}{\text{Re}} + 0.31 \frac{[\alpha_g^{-1} + 3\alpha_g \alpha_p + 8.4 \text{Re}^{-0.343}]}{[1 + 10^3 \alpha_p \text{Re}^{-0.5-2\alpha_p}]} \right)$
Rong et al. (2013) [32]	$\lambda = \frac{3}{4} \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{\text{Re}}} \right)^2 \frac{\rho_g \alpha_g \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p} \alpha_g^{1-\chi},$ $\chi = 2.65(1 + \alpha_g) - (5.3 - 3.5\alpha_g) \alpha_g^2 \exp \left[-\frac{(1.5 - \lg \text{Re})^2}{2} \right]$
Furfaro & Saurel (2015) [33]	$\lambda = C_D \frac{\rho_g \alpha_g^{-1} \alpha_p \mathbf{u}_g - \mathbf{u}_p }{d_p},$ $C_D = \begin{cases} \frac{150\alpha_p}{\text{Re}} + 1.75 & \alpha_p \geq \alpha_{cr}, \\ \frac{150\alpha_p}{\text{Re}} + 1.75 \left(\frac{(1 - \alpha_{cr})\alpha_p}{\alpha_{cr} \alpha_g} \right)^{0.45} & (1 - \alpha_s) \leq \alpha_p < \alpha_{cr}, \\ \frac{150\alpha_p}{\text{Re}} + 0.3 & \alpha_p < (1 - \alpha_s), \end{cases}$ $\alpha_s = \left(1 + 0.02 \frac{1 - \alpha_{cr}}{\alpha_{cr}} \right)^{-1}, \quad \alpha_{cr} = 0.63$

Во всех случаях, когда не указано определение Re, используется определение из Wen & Yu (1966) [26].

Прежде, чем оценивать влияние различных факторов, входящих в постановку данной задачи, оценим влияние численных параметров на результаты. На рис. 7 показана зависимость

результатов от размеров расчетной сетки. Через NX обозначено количество ячеек сетки в продольном направлении. На этом рисунке сравниваются рассчитанные распределения давления, полученные на указанных датчиках, с экспериментальными данными. Видно, что на сетках с $NX > 2000$ результаты практически не меняются. Поэтому в дальнейшем все показанные результаты расчетов получены на сетке с $NX = 2000$.

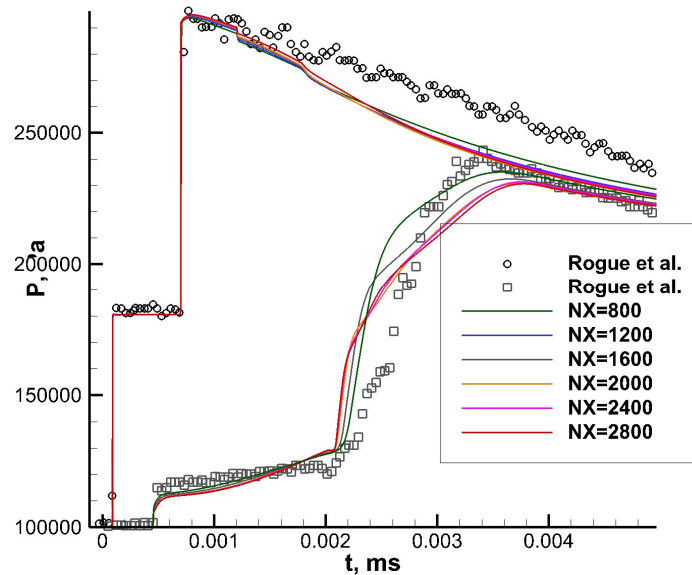


Рис. 7. Влияние размеров расчетной сетки на сходимость результатов

Вторым важным аспектом численного метода является аппроксимация по пространству. На рис. 8 показана зависимость результатов от аппроксимации по пространству. На этом рисунке показаны распределения давления на датчиках, полученные с различными подходами к пространственной аппроксимации. Использовались восстановления второго порядка (MC и HREG), третьего порядка (k -approximation, Cada & Thorrilhon и Krupa) и пятого порядка (MP5-R, WENO-M и WENO-Z). Видно, что влияние пространственной аппроксимации на сетке $NX = 2000$ ячеек незначительно. В дальнейшем все результаты получены с WENO-Z восстановлением.

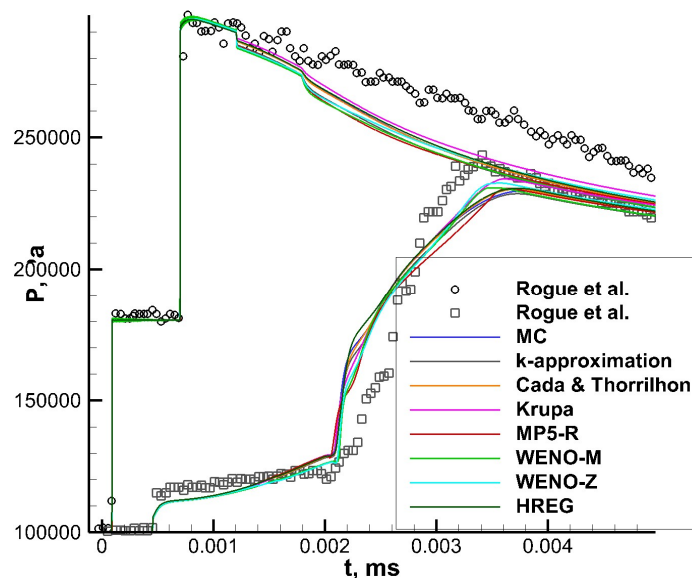


Рис. 8. Влияние пространственной аппроксимации на распределения давления

Теперь перейдем к оценке влияния различных параметров постановки задачи на результат. Начнем с параметров частиц, для которых неизвестно точное уравнение состояния и характерный диаметр d_p , входящий в выражения для коэффициента межфазного трения. Отметим, что в большинстве работ, моделирующих этот эксперимент, авторы используют уравнения состояния воды, а характерный диаметр задается как 0.15 или 0.2 мм.

На рис. 9 показана зависимость результатов от используемого уравнения состояния для частиц. В данной работе так же использовались различные варианты уравнения состояния для воды, взятые из литературы. Через SG обозначено двучленное уравнение состояния

$$p = c_V (\gamma - 1) \rho T - p_\infty,$$

где p – давление; T – температура; ρ – плотность; c_V , γ и p_∞ – параметры уравнения состояния, зависящие от конкретного вещества. Через NASG обозначено обобщение двучленного уравнения состояния с использованием уравнения состояния Noble & Abel [34]

$$p = c_V (\gamma - 1) \frac{\rho T}{1 - b\rho} - p_\infty,$$

где через b обозначен дополнительный параметр, позволяющий более точно описывать поведение различных веществ. Видно, что все варианты уравнения состояния для воды дают очень близкие результаты. Поэтому в дальнейшем использовалось только двучленное уравнение состояния с $\gamma = 2.35$.

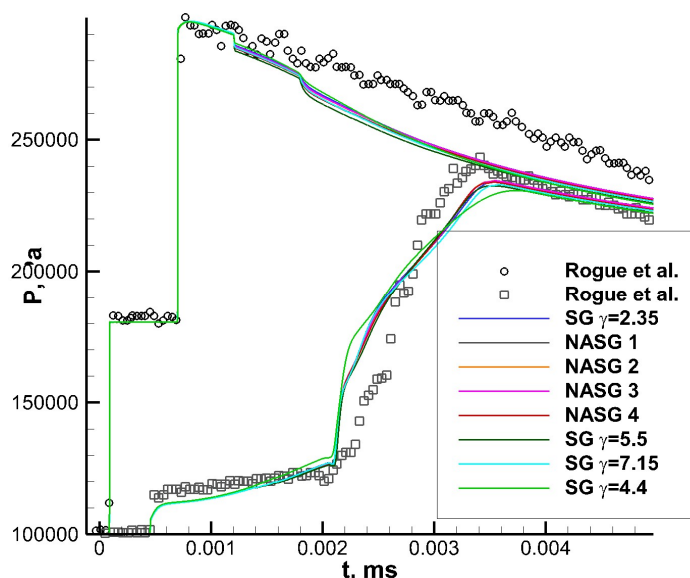


Рис. 9. Влияние уравнения состояния частиц на распределения давления

На рис. 10 показано влияние характерного диаметра частиц на распределения давления, полученные на датчиках. В расчетах использовались пять размеров частиц от 0.125 мм до 0.225 мм. Видно, результаты для крупных частиц с $d_p \geq 0.175$ мм мало отличаются друг от друга. При $d_p = 0.15$ мм отличие результатов тоже небольшое, а вот распределения давления для самых мелких частиц заметно больше практически на всем временном интервале. В дальнейших расчетах использует характерный диаметр $d_p = 0.15$ мм.

Влияние различных выражений для коэффициента межфазного трения на распределения давления на датчиках показано на рис. 11. Из рисунка видно, что коэффициент межфазного трения, предложенный Gidaspow (1994) [28], довольно заметно отличается от остальных и позволяет более точно предсказать показания переднего датчика на всем временном интервале и заднего датчика примерно до 0.0034 мс. Некоторое промежуточное положение занимают результаты, полученные с коэффициентом межфазного трения Beetstra et al. (2007) [32].

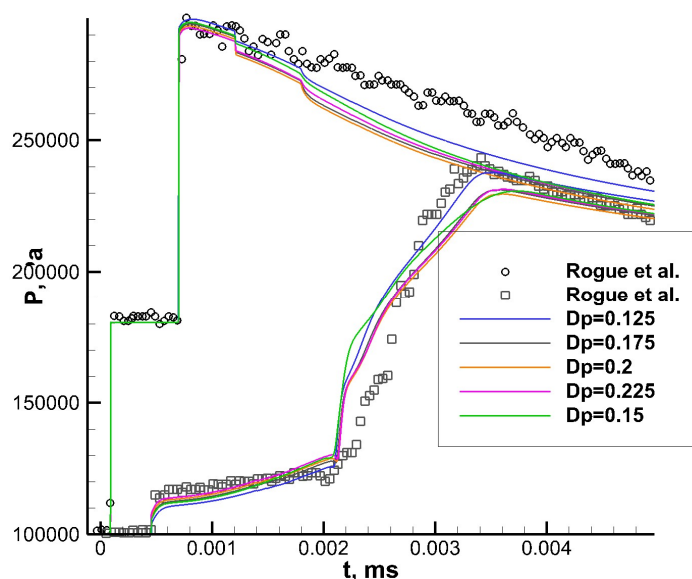


Рис. 10. Влияние характерного диаметра частиц на распределения давления

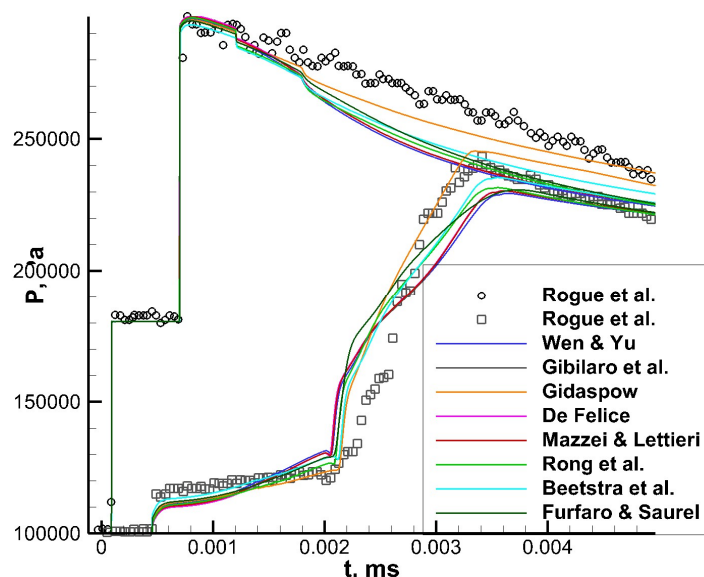


Рис. 11. Влияние коэффициента межфазного трения на распределения давления

Анализ результатов расчетов, представленных на рис. 8–11, показывает, что распределение давления по времени на первом датчике очень хорошо совпадает с экспериментальными данными почти во всем диапазоне времен. В момент времени $t = 0.183$ мс датчик 1 регистрирует прохождение падающей ударной волны, а в момент $t = 0.787$ мс прохождение отраженной ударной волны. Давление воздуха за отраженной волной в момент прохождения датчика достигает 2.964 МПа и затем медленно снижается при разгрузке из-за возникновения двухфазного течения в сторону верхней части ударной трубы. Следует отметить, что давление за ударной волной с $M = 1.3$, отраженной от твердой, непроницаемой и неподвижной стенки равняется 3.1493 МПа.

Соответствие расчетных и экспериментальных результатов на втором датчике несколько хуже. Можно отметить качественное совпадение на начальной стадии процесса. В момент времени $t = 0.58$ мс через второй датчик давления проходит слабая ударная волна. Давление за фронтом проходящей волны приблизительно 1.18 МПа и оно медленно растет во времени до 1.25 МПа. В момент времени $t = 2.18$ мс точки расположения второго датчика достигает двухфазный газодисперсный поток, образованный из частиц засыпки и воздуха. Давление при этом

растет за 1.5 мс до значения 2.4 МПа. Затем давление в зоне второго датчика начинает медленно снижаться за счет разгрузки. Некоторое количественное расхождение экспериментальных и расчетных данных на втором датчике можно объяснить неопределенностью значений коэффициентов, описывающих вязкое трение (силу вязкого сопротивления) и не учетом влияния пограничных слоев.

5. Численные эксперименты

В данном разделе приводятся результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют возможности использования математической модели [10,11] для расчета сильно неравновесных по скорости двухфазных течений в двумерном случае. Основное внимание уделено визуализации линий тока несущей и дисперсной фаз, образованию “пелен” и зон свободных от частиц.

Предполагается:

1. частицы сферические и твердые или жидкие;
2. уравнение состояния для вещества частиц такое же как для воды;
3. взаимодействие частиц минимально и их трением друг о друга можно пренебречь;
4. основные силы, действующие на частицу – это сила сопротивления со стороны газа и сила инерции;
5. теплообмен между фазами не учитывается.

При таких предположениях время релаксации τ_v частицы на передачу импульса между газом и частицей определяется из уравнения сохранения импульса для дисперсной фазы за счет трения фаз

$$\frac{\partial \alpha_l \rho_l u_l}{\partial t} = -\lambda (u_l - u_g)$$

и записывается как

$$\tau_v = \frac{\alpha_l \rho_l}{\lambda}$$

В случае использования коэффициента релаксации скорости λ из работы Wen, Yu [26] время релаксации импульса выражается, например, следующим образом:

$$\tau_v = \frac{4}{3} \frac{\rho_l d_l^2}{\mu_g} \frac{\alpha_g^{1.65}}{\text{Re}_l C_{D1}},$$

$$\text{Re}_l = \frac{\alpha_g \rho_g d_l |\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|}{\mu_g}, \quad C_{D1} = \begin{cases} 24/\text{Re}_l (1 + 0.15 \text{Re}_l^{0.687}) & \text{Re}_l < 1000, \\ 0.44 & \text{Re}_l \geq 1000, \end{cases}$$

где Re_l – число Рейнольдса обтекания частицы диаметром d_l потоком газа с относительной скоростью $|\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l|$ и коэффициентом динамической вязкости μ_g .

5.1. Обтекание двухфазным потоком угла сжатия

Схема, показывающая поведение траекторий “тяжелых” частиц в двухфазном сверхзвуковом (по газу) течении возле угла сжатия, приведена на рис. 12. Красная линия (кривая 1) со стрелками означает траекторию движения частицы, синяя штрих пунктирная линия (кривая 2) – линия тока газовой фазы. Линия тока газа на косой ударной волне претерпевает излом и образована двумя прямолинейными участками, каждый из которых параллелен участку стенки сжимающего угла. Траектория частицы, которая первоначально движется равномерно с газом (имеет одинаковую скорость с газом и совпадающие траектории движения), а после

прохождения ударной волны перестает следовать траектории движения несущей фазы, имеет криволинейный участок, соответствующий неравновесному состоянию системы газ-частица. Время движения по этому участку под влиянием инерции и сил сопротивления примерно соответствует времени релаксации частицы τ_v (рис. 12). В конце криволинейного участка достигается новое состояние механического равновесия между газом и частицами. Данный анализ не учитывает влияния частиц на газ и представляет собой анализ случая одностороннего взаимодействия фаз в лагранжевом подходе. В потоке двухфазной смеси можно выделить некоторую “предельную” траекторию частиц (красная пунктирная линия 3 на рис. 12), характеризующуюся тем, что все частицы, начально движущиеся по траекториям расположенным ниже этой линии, взаимодействуют с наклонной стенкой, а все частицы на траекториях начально выше предельной не взаимодействуют со стенкой – т.е. за время релаксации τ_v частица успевает развернуться и не встретится с наклонной стенкой (кривая 1 рис. 12).

В первом приближении, взаимодействие “тяжелых” частиц в сильно разбавленных дисперсных двухфазных потоках, ограниченных жесткими стенками, может происходить по одному из двух сценариев: “отскок” и “залипание”. Математическая интерпретация этих сценариев для Эйлера подхода приводится в разделе 2.1.

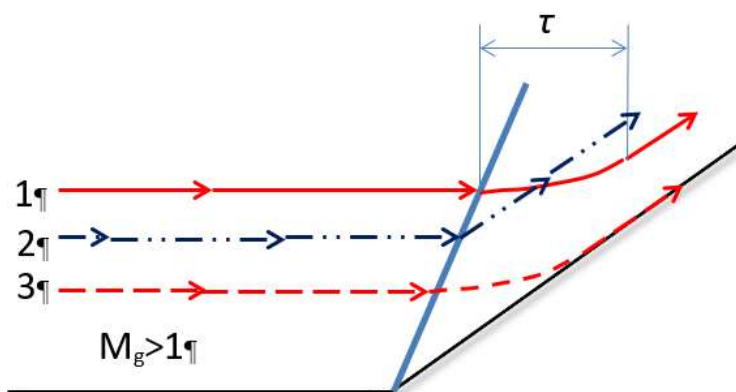


Рис. 12. Схема расположения траекторий дисперсной фазы (сплошная красная линия 1), несущей фазы (штрих пунктирная синяя линия 2), предельная траектория (пунктирная красная линия 3) при обтекании угла сжатия сверхзвуковым двухфазным потоком

В случае отскока частица отражается от твердой поверхности зеркально (сохраняя касательную к поверхности скорость и изменив знак нормальной компоненты скорости). Разность вектора скорости потока газа за ударной волной и вектора скорости отскочившей частицы порождает силу сопротивления, действующую со стороны газа на частицу и направленную в сторону наклонной стенки. Это приводит к искривлению траектории частицы и сближению ее с поверхностью наклонной стенки, при этом сама рассматриваемая траектория располагается несколько выше предельной траектории (красная пунктирная линия 3, рис. 13) для координаты X правее точки касания предельной траекторией наклонной стенки (сплошная красная линия 4, рис. 13). При этом в рамках Лагранжева подхода траектории таких отраженных частиц могут многократно пересекаться между собой. Таким образом, все траектории частиц, начально расположенные ниже “предельной”, после взаимодействия с твердой стенкой располагаются в узкой зоне вблизи наклонной стенки, образуя “пелену” из частиц дисперсной. В эту “пелену” входят и некоторые траектории, расположенные первоначально чуть выше “предельной” линии. “Пелена” характеризуется повышенной числовой плотностью частиц дисперсной фазы. Понятие “пелена” как узкой зоны большой (бесконечной) счетной плотности частиц используется, например: в работах Крайко А.Н. [35, 36].

В случае условия “прилипания” на стенке, частицы, находящиеся на траекториях ниже предельной, попадают на стенку и пропадают из расчетной области, в таком случае траектории их движения прерываются на стенке (сплошная красная линия 5, рис. 14).

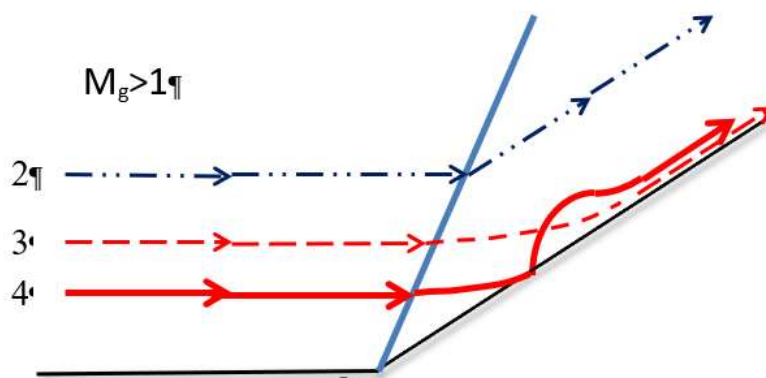


Рис. 13. Траектории частиц при взаимодействии со стенкой по сценарию “отскок” при обтекании угла сжатия сверхзвуковым двухфазным потоком (сплошная красная кривая 4). Траектории дисперсной фазы – сплошная красная линия 2, предельная траектория дисперсной фазы пунктирная красная линия 3

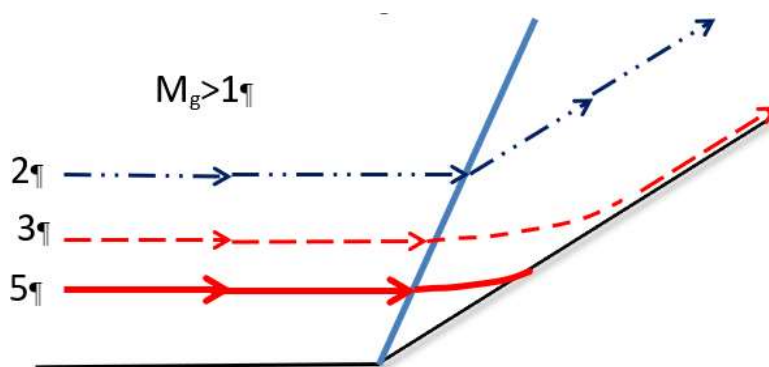


Рис. 14. Траектории частиц при взаимодействии со стенкой по сценарию “прилипание” при обтекании угла сжатия сверхзвуковым двухфазным потоком (сплошная красная кривая 5). Траектории дисперсной фазы – сплошная красная линия 2, предельная траектория дисперсной фазы пунктирная красная линия 3

5.2 Моделирование взаимодействия частиц со стенкой в газодисперсных разбавленных течениях

Рассмотрим модельную задачу об обтекании газодисперсным разбавленным двухфазным потоком угла сжатия в 10° (рис. 15–18). Численно моделировались два случая взаимодействия частиц со стенкой: “отскок – упругое зеркальное отражение” частиц от стенки и “залипание – выход из расчетной области” частиц к стенке. Использовалась сетка размером 200×80 . Несущая фаза – воздух, параметры на входе: давление $p_g = 10^5$ Па, скорость $u_g = 2040$ м/с, температура $T_g = 529^\circ$ К, число Маха $M_g = 4.42$. Дисперсная фаза – твердые или жидкие шарики из вещества с параметрами и уравнением состояния воды: $p_l = 10^5$ Па, $u_l = 2040$ м/с, $T_l = 529^\circ$ К, $M_l = 0.47$, плотность $\rho_l = 1000$ кг/м³, диаметр частиц $d_l = 0.0001$ м. Объемная доля дисперсной фазы $\alpha_l = 0.001$.

Расчеты проводились в Эйлеровом приближении по модели (6–7). В этом случае абсолютно упругое, зеркальное отражение частиц от стенки (“отскок” твердых частиц) моделируется как условия отсутствия протекания для непрерывной дисперсной фазы (вариант (А), раздел 2.1). Результаты расчетов представлены на рис. 15–16. На рис. 15 показаны поля скорости несущей и дисперсной фаз с помощью двух семейств траекторий газа (синие линии) и частиц (красные линии), а на рис. 16 – поле парциальной плотности дисперсной фазы (килограмм вещества частиц в метре кубическом смеси). Парциальная плотность служит интегральной характеристикой пространственного распределения дисперсной фазы в расчетной области. На рис. 15 видно, что после прохождения ударной волны происходит инерционное

расслоение траекторий газовой и жидкой фазы и затем на некотором расстоянии вниз по течению от ударной волны, определяемым временем релаксации τ_v , траектории вновь становятся параллельными образующей наклонной стенки.

Предельная траектория начинается приблизительно в точке с координатами $x=0.0$ м, $y=-0.125$ м и касается наклонной стенки в точке с координатой $x \approx 0.375$ м. Отметим, что поле скорости для дисперсной фазы в Эйлеровом приближении является результатом некоторой процедуры осреднения (по пространству, времени или реализациям) реального поля скоростей частиц, в котором возможно нарушение однозначности значений функций поля из-за пересечения траекторий и т.п. Вследствие этого “осреднения”, все траектории дисперсной фазы в данном расчете не пересекаются между собой, а реальная траектория частицы с отражением от стенки (красная сплошная кривая 4 рис. 13) моделируется траекторией, расположенной близко к наклонной стенке (рис. 15), но не пересекающей ее. Все траектории ниже предельной траектории и чуть выше (начальные координаты $y < -0.075$ м) после ударной волны располагаются близко друг к другу вблизи стенки, образуя некоторый “жгут” или “пелену” [35, 36]. Эта “пелена” или узкая область вдоль наклонной стенки характеризуется повышенной парциальной плотностью дисперсной фазы (красная область рис. 15). На рис. 16 видны три характерные области в течении двухфазной смеси за ударной волной.

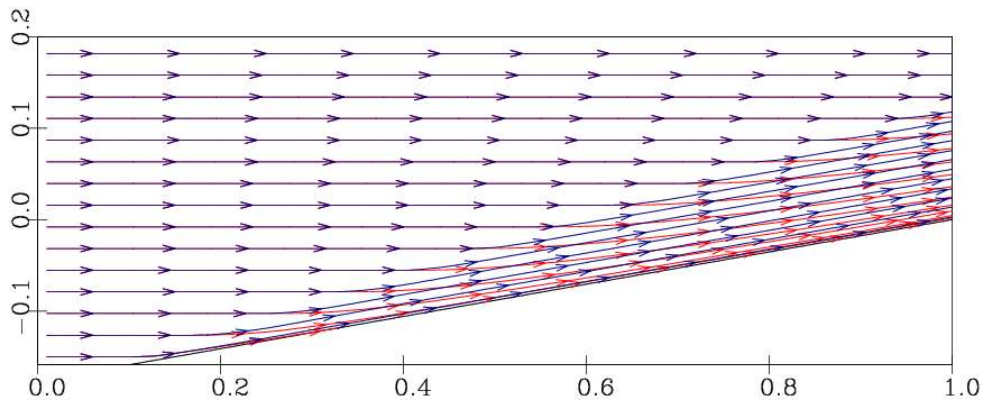


Рис. 15. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) при моделировании взаимодействия частиц с “отскоком” от стенки

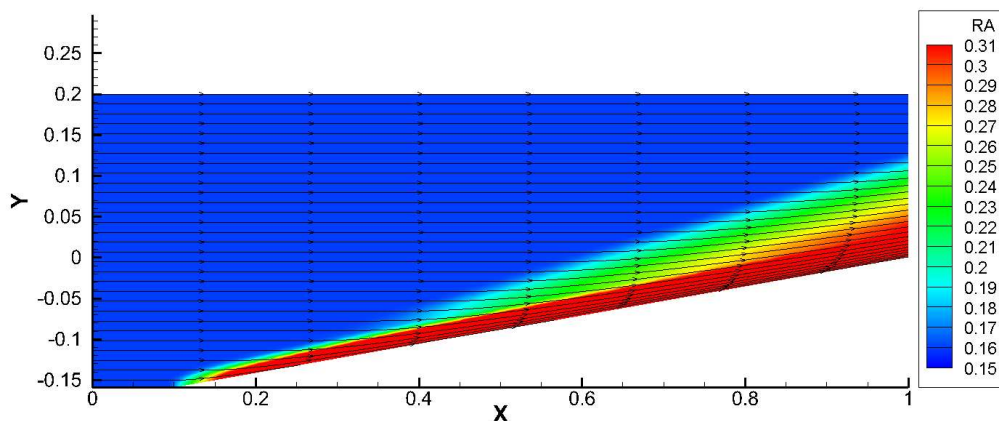


Рис. 16. Поле парциальной плотности $\alpha_i \rho_i$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) при моделировании взаимодействия частиц с “отскоком” от стенки

Первая область – это пелена вдоль наклонной стенки, еще одна характерная для этой задачи область – это полоса зеленого спектра непосредственно за ударной волной, начинающаяся примерно в районе точки касания предельной характеристики наклонной стенки.

Ширина этой области определяется временем релаксации τ_v и длинной релаксации (то есть расстоянием, на котором вновь восстанавливается равновесное состояние течения). И третья область – это светло красный треугольник между “пеленой” и полосой неравновесного течения за ударной волной, который соответствует равновесному течению за фронтом ударной волны частиц, не взаимодействующих со стенкой и не попадающих в “пелену”.

Исчезновение частиц на стенке (“залипание” для жидких частиц) моделируется как условия протекания (отсутствия отражения) для континуальной дисперсной фазы (вариант (Б), раздел 2.1) через границу расчетной области. Результаты расчетов, проведенных в условиях аналогичных предыдущему случаю, представлены на рис. 17 и рис. 18, где показаны поля скорости несущей и дисперсной фаз.

На рис. 17 видно, что траектории частиц, расположенные начально ниже предельной траектории, заканчиваются на наклонной стенке после прохождения ими ударной волны. Вследствие этого, зона “пелены” вдоль наклонной стенки не формируется, а в области за ударной волной есть две выраженные зоны: полоса неравновесного течения, непосредственно примыкающая к фронту ударной волны, и зона равновесного течения, начинающаяся за точкой касания предельной траектории наклонной стенки (красная пунктирная линия 3 рис. 14) и траектория частицы (красная линия со стрелками), начинающаяся в $y = -0.125$ м на рис. 17. До точки касания предельной траектории парциальная плотность дисперсной фазы приблизительно соответствует значению в невозмущенном потоке (рис. 18).

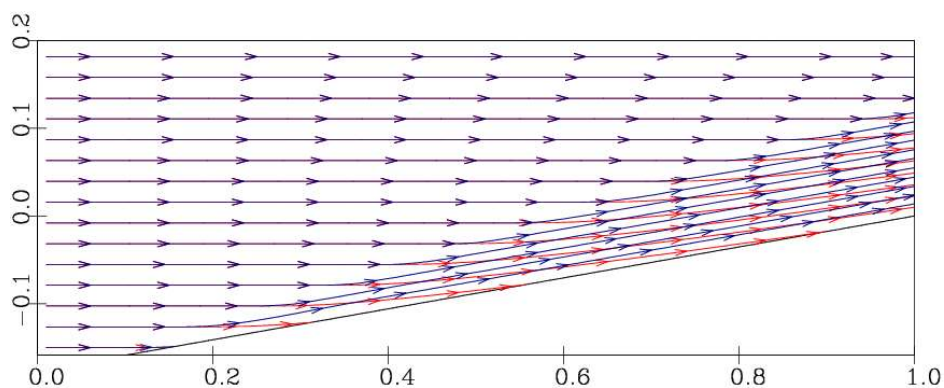


Рис. 17. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) при моделировании взаимодействия частиц с “залипанием” к стенке

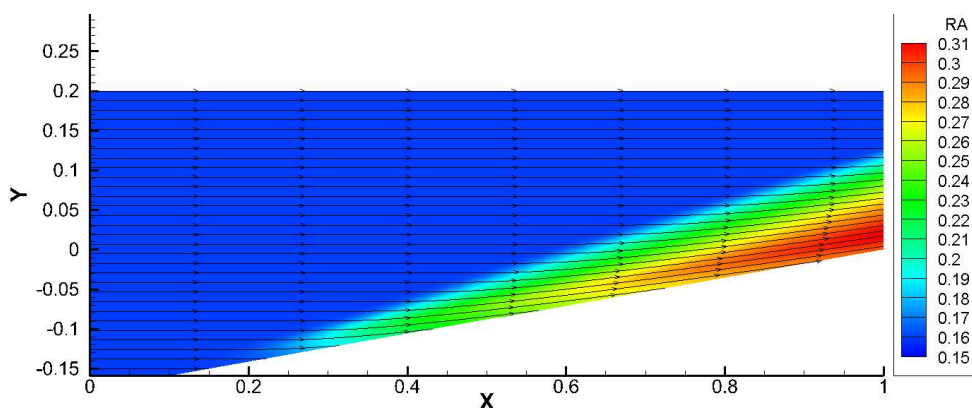


Рис. 18. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) при моделировании взаимодействия частиц с “прилипанием” к стенке

5.3 Исследование влияния параметров дисперсной фазы на обтекание газодисперсным потоком угла сжатия

Для исследования выбран расчетный случай из предыдущего раздела. Исследовалось влияние двух факторов на обтекание угла сжатия двухфазным газодисперсным потоком: первый это объемная доля дисперсной фазы, второй – размер частиц (время релаксации). Во всех расчетах в качестве граничного условия на твердой стенке принималось условия “зеркального отражения” – вариант А.

Результаты исследования зависимости характеристик течения от объемной доли дисперсной фазы приведены на рис. 19–30. Диаметр частиц принимался равным $d_l = 10^{-4}$ м, а объемная доля дисперсной фазы в этих расчетах варьировались в диапазоне $\alpha_l = 0.001$ (рис. 19–21), $\alpha_l = 0.01$ (рис. 22–24), $\alpha_l = 0.05$ (рис. 25–27), $\alpha_l = 0.1$ (рис. 28–30).

Результаты исследования зависимости характеристик течения от диаметра частиц приведены на рис. 19–21 и рис. 31–36. Объемная доля дисперсной фазы в этих расчетах фиксировалась $\alpha_l = 0.001$, диаметры частиц варьировались в диапазоне $d_l = 10^{-4}$ м (рис. 19–21), $d_l = 10^{-5}$ м (рис. 31–33), $d_l = 10^{-6}$ м (рис. 34–36).

На рисунках показаны:

1. траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии);
2. поле парциальной плотности несущего газа $\alpha_g \rho_g$;
3. поле парциальной плотности дисперсной среды $\alpha_l \rho_l$. Белой линией показано положение ударной волны при обтекании сжимающего угла чистым газом.

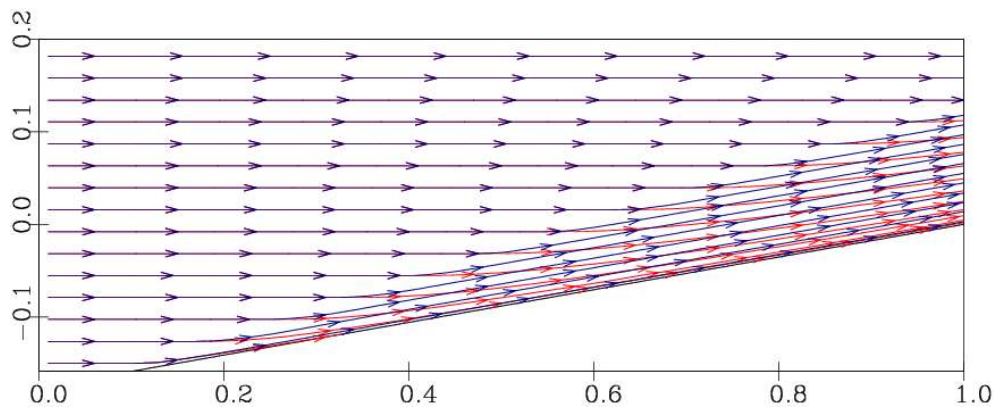


Рис. 19. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.001$

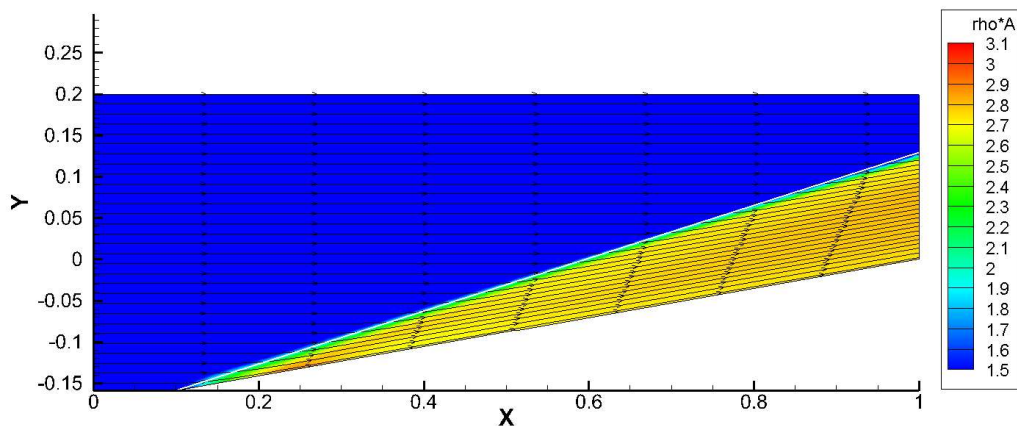


Рис. 20. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.001$

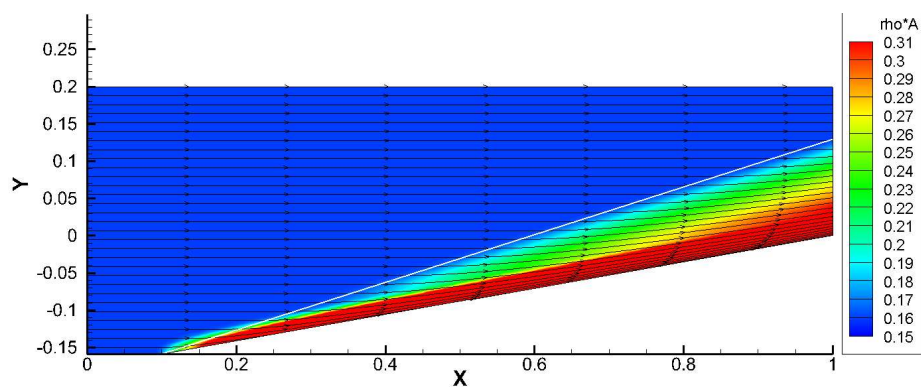


Рис. 21. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.001$

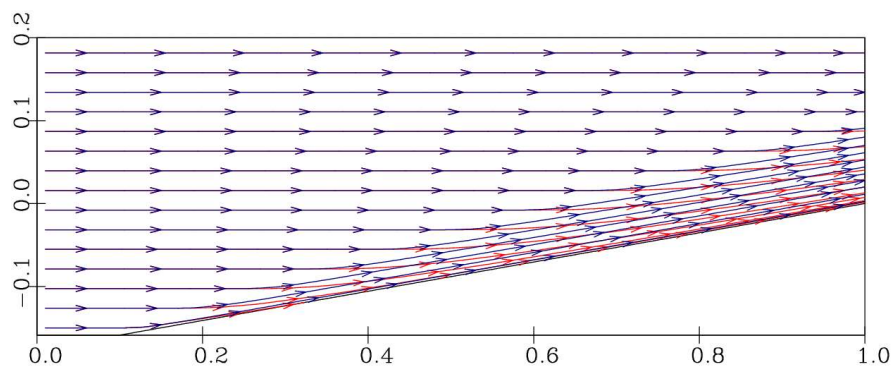


Рис. 22. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.01$

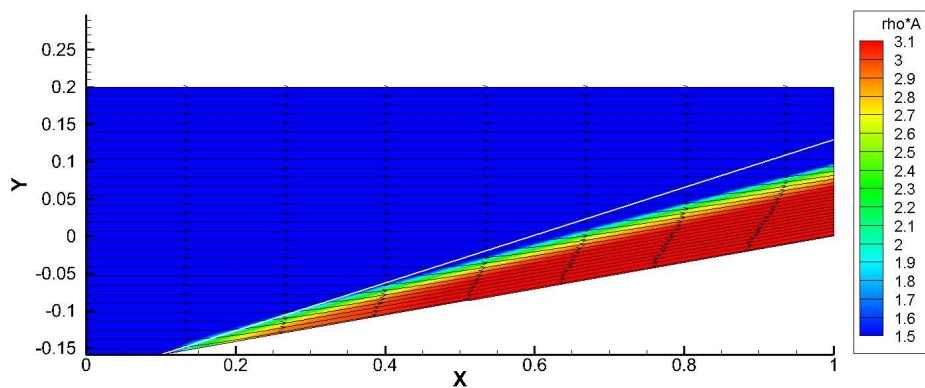


Рис. 23. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.01$

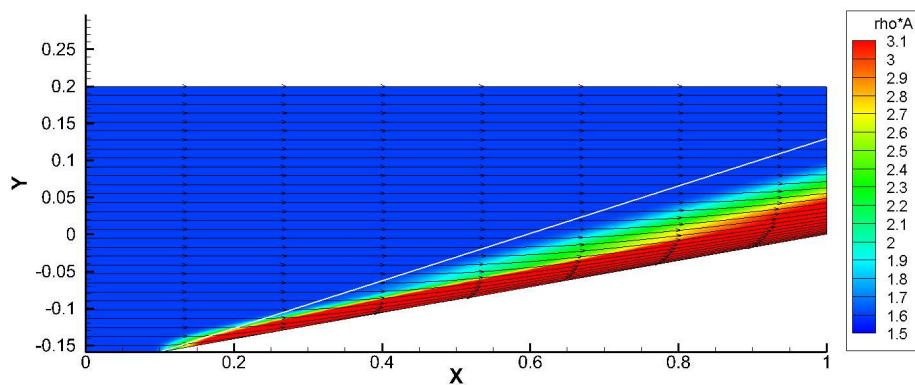


Рис. 24. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.01$

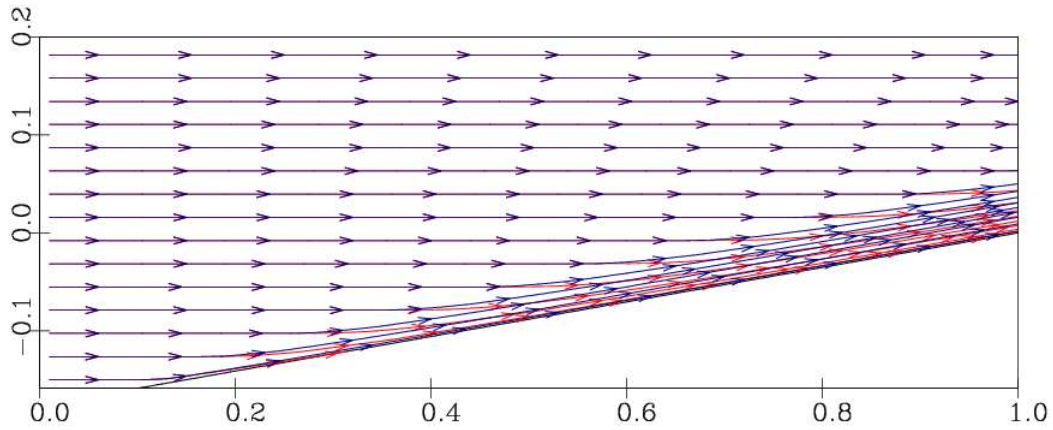


Рис. 25. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.05$

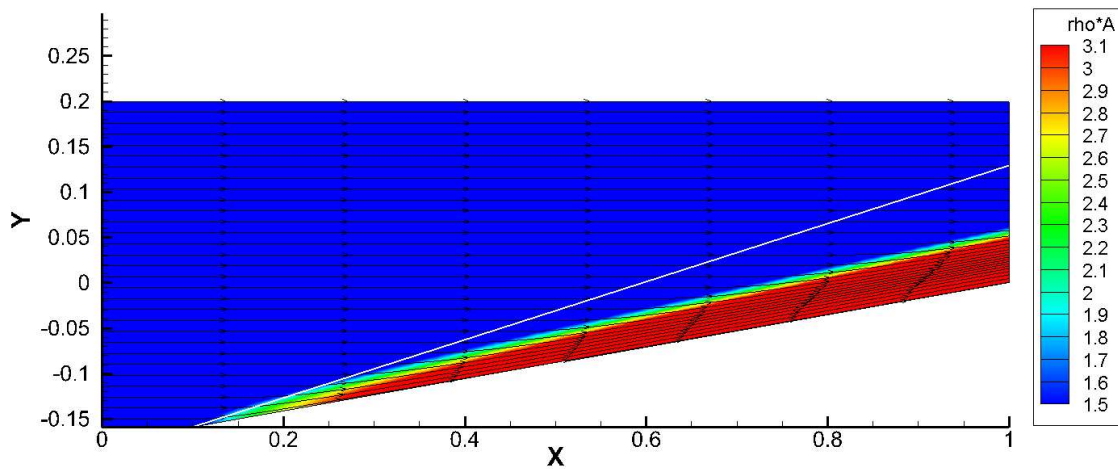


Рис. 26. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.05$

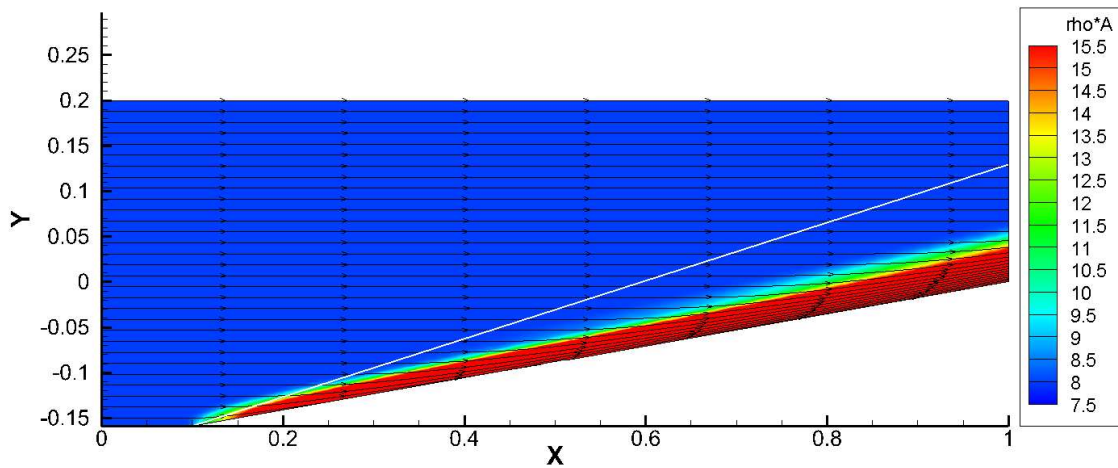


Рис. 27. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.05$

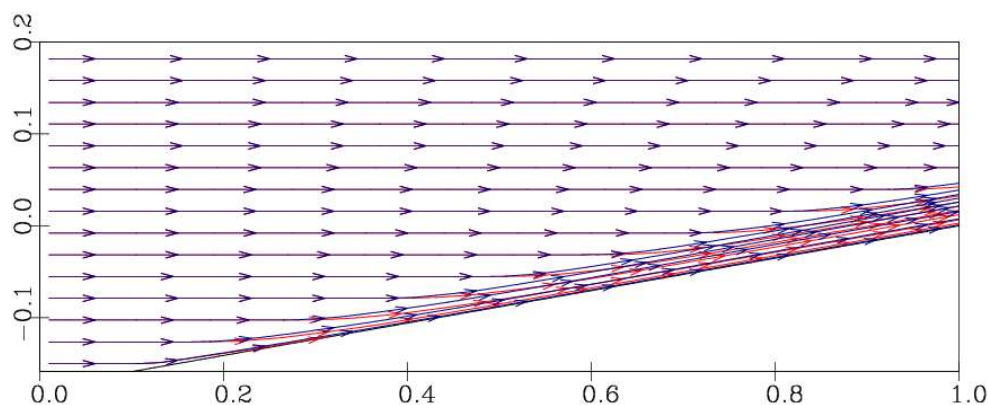


Рис. 28. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.1$

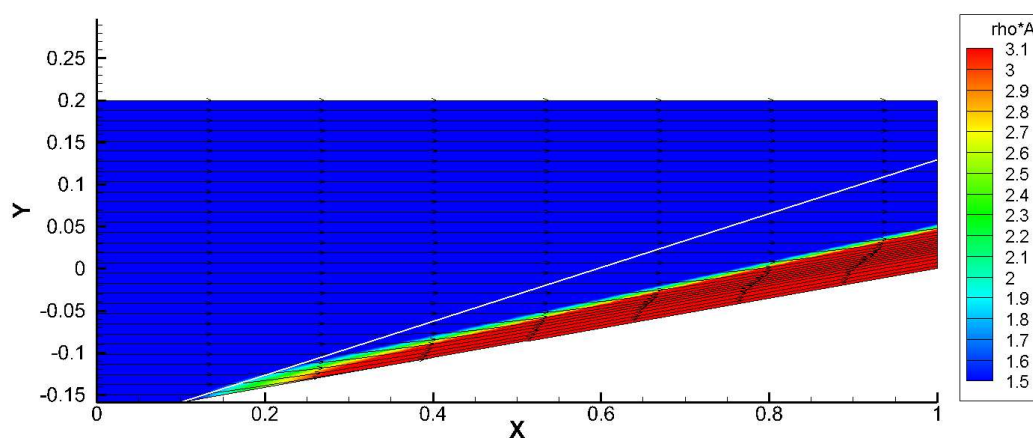


Рис. 29. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.1$

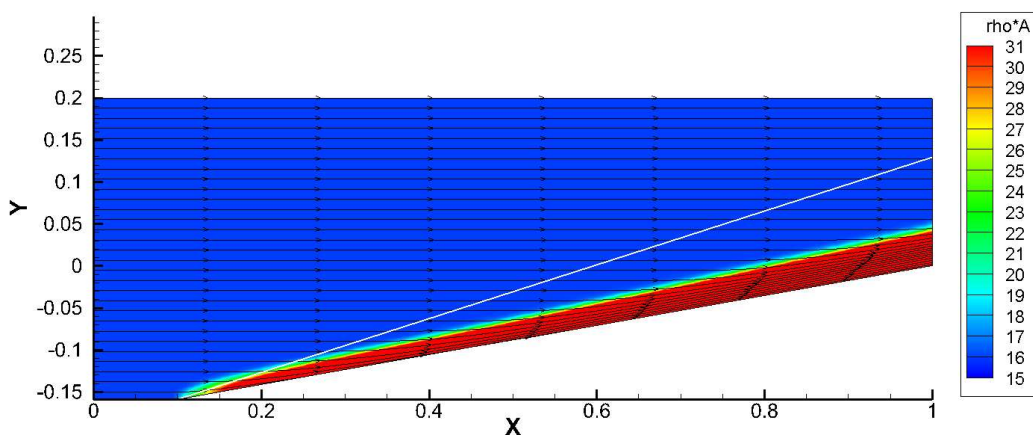


Рис. 30. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-4}$ м, $\alpha_l = 0.1$

Из результатов численного исследования (см. рис. 19–30) следует, что с увеличением объемной доли дисперсной фазы ударная волна в двухфазной смеси располагается ближе к поверхности наклонной стенки, чем в чистом газе, время релаксации частиц сокращается и, вследствие этого, уменьшается ширина зоны за ударной волной, в которой происходит релаксация частиц. При больших значениях объемной доли зона “пелены” и зона равновесного, полностью развернувшегося течения сливаются в расчетной области.

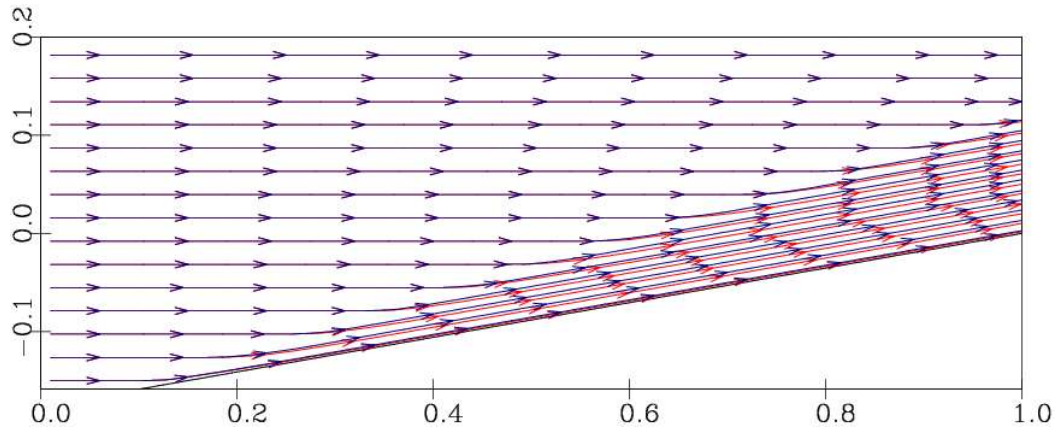


Рис. 31. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-5}$ м, $\alpha_l = 0.001$

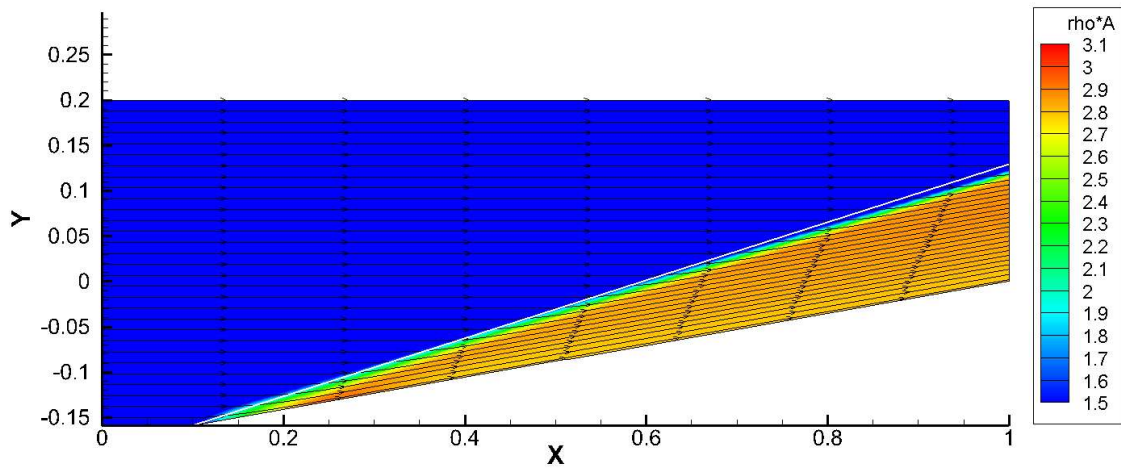


Рис. 32. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-5}$ м, $\alpha_l = 0.001$

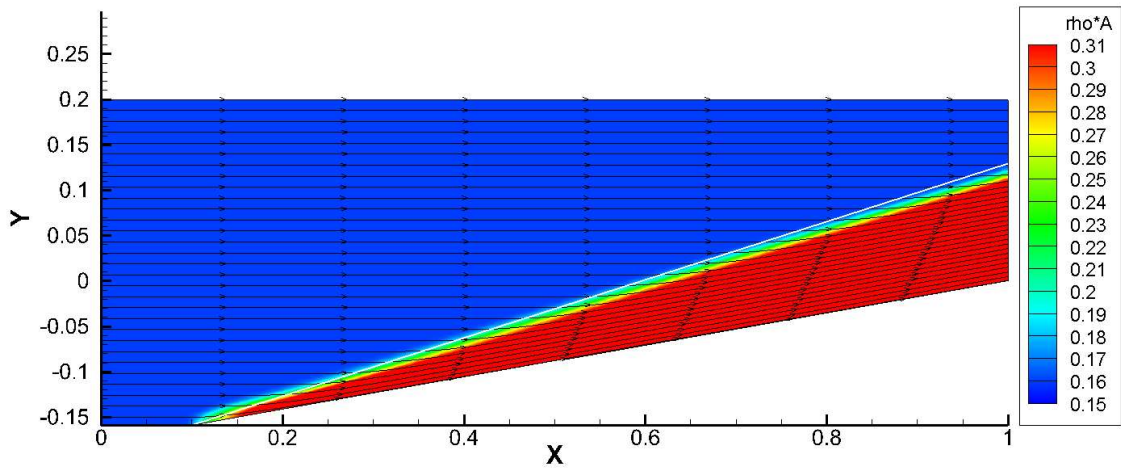


Рис. 33. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-5}$ м, $\alpha_l = 0.001$

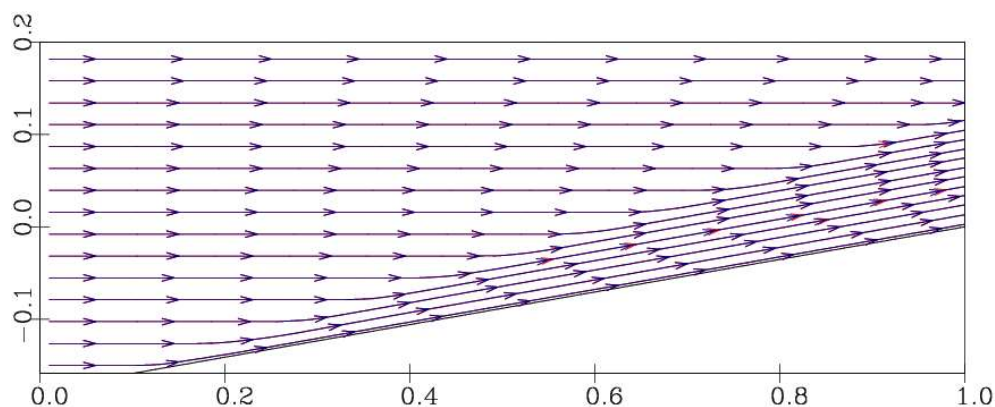


Рис. 34. Траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) $d_l = 10^{-6}$ м, $\alpha_l = 0.001$

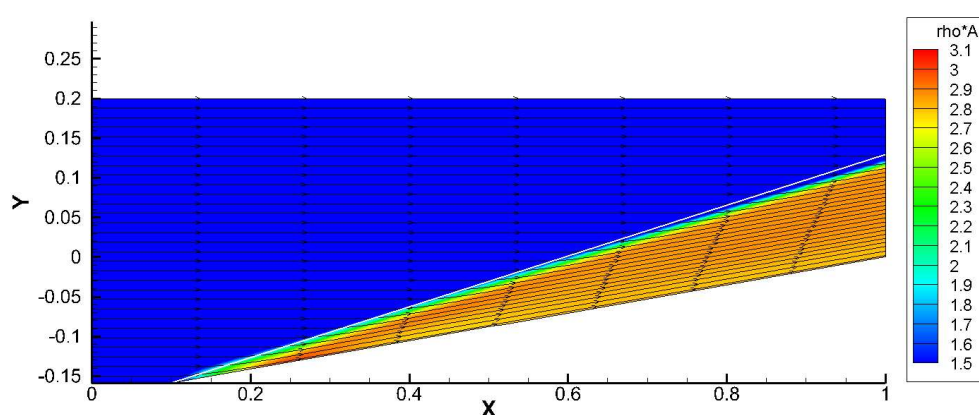


Рис. 35. Поле парциальной плотности $\alpha_g \rho_g$ и линии тока (черные ориентированные линии) несущей фазы $d_l = 10^{-6}$ м, $\alpha_l = 0.001$

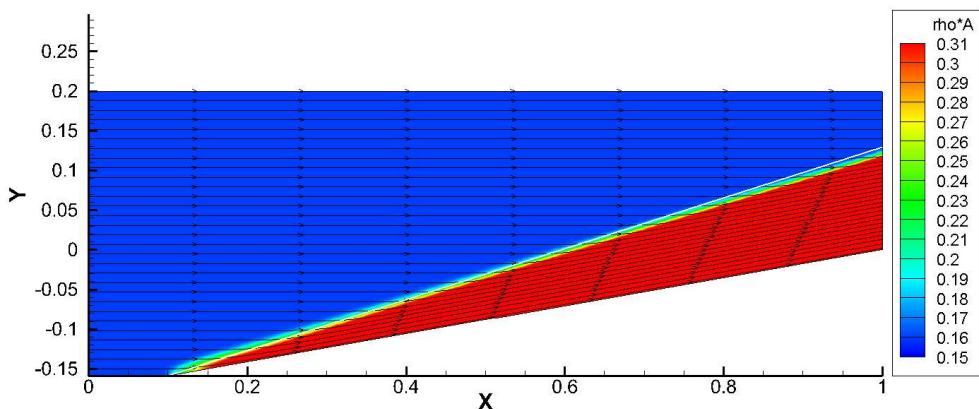


Рис. 36. Поле парциальной плотности $\alpha_l \rho_l$ и траектории движения частиц дисперсной фазы (черные ориентированные линии) $d_l = 10^{-6}$ м, $\alpha_l = 0.001$

Так как у мелких частиц низкая инерционность и маленькое время релаксации, то после столкновения со стенкой они быстро достигают состояния механического равновесия с несущей фазой. В тоже время, поведение крупных, инерционных частиц сильно зависит от столкновения со стенками вследствие сильного изменения импульса в процессе этого взаимодействия. По этой причине более крупным частицам требуется больше времени, чтобы прийти в равновесие с основным потоком после столкновения со стенкой. Это означает, что движение более крупных частиц в ограниченных объемах, например: каналах, сильно зависит от стенок.

При этом сам процесс столкновения частиц со стенками зависит от множества эффектов, которые значительно усложняют процесс моделирования. Наиболее важными параметрами являются сочетание материалов стенки и частицы, форма и размер частицы и шероховатость стенки [19–24].

Из результатов численного исследования (рис. 19–21 и рис 31–36) следует, что в сильно разбавленных газодисперсных потоках (при малой объемной доле дисперсной фазы $\alpha_l = 0.001$) ударная волна в двухфазной смеси располагается близко к ударной волне в чистом газе. Этот факт является следствием слабого влияния частиц на газовую фазу при этих условиях, то есть реализуется практически одностороннее взаимодействие фаз.

С уменьшением размера частиц, уменьшается масса частиц и время их релаксации и, вследствие этого, уменьшается ширина зоны за ударной волной, в которой происходит релаксация частиц и зона пелены, и разрастается зона равновесного течения. При размере частиц в 1 мкм траектории газа и частиц совпадают, и вся область за ударной волной практически состоит из зоны равновесного двухфазного течения.

5.4 Обтекание газодисперсным потоком угла расширения

Одна из характерных модельных задач однофазной газовой динамики – это задача о течении Прандтля – Майера, которое возникает при обтекании сверхзвуковым стационарным потоком угла расширения. Поэтому и для тестирования двумерного алгоритма расчета двухфазных течений удобно использовать решение задачи об обтекании двухфазным стационарным потоком угла расширения [38]. Схема фазовых траекторий приведена на рис. 37, где сплошная красная линия – траектория “тяжелой” частицы в потоке, штрих пунктирная синяя линия 2 – линия тока несущей фазы, сплошная красная линия 6 – траектории частиц, начально движущихся вдоль стенки угла расширения. Так как частица, движущаяся по траектории 6, почти мгновенно попадает в полностью развернутый поток газа за угловой точкой, то и локальное время релаксации τ_l для нее будет наименьшим для всех частиц в двухфазной системе. Отличительной особенностью данного течения является образование зоны свободной от частиц дисперсной фазы вблизи наклонной стенки (зона между стенкой и траекторией 6).

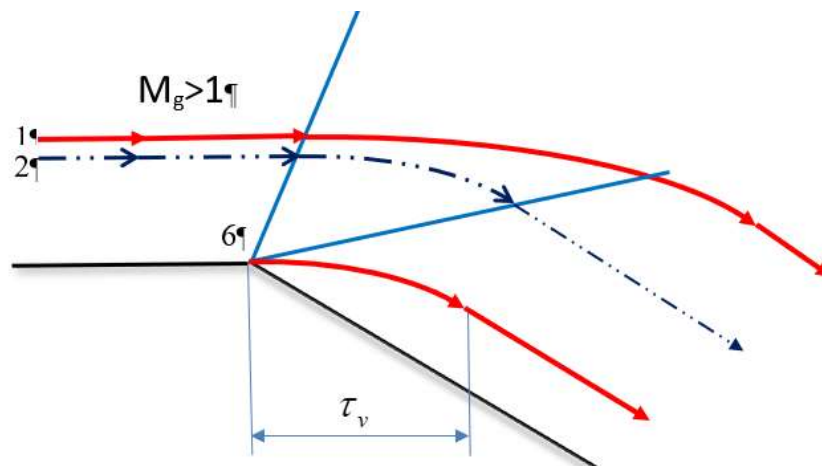


Рис. 37. Схема расположения траекторий дисперсной фазы (сплошная красная линия 1 и 6), несущей фазы (штрих пунктирная синяя линия 2), при обтекании угла расширения сверхзвуковым двухфазным потоком

Сверхзвуковым двухфазным потоком газа обтекает обратный угол 15° . Газ – воздух $\gamma = 1.4$. Во входном газодисперсном потоке частицы имеют ту же скорость и давление, что и газ. Использовалась сетка размером 200×80 . Параметры на входе несущей фазы: давление $p_g = 10^5$ Па, скорость $u_g = 2040$ м/с, температура $T_g = 529^\circ$ К, число Маха $M_g = 4.42$.

Дисперсная фаза – твердые или жидкие шарики из вещества с параметрами и уравнением состояния воды: $p_l = 10^5$ Па, $u_l = 2040$ м/с, $T_l = 529^\circ$ К, $M_l = 0.47$, плотность $\rho_l = 1000$ кг/м³.

Результаты расчетов, представленные на рис. 38–41, показывают влияние размера частиц на структуру течения. Объемная доля дисперсной фазы в этих расчетах фиксировалась $\alpha_l = 0.02$, диаметры частиц варьировались в диапазоне $d_l = 10^{-6}$ м (рис. 38), $d_l = 10^{-5}$ м (рис. 39), $d_l = 10^{-4}$ м (рис. 40), $d_l = 10^{-3}$ м (рис. 41).

На рисунках показаны: траектории движения несущей фазы (синие линии) и дисперсной фазы (красные линии) и поле парциальной плотности несущего газа $\alpha_g \rho_g$. Белыми линиями показаны границы веера волн разрежения при обтекании угла расширения чистым газом.

Видно, что частицы микронного диаметра ($d_l = 10^{-5}$ м) движутся равномерно с газовой фазой. С ростом размера частиц и времени релаксации траектории движения частиц заметнее отклоняются от линий тока газа, при этом увеличивается влияние частиц на газовую фазу. При возрастании диаметра частиц, начиная с $d_l = 10^{-5}$ м, за угловой точкой вблизи наклонной стенки возникает зона течения чистого газа. В этой зоне объемная доля дисперсной фазы пренебрежимо мала, что соответствует отсутствию частиц в течении. Размер этой зоны увеличивается с ростом диаметра частиц.

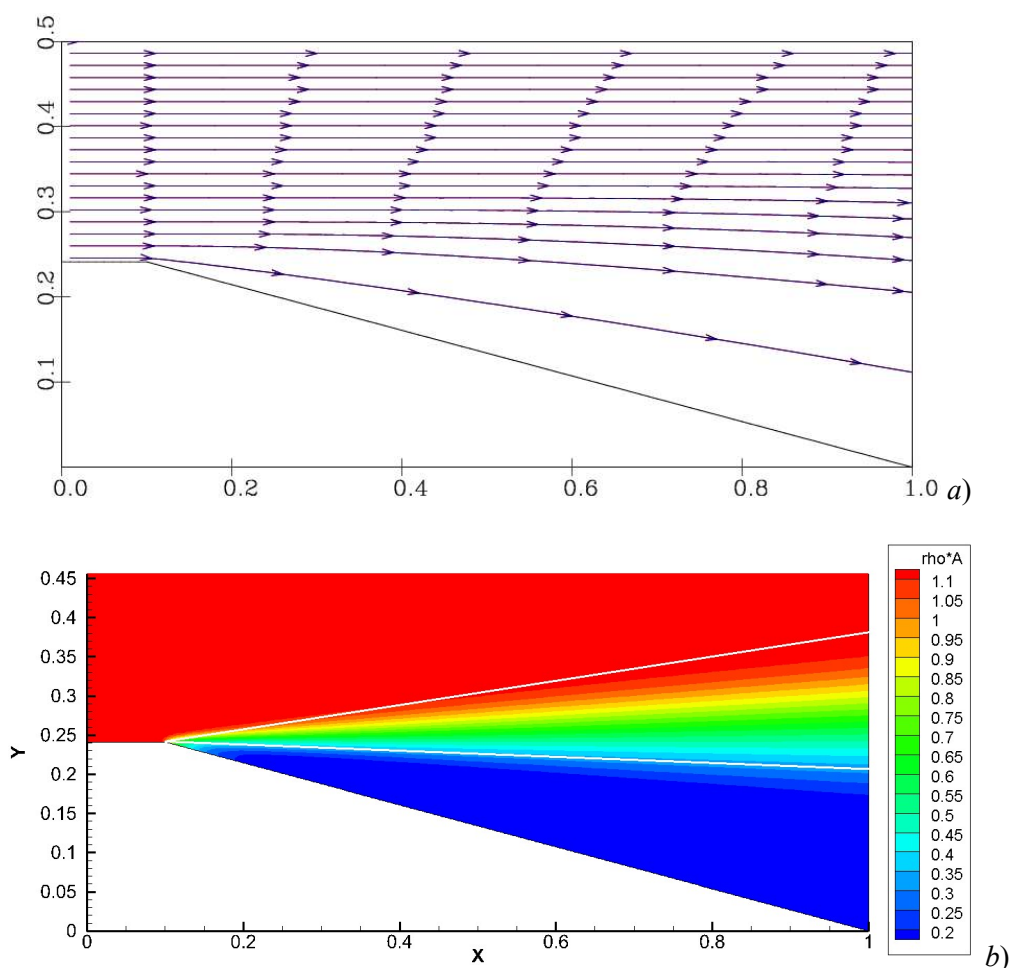


Рис. 38. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-6}$, $\alpha_l = 0.02$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

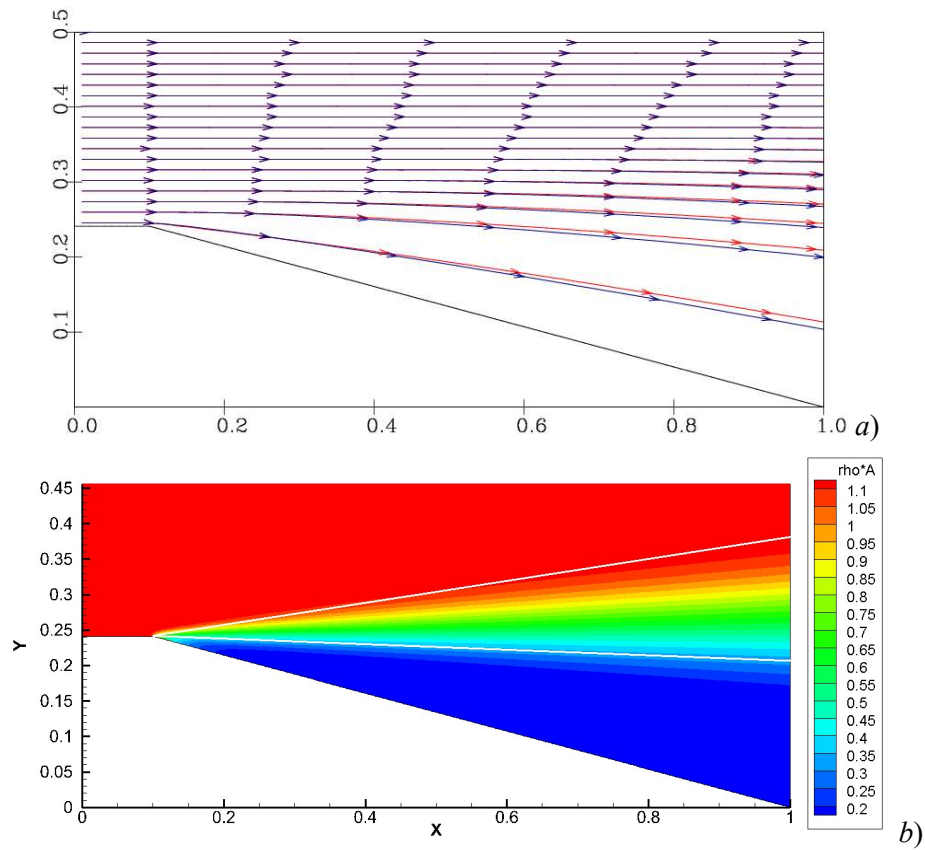


Рис. 39 Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-5}$, $\alpha_l = 0.02$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) частичная плотность газа

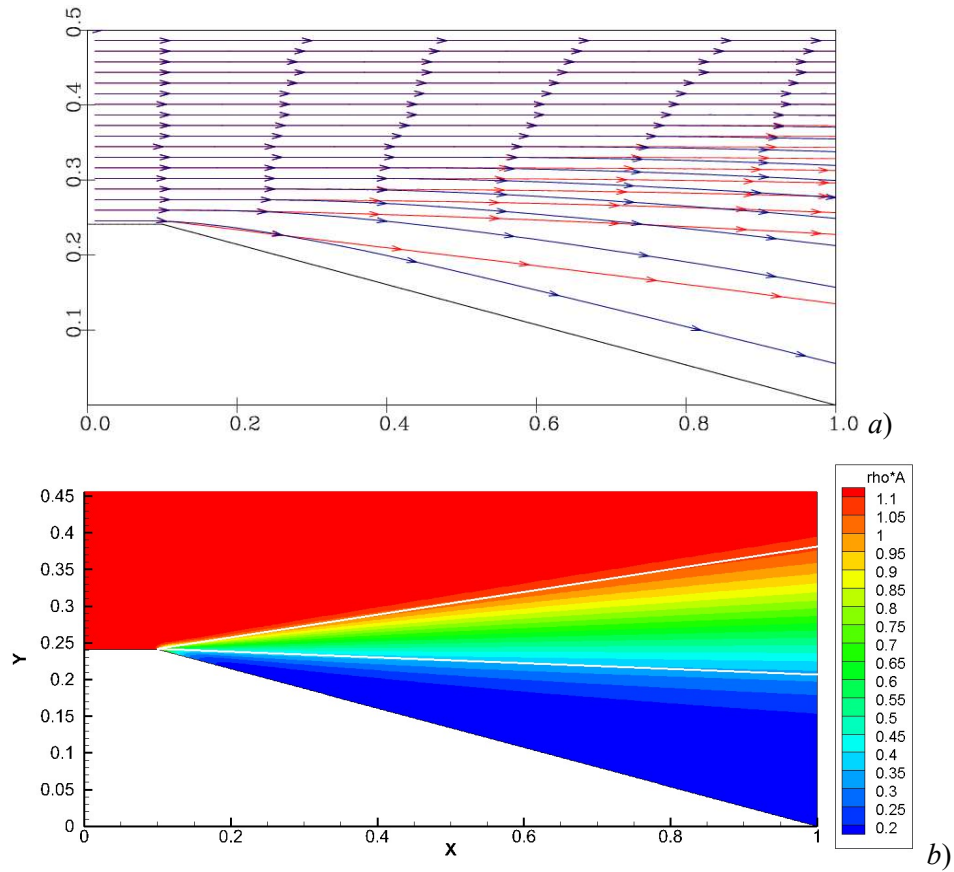


Рис. 40. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-4}$, $\alpha_l = 0.02$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) частичная плотность газа

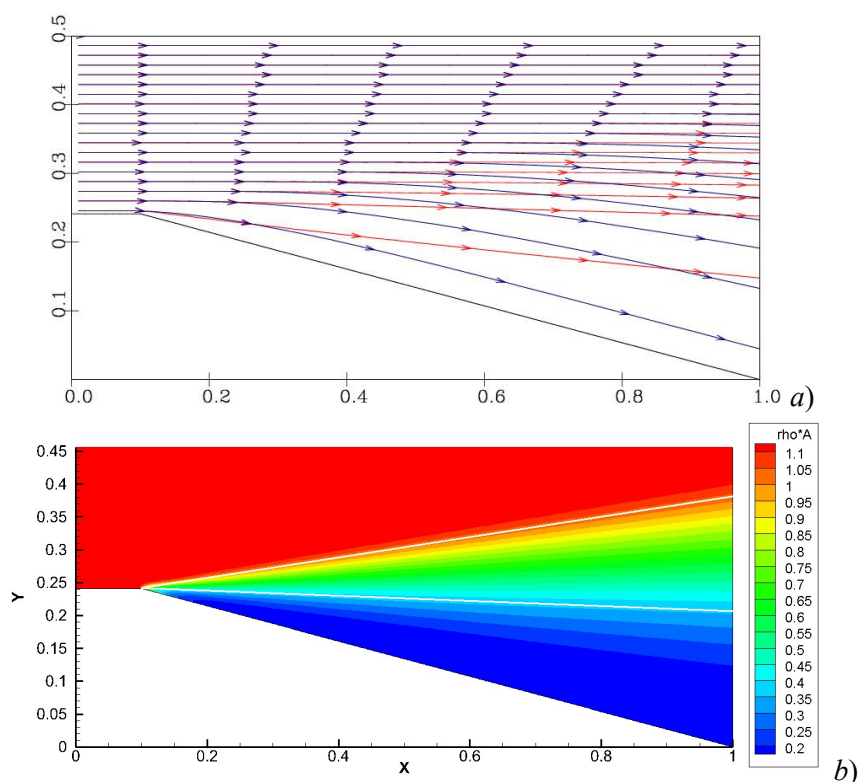


Рис. 41. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-3}$, $\alpha_l = 0.02$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

Результаты расчетов, представленные на рис. 42–45, показывают влияние объемной доли дисперсной фазы на структуру течения. Диаметр частиц фиксировался $d_l = 10^{-4}$ м. Объемная доля дисперсной фазы в этих расчетах варьировались в диапазоне $\alpha_l = 0.001$, (рис. 42), $\alpha_l = 0.01$ (рис. 43), $\alpha_l = 0.04$ (рис. 44) и $\alpha_l = 0.1$ (рис. 45).

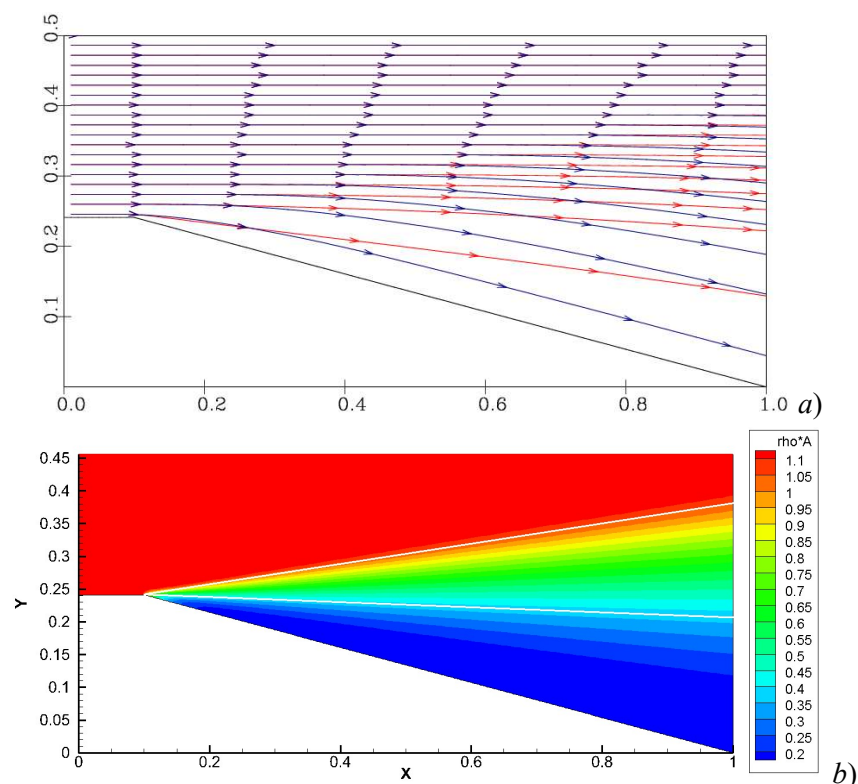


Рис. 42. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-4}$, $\alpha_l = 0.001$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

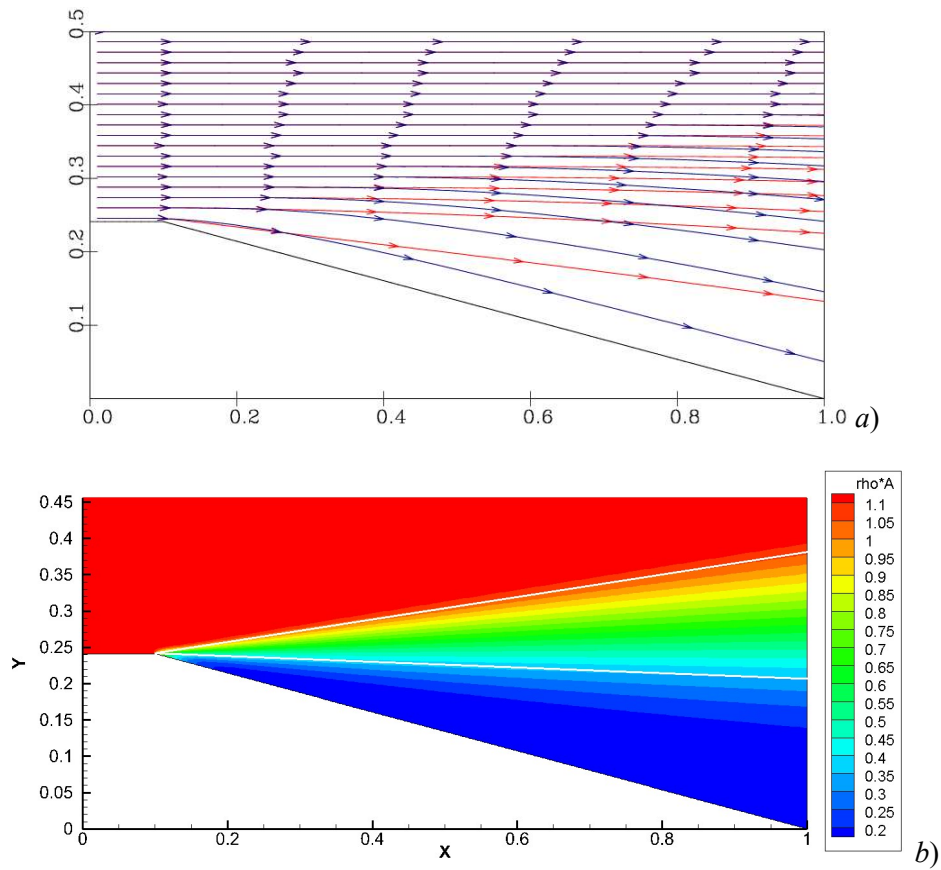


Рис. 43. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-4}$, $\alpha_l = 0.01$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

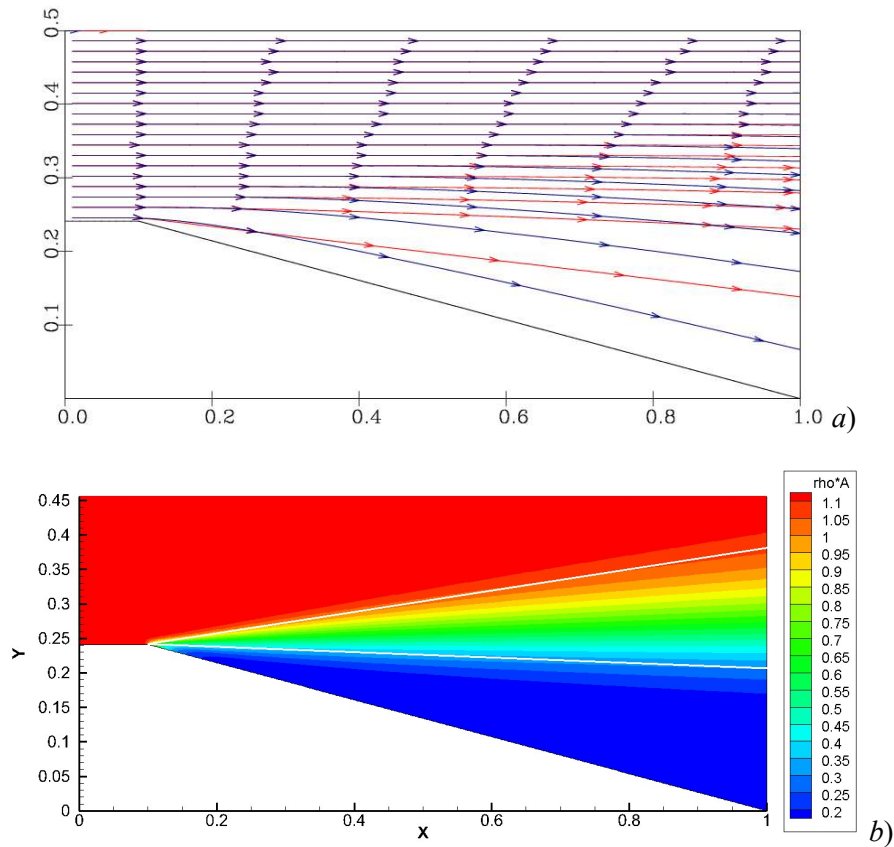


Рис. 44. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-4}$, $\alpha_l = 0.04$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

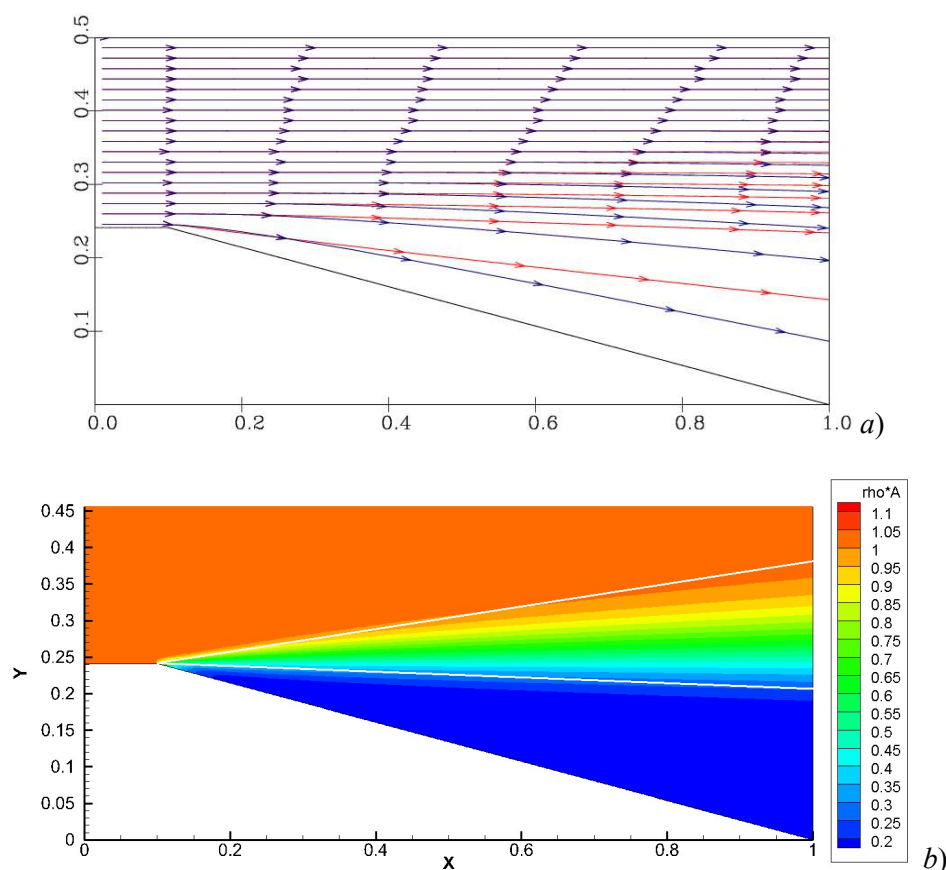


Рис. 45. Обтекание угла расширения газодисперсным потоком $d_l = 10^{-4}$, $\alpha_l = 0.1$:
 а) траектории частиц и линии тока, б) парциальная плотность газа

Видно, что в потоке с частицами данного диаметра ($d_l = 10^{-4}$ м) всегда образуется зона течения чистого газа за угловой точкой, которая слабо зависит от массовой доли дисперсной фазы.

6. Заключение

На базе математической модели для течений двухфазных сред А. Chinnayya, R. Saurel, Q. Carmouze (2016), метода Годунова и метода HLL разработан вычислительный алгоритм расчета течений неравновесных газодисперсных сред с малой объемной концентрацией дисперсной фазы. Реализуется полностью континуальное описание двухфазной среды в рамках Эйлер-Эйлера подхода. Основное внимание уделено учету влияния скоростной неравновесности (скольжению) фаз на соотношение траекторий движения частиц и газовой фазы, а также на взаимодействие дисперсной фазы с твердыми стенками. Рассмотрены два типа условий для дисперсной фазы в рамках Эйлера описания – условия моделирования взаимодействия частиц “удар с отскоком” и условия “удар с залипанием” на стенке. Решены задачи о распаде произвольного разрыва в двухфазной среде в канале постоянной ширины. Проведено численное моделирование эксперимента X. Rogue (1998) в одномерной постановке, получено удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных. Исследованы плоские, двумерные, сверхзвуковые ($M = 4.42$, по газовой фазе) газодисперсные разбавленные течения возле сжимающего угла и угла расширения. Варьировались размеры частиц в диапазоне значений: $d_l = 10^{-6}$ м, $d_l = 10^{-5}$ м, $d_l = 10^{-4}$ м, $d_l = 10^{-3}$ м и объемная доля дисперсной фазы в диапазоне значений: $\alpha_l = 0.001$, $\alpha_l = 0.01$, $\alpha_l = 0.04$, $\alpha_l = 0.05$, $\alpha_l = 0.1$. В структуре возмущенного течения определены размеры зон релаксации, равновесного течения в зависимости от варьируемых параметров. Так же в пристеночных областях течения установлено присутствие “пелен” (сжимающий угол) и зоны течения чистого газа (угол расширения).

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (номера тем FSFF-2023-0008 и FFGN-2024-0003).

Литература

1. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред, Ч.1-2, М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987, 464 с.
2. Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение. 1994. 319 с.
3. Крайко А. Н. К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 1. С. 96–106.
4. Drew D. A. Mathematical modeling of two-phase flows // Annu. Rev. Fluid Mech, 1983.
5. Baer M.R., Numizato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials // Int. J. Multiphase Flow. 1986.
6. Ferry J., Balachandar S. A fast Eulerian method for disperse two-phase flow // Int. J. Multiphase Flow. 2001. Vol. 27. No. 7. Pp. 1199–1226.
7. Saurel R., Abgrall R. A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows // J. Comp. Phys. 1999. Vol. 150. Pp. 425–467.
8. Kolev N. I. Multiphase Flow Dynamics. Springer, 3rd edition, 2007.
9. Elghobashi S. Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models // Applied Scientific Research. 1991. Vol. 48. No. 3–4. Pp. 301–314.
10. Saurel R., Chinnayya A., Carmouze Q. Modelling compressible dense and dilute two-phase flows // 2017, hal-01454839.
11. Chinnayya A., Saurel R., Carmouze Q. From dense to dilute two-phase flows // 2016, hal-01347785.
12. Saurel R., Pantano C. Diffuse-Interface Capturing Methods for Compressible Two-Phase Flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2018. Vol. 50. Pp. 105–130.
13. Иванов И. Э., Численное моделирование многофазных течений с большим содержанием дисперсной фазы // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. № 2. С. 62–70.
14. Иванов И. Э., Крюков И. А., Численный алгоритм моделирования двухфазных течений, содержащих границы раздела фаз // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Т.13, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-4/articles/369/>
15. Harten A., Lax P.D., Van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM Review. 1983. Vol. 25. No. 1. Pp. 35–61.
16. Toro E. F. The HLL and HLLC Riemann Solvers. In: Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
17. Carmouze Q., Saurel R., Lapebie E. Riemann solver with internal reconstruction (RSIR) for compressible single-phase and non-equilibrium two-phase flows // J. Comp. Phys. 2019. Vol. 408. No. 22. P. 109176.
18. Tokareva S. A., Toro E. F. HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow // J. Comp. Phys. 2010. Vol. 229. Pp. 3573–3604.
19. Schneiderbauer S. Continuum modeling of gas–particle flows: an overview // Acta Mechanica. 2024. Vol. 235, issue 12. Pp. 6959–7001. DOI 10.1007/s00707-024-04104-9
20. Johnson P.C., Jackson R. Frictional-collisional constitutive relationships for granular materials, with application to plane shearing // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 176. Pp. 67–93.
21. Simonin O. Continuum modeling of dispersed two-phase flows, in Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows. Von Karman Institute of Fluid Dynamics Lecture Series 1996-2.
22. Soleimani A., Pirker S., Schneiderbauer S. Solid boundary condition for collisional gas–solid flows at rough walls // Powder Technology. 2015. Vol. 281. Pp. 28–33.

23. Soleimani A., Schneiderbauer S., Pirker S. CFD study of the gas-particle flow in a horizontal duct: the impact of the solids wall boundary conditions // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 102. Pp. 1026–1037.
24. Benyahiaa S., Syamlala M., O'Brien T.J. Evaluation of boundary conditions used to model dilute, turbulent gas/solids flows in a pipe // *Powder Technology*. 2005. Vol. 156. Pp. 62–72.
25. Rogue X., Rodriguez G., Haas J.F., Saurel R. Experimental and numerical investigation of the shock-induced fluidization of the particle bed // *Shock Waves*. 1998. Vol. 8. Pp. 29–45.
26. Wen C.Y., Yu Y.H. Mechanics of fluidization // *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.* 1966. Vol. 62. Pp. 100–111.
27. Gibilaro L.G., Di Felice R., Waldram S.P., Foscolo P.U. Generalized friction factor and drag coefficient correlations for fluid-particle interactions // *Chem. Eng. Sci.* 1985. Vol. 40. No. 10. Pp. 1817–1823.
28. Gidaspow D. Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Description // Academic Press, 1994.
29. Di Felice R. The voidage function for fluid-particle interaction systems // *Int. J. Multiph. Flow*. 1994. Vol. 20. No. 1. Pp. 153–159.
30. Mazzei L., Lettieri P. A drag force closure for uniformly dispersed fluidized suspensions // *Chem. Eng. Sci.* 2007. Vol. 62. No. 22. Pp. 6129–6142.
31. Rong L. W., Dong K. J., Yu A. B. Lattice-Boltzmann simulation of fluid flow through packed beds of uniform spheres: Effect of porosity // *Chem. Eng. Sci.* 2013. Vol. 99. Pp. 44–58.
32. Beetstra R., van der Hoef M. A., Kuipers J. A. M. Drag force of intermediate Reynolds number flow past mono- and bidisperse arrays of spheres // *AIChE J.* 2007. Vol. 53. No. 2. Pp. 489–501.
33. Furfaro D., Saurel R. A simple HLLC-type Riemann solver for compressible non-equilibrium two-phase flows // *Computers & Fluids*. 2015. Vol. 111. Pp. 159–178.
34. Le Metayer O., Saurel R. The Noble-Abel stiffened-gas equation of state // *Phys. Fluids*. 2016. Vol. 28. P. 046102.
35. Крайко А. Н., Сулайманова С. М. Двужидкостные течения смеси газа и твердых частиц с “пеленами” и “шнурами”, возникающими при обтекании непроницаемых поверхностей // *Прикладная математика и механика*. 1983. Т. 47. № 4. С. 619–630.
36. Крайко А. Н. Математические модели для описания течений газа и инородных частиц и нестандартной фильтрации жидкости и газа в пористых средах // *Вестник ЮУрГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”*. 2014. Т. 7. № 1. С. 34–48.
37. Bogdanyuk D., Emelyanov V., Pustovalov A., Volkov K. Simulation of supersonic gas-particle flows expanding from the nozzle into rarefied atmosphere // *Acta Astronautica*. 2023. Vol. 204. Pp. 794–806.

References

1. Nigmatulin R. I., *Dynamics of multiphase media*, Part 1-2, M.: Nauka, Ch. ed. physics and mathematics lit., 1987, 464 p. [in Russian].
2. Sternin L. E., Shraiber A. A., *Multiphase gas flows with particles*, M.: Mashinostroenie, 1994, 319 p. [in Russian].
3. Kraiko A. N., To the two-fluid model of gas flows and particles dispersed in it, *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 1, pp. 96–106.
4. Drew D. A., Mathematical Modeling of Two-Phase Flow, *Annual Reviews on Fluid Mechanics*, 1983, vol. 15, pp. 261–291. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.001401>
5. Baer M. R., Nunziato J. W., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials, *Int. J. Multiphase Flow*, 1986, vol. 12, no. 6, pp. 861–889. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(86\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9)
6. Ferry J., Balachandar S., A fast Eulerian method for disperse two-phase flow, *Int. J. Multiphase Flow*, 2001, vol. 27, no. 7, pp. 1199–1226. [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(00\)00069-0](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(00)00069-0)

7. Saurel R., Abgrall R., A Multiphase Godunov Method for Compressible Multifluid and Multiphase Flows, *J. Comp. Phys.*, 1999, vol. 150, pp. 425–467. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6187>
8. Kolev N. I. *Multiphase Flow Dynamics*. Springer, 3rd edition, 2007.
9. Elghobashi S., Particle-laden turbulent flows: direct simulation and closure models, *Applied Scientific Research*, 1991, vol. 48, no. 3–4, pp. 301–314. <https://doi.org/10.1007/bf02008202>
10. Saurel R., Chinnayya A., Carmouze Q., Modelling compressible dense and dilute two-phase flows, *Physics of Fluids*, 2017, vol. 29, no. 6. 063301. <https://doi.org/10.1063/1.4985289>
11. Chinnayya A., Saurel R., Carmouze Q., From dense to dilute two-phase flows, 2016, hal-01347785.
12. Saurel R., Pantano C., Diffuse-Interface Capturing Methods for Compressible Two-Phase Flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2018, vol. 50, pp. 105–130. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-050109>
13. Ivanov I. E., Numerical simulation of multiphase flows with a high content of dispersed phase, *Aerospace MAI journal*, 2009, vol. 16, no. 2, pp. 62–70 [in Russian].
14. Ivanov I. E., Kryukov I. A., Numerical algorithm of modeling of the two-phase flow containing inter-phase boundaries, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2012, vol. 13, iss. 4 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2012-13-4/articles/369/>
15. Harten A., Lax P.D., Van Leer B., On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM Review*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35–61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
16. Toro E. F., The HLL and HLLC Riemann Solvers. In: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1997.
17. Carmouze Q., Saurel R., Lapebie E., Riemann solver with internal reconstruction (RSIR) for compressible single-phase and non-equilibrium two-phase flows, *J. Comp. Phys.*, 2019, vol. 408, no. 22, P. 109176. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.109176>
18. Tokareva S. A., Toro E. F., HLLC-type Riemann solver for the Baer-Nunziato equations of compressible two-phase flow, *J. Comp. Phys.*, 2010, vol. 229, pp. 3573–3604. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.016>
19. Schneiderbauer S., Continuum modeling of gas–particle flows: an overview, *Acta Mechanica*, 2024, vol. 235, issue 12, pp. 6959–7001. DOI 10.1007/s00707-024-04104-9
20. Johnson P. C., Jackson R., Frictional-collisional constitutive relationships for granular materials, with application to plane shearing, *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 176, pp. 67–93. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000570>
21. Simonin O., Continuum modeling of dispersed two-phase flows, in *Combustion and Turbulence in Two-Phase Flows*. Von Karman Institute of Fluid Dynamics Lecture Series 1996-2.
22. Soleimani A., Pirker S., Schneiderbauer S., Solid boundary condition for collisional gas–solid flows at rough walls, *Powder Technology*, 2015, vol. 281, pp. 28–33.
23. Soleimani A., Schneiderbauer S., Pirker S., CFD study of the gas-particle flow in a horizontal duct: the impact of the solids wall boundary conditions, *Procedia Engineering*, 2015, vol. 102, pp. 1026–1037. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2015.04.067>
24. Benyahia S., Syamlala M., O'Brien T. J., Evaluation of boundary conditions used to model dilute, turbulent gas/solids flows in a pipe, *Powder Technology*, 2005, vol. 156, pp. 62–72. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2005.04.002>
25. Rogue X., Rodriguez G., Haas J. F., Saurel R., Experimental and numerical investigation of the shock-induced fluidization of the particle bed, *Shock Waves*, 1998, vol. 8, pp. 29–45. <https://doi.org/10.1007/s001930050096>
26. Wen C. Y., Yu Y. H., Mechanics of fluidization, *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, 1966, vol. 62, pp. 100–111.

27. Gibilaro L. G., Di Felice R., Waldram S. P., Foscolo P. U., Generalized friction factor and drag coefficient correlations for fluid-particle interactions, *Chem. Eng. Sci.*, 1985, vol. 40, no. 10, pp. 1817–1823. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(85\)80116-0](https://doi.org/10.1016/0009-2509(85)80116-0)
28. Gidaspow D., *Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Description*, Academic Press, 1994, 467 pp.
29. Di Felice R. The voidage function for fluid-particle interaction systems, *Int. J. Multiph. Flow*, 1994, vol. 20, no. 1, pp. 153–159. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(94\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0301-9322(94)90011-6)
30. Mazzei L., Lettieri P., A drag force closure for uniformly dispersed fluidized suspensions, *Chem. Eng. Sci.*, 2007, vol. 62, no. 22, pp. 6129–6142. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2007.06.028>
31. Rong L. W., Dong K. J., Yu A. B., Lattice-Boltzmann simulation of fluid flow through packed beds of uniform spheres: Effect of porosity, *Chem. Eng. Sci.*, 2013, vol. 99, pp. 44–58. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2013.05.036>
32. Beetstra R., van der Hoef M. A., Kuipers J. A. M., Drag force of intermediate Reynolds number flow past mono- and bidisperse arrays of spheres, *AIChE J.*, 2007, vol. 53, no. 2, pp. 489–501. <https://doi.org/10.1002/aic.11065>
33. Furfaro D., Saurel R., A simple HLLC-type Riemann solver for compressible non-equilibrium two-phase flows, *Computers & Fluids*, 2015, vol. 111, pp. 159–178. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.01.016>
34. Le Metayer O., Saurel R., The Noble-Abel stiffened-gas equation of state, *Phys. Fluids*, 2016, vol. 28, P. 046102. <https://doi.org/10.1063/1.4945981>
35. Kraiko A. N., Sulaimanova S. M., Two-fluid flows of a mixture of a gas and solid particles with “films” and “filaments” appearing in flows past impermeable surfaces, *J. Appl. Math. Mech.*, 1983, vol. 47, no. 4, pp. 507–516. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(83\)90090-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(83)90090-4)
36. Kraiko A. N., The Mathematical Models for Description of Flow of Gas and Foreign Particles and for Non-Stationary Filtration of Liquids and Gas in Porous Medium, *Bulletin of the South Ural State University, Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, vol. 7, no. 1, pp. 34–48.
37. Bogdanyuk D., Emelyanov V., Pustovalov A., Volkov K., Simulation of supersonic gas–particle flows expanding from the nozzle into rarefied atmosphere, *Acta Astronautica*, 2023, vol. 204, pp. 794–806. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.09.043>

Статья поступила в редакцию 27 июня 2025 г.