

Comparison of Drift-Flux Model Formulations in Modeling Unsteady Flows in the Pipes

B. I. Krasnopol'sky¹, P. A. Karypidis¹, D. V. Bykov²,
A. N. Gryzlov², M. Arsalan³

¹ Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119192, Russia

² Aramco Innovations, Moscow, 117105, Russia

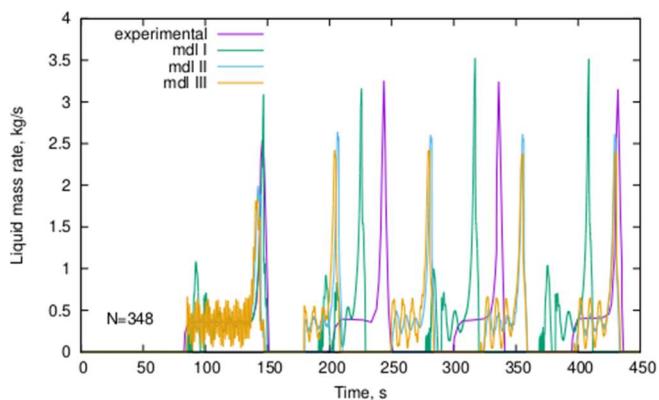
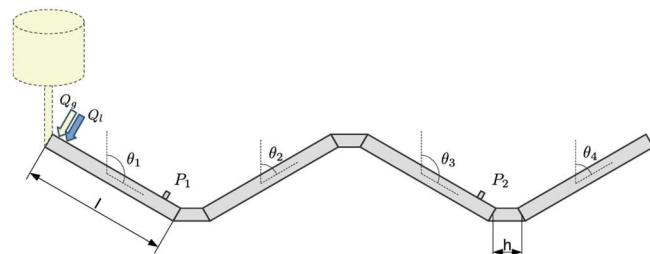
³ Aramco, Dhahran, Kingdom of Saudi Arabia

krasnopol'sky@imec.msu.ru

Abstract

Drift-flux models remain the popular choice for modeling multiphase flows in the pipes in engineering applications. However, multiple drift-flux formulations do exist and there is a lack of direct comparison, which complicates the choice for the specific application. This paper reviews several such formulations suitable for modelling 1D multiphase flows in the pipes and compares three of them in terms of accuracy and computational efficiency. The results obtained show good correspondence between the models when modeling steady flows, but they can significantly differ for unsteady flows. Moreover, choosing a more accurate and theoretically justified model does not lead to an increase in accuracy of the simulations, but significantly increases an amount of calculations time. These findings suggest that the uncertainty due to the drift-flux model parameters may exceed significantly the error introduced by simplified model formulations.

Keywords: multiphase flow pipe flow, drift-flux model, severe slugging, numerical simulation



Modeling of the periodic flow in a W-shaped pipe: top – sketch of the computational domain, bottom – comparison of the predicted liquid mass rates at the outlet for three drift-flux models

УДК 519.635.8, 532.542.4

Сравнение различных формулировок модели дрейфа при расчете нестационарных течений в трубах

Б. И. Краснопольский¹, П. А. Карипидис¹, Д. В. Быков²,
А. Н. Грызлов², М. Арсалан³

¹ НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119192, Мичуринский пр., 1

² Aramco Innovations, Москва, 117105, Россия

³ Aramco, Дахран, Королевство Саудовская Аравия

krasnopolsky@imec.msu.ru

Аннотация

Модели дрейфа являются достаточно широко распространенным выбором при разработке инженерных приложений для моделирования многофазных течений в трубах. В литературе известно несколько различных вариантов записи системы уравнений для этой математической модели, однако нет убедительных результатов сравнения между ними, на основе которых можно было бы сделать аргументированный выбор в пользу конкретной модели для целевого приложения. В данной статье представлен обзор нескольких известных в литературе вариантов записи уравнений модели дрейфа для одномерных осредненных по сечению уравнений, описывающих многофазные течения в трубах. Проведено сравнение трех из них на ряде тестовых задач с точки зрения точности результатов моделирования и объема требуемых вычислений. Полученные результаты демонстрируют хорошее согласие между разными моделями для стационарных течений, но в то же время имеются существенные различия при моделировании нестационарных течений. Более того, выбор более обоснованного с теоретической точки зрения варианта записи модели дрейфа не дает сколько-нибудь значимого преимущества с точки зрения сравнения с экспериментальными данными, но существенно увеличивает объем вычислений. Полученные результаты дают основание предположить, что различия в форме записи уравнений вносят менее значимый вклад в погрешность результатов моделирования в сравнении с неоднозначностями в эмпирических корреляциях, используемых для замыкания модели дрейфа.

Ключевые слова: многофазное течение, течение в трубе, модель дрейфа, жидкостные пробки, численное моделирование

1. Введение

В литературе известно большое количество различных одномерных математических моделей для описания многофазных течений в длинных трубах. Так, для неизотермического двухфазного течения к ним относятся модели с 7 уравнениями [1, 2], первоначально предложенные в работах Баера и Нунциато [3], многожидкостные модели с 6 уравнениями [4, 5], модели дрейфа с 5 уравнениями [6, 7] или более простые механистические модели. Подробный обзор этих моделей можно найти, например, в [8, 9]. Исходя из имеющихся преимуществ и недостатков, одномерные модели дрейфа по-прежнему остаются наиболее распространенным выбором при моделировании многофазных течений в трубах, в том числе в стволах скважин и трубопроводных системах. Это, в первую очередь, связано с их относительно высокой вычислительной эффективностью в сочетании с применимостью широкому диапазону режимов течения.

Модель дрейфа сама по себе лишь устанавливает упрощенное соотношение для скорости между фазами. Скорость фаз определяется через среднеобъемную скорость смеси с помощью двух эмпирических коэффициентов [10]. Возможность моделирования с помощью данной модели переходных процессов в скважинах, таких как повышение давления в закрытой скважине и пробковые течения, формирование которых обусловлено рельефом поверхности, на которой расположена труба, показана, например, в работах [11–13]: результаты моделирования демонстрируют как качественное, так и количественное согласие с экспериментальными данными.

Однако сама модель дрейфа по себе не определяет однозначным образом форму записи системы дифференциальных уравнений. Изучение литературы также не дает однозначного ответа на вопрос выбора конкретной формулировки математической модели. Например, уравнения могут быть сформулированы в терминах среднемассовой или среднеобъемной скорости смеси, могут быть записаны в консервативной или неконсервативной форме, могут включать уравнения неразрывности каждой из фаз или неразрывности смеси в целом, слагаемое, отвечающее за учет сил трения может быть записано через среднемассовую или среднеобъемную скорость, и т.д. [6, 12, 14–17]. Ключевой вопрос связан с формальной эквивалентностью этих моделей, перечнем допущений, использованных при их выводе, и их применимостью для моделирования нестационарных течений. Отсутствие этой информации усложняет понимание с какой точностью сохраняют модели ключевые параметры течения и доставляет сложности при их сравнении [18].

В данной работе представлено сравнение результатов моделирования для нескольких моделей дрейфа, применяемых для расчета многофазных течений в трубах. Три выбранные модели, использующие различные формулировки уравнения импульса смеси, рассматриваются и оцениваются с точки зрения корректности результатов моделирования и вычислительной эффективности. Эти модели реализованы в коде fs1D с использованием идентичных численных методов и сопоставлены на ряде задач, включающих моделирование как стационарных, так и нестационарных периодических пробковых течений.

Настоящая статья организована следующим образом. Во второй главе представлен обзор нескольких одномерных моделей дрейфа для изотермических сжимаемых двухфазных течений. Далее приведены детали вычислительного алгоритма, реализованного в прототипе исследовательского кода. В следующей секции приведены результаты верификации и детального сравнения различных моделей. Завершают статью раздел обсуждения и заключение.

2. Формы записи уравнений модели дрейфа

Для ясности дальнейшего повествования, рассмотрим в настоящей работе одномерную изотермическую модель для смеси двух сжимаемых фаз (газ, жидкость) в трубе переменного поперечного сечения. Определим плотность смеси, ρ_m , среднеобъемную скорость смеси, v_m , и среднемассовую скорость смеси, u_m , как

$$\rho_m = \sum_k \alpha_k \rho_k,$$

$$v_m = \sum_k \alpha_k v_k,$$

$$u_m = \sum_k \alpha_k \rho_k v_k / \rho_m,$$

где α_k – объемная доля k -й фазы; ρ_k – плотность k -й фазы, v_k – скорость k -й фазы, и индекс k соответствует газу (g) или жидкости (l). В соответствии с [8, 9, 19, 20], модель, состоящая из уравнений сохранения массы и импульса с учетом массовых источников, может быть записана в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A \alpha_k \rho_k v_k) = \frac{q_k}{A}, \quad k = \{g, l\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_k (\alpha_k \rho_k v_k) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \sum_k (A \alpha_k \rho_k v_k^2) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{D} \tau - \rho_m g \cos \theta \quad (2)$$

Здесь x – координата вдоль трубы; t – время; p – давление; D и A – диаметр и площадь сечения трубы; θ – угол наклона трубы, отсчитываемый от вертикали; и q_k – источник массы k -й фазы. Уравнение импульса в этой модели получается путем суммирования двух уравнений импульса для каждой из фаз; это пример уравнений для смеси в целом, записанной в терминах фазовых переменных. Слагаемое, отвечающее за учет действия вязких сил, включает в себя трение жидкости со стенкой, и записывается в виде [9]

$$\tau = \frac{f}{2} \rho_m v_m |v_m|, \quad (3)$$

где f – коэффициент трения. Источник импульса в уравнении (2) не рассматривается, соответствующее слагаемое и кладется равным нулю.

Еще один подход, популярный в нефтегазовых приложениях – это использование уравнения импульса смеси, записанного в терминах среднеобъемной скорости [16, 17, 21]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m v_m) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A \rho_m v_m^2) = - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{D} \tau - \rho_m g \cos \theta \quad (4)$$

Уравнение (4) постулируется как уравнение переноса импульса смесью жидкостей, рассматриваемой как целое. При этом оно несколько проще для численного моделирования. Однако, формальная эквивалентность этого уравнения уравнению (2) является неочевидной.

Несколько измененная форма уравнения импульса, также записанная через скорость смеси, упоминается в [12]. Как утверждается, такая неконсервативная форма уравнения импульса используется в специализированном коммерческом продукте для моделирования месторождений ECLIPSE [22]

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial x} = - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_m} \frac{4}{D} \tau - g \cos \theta - \frac{v_m q}{\rho_m A} \quad (5)$$

Следует отметить, что это уравнение отличается уравнений от (2) и (4), и не сводится ни к одному из них с помощью алгебраических преобразований.

Для замыкания перечисленных выше уравнений необходимо использовать несколько дополнительных соотношений. Они включают соотношение на сумму объемных долей

$$\alpha_g + \alpha_l = 1, \quad (6)$$

уравнения состояния для фаз

$$\rho_g = \rho_g(p), \quad (7)$$

$$\rho_l = \rho_l(p), \quad (8)$$

и замыкания для модели дрейфа

$$v_g = C_0 v_m + v_d, \quad (9)$$

где C_0 и v_d – параметр профиля и коэффициент скорости дрейфа. Таким образом, в данной работе рассматриваются следующие замкнутые математические модели:

- модель I: уравнения (1), (2), (6)–(9);
- модель II: уравнения (1), (4), (6)–(9);
- модель III: уравнения (1), (5), (6)–(9).

Попытка систематического сравнения различных вариантов записи моделей дрейфа с теоретической точки зрения была предпринята в работе [12]. Авторами было рассмотрено течение смеси жидкости и газа в круглой трубе. Уравнения модели дрейфа были выведены из многожидкостной модели и определены пределы применимости приведенной модели. При допущениях длинноволнового приближения и безынерционного проскальзывания фаз, авторами были получены (i) асимптотическое уравнение импульса и (ii) алгебраическое соотношение, которое представляет собой замыкание модели дрейфа. Инерциальные члены в

полученном уравнении импульса сопоставлены с инерциальными членами в уравнении импульса модели дрейфа (5). Было показано, что разница между этими уравнениями стремится к нулю, если выполняется любое из следующих условий:

- объемная доля дисперсной фазы мала;
- можно пренебречь проскальзыванием фазовых скоростей;
- режим течения является безынерционным.

Таким образом, сформулированная модель дрейфа (1), (5) строго вытекает из законов сохранения в предположении безынерционного проскальзывания фаз, если выполняется какое-либо из указанных условий. В противном случае согласованность этой модели с многофазной моделью оказывается не очевидной.

Следует отметить, что при численном моделировании переходных процессов течение может проходить в различных режимах, что затрудняет оценку применимости модели только на основе предельных случаев. В данной работе предпринята попытка восполнить пробел в этой информации и провести сравнение трех упомянутых вариантов записи модели дрейфа. В работе выполняется сравнение результатов моделирования, так и эффективность вычислений, с акцентом на моделирование нестационарных течений.

3. Детали реализации вычислительного алгоритма

Результаты численных экспериментов, представленные в данной работе и обсуждаемые ниже, выполнены с помощью разработанного вычислительного кода для моделирования течений в трубах fs1D [23]. В общем случае, данный код способен моделировать в одномерной постановке неизотермические сжимаемые трехфазные (газ/нефть/вода) течения в трубах с учетом выделения и растворения газа. Для проведения экспериментов, представленных в данной работе, используется упрощенная двухфазная изотермическая модель (одна из фаз тождественно равна нулю). Три рассматриваемых варианта формулировок модели дрейфа, модель I, модель II и модель III, реализованы как опциональные в fs1D.

Вычислительный алгоритм в fs1D построен на основе разнесенных расчетных сеток (рис. 1): объемные доли, плотности и давление определяются в центрах ячеек, а скорости определены на гранях ячеек. Дискретизация дифференциальных уравнений строится с использованием метода конечных объемов. Для дискретизации конвективных членов используется схема с разностями против потока первого порядка.

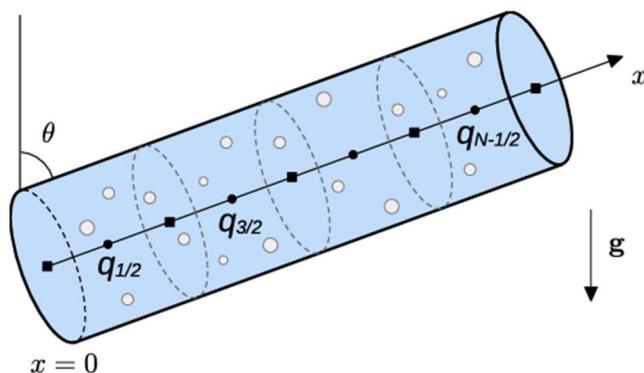


Рис. 1. Схематичное изображение расчетной области: квадратные маркеры соответствуют граням ячеек, круглые маркеры соответствуют центрам ячеек

Для интегрирования по времени используется полностью неявная схема первого порядка, обеспечивающая достаточно высокую надежность вычислительного алгоритма при решении сложных нелинейных уравнений. Для выбора шага интегрирования по времени разработан адаптивный алгоритм, который основан на скорости сходимости, автоматически подстраиваясь под характерную скорость сходимости нелинейных итераций метода Ньютона в диапазоне 5–10 итераций.

В вычислительном коде fs1D реализован алгоритм численной генерации матрицы Якоби [5]. Несмотря на то, что этот подход требует больших вычислительных ресурсов, чем аналитическая форма записи матрицы Якоби, он обеспечивает гибкость в модификации как математической модели, так и численной дискретизации решаемой системы дифференциальных уравнений. Для решения системы нелинейных уравнений на каждом шаге по времени используется модифицированный метод Ньютона – матрица Якоби пересчитывается только в начале временного шага и в случае ухудшения сходимости нелинейных итераций. Использование нумерации переменных по ячейкам [5] приводит к блочно-диагональной структуре матрицы Якоби. Размер блока варьируется в зависимости от используемой физической модели. Рассмотренный в данной статье случай приводит к набору из четырех базовых переменных на ячейку, $\{v_m, \alpha_g, \alpha_o, p\}$. В качестве критерия сходимости нелинейных итераций используется условие на взвешенную норму поправки вектора решения, данная величина должны быть меньше 10^{-6} . Поскольку в полный вектор переменных входят существенно разнородные величины (объемные доли – порядка единицы, давление – порядка 10^5 Па), то в качестве нормирующего множителя используются следующие весовые коэффициенты:

$$w = \{1 \text{ м/с}, 1, 1, 10^5 \text{ Па}\}.$$

Специфическая структура матрицы Якоби явным образом учитывается как в процедуре вычисления коэффициентов матрицы, так и в методе решения систем линейных алгебраических уравнений, применяемом для решения систем уравнений на каждой итерации метода Ньютона. Для этой цели используется прямой метод блочно-трехдиагональной прогонки с методом Гаусса и для нахождения обратных диагональных блоков [24]. Детальная оптимизация процедуры генерации матрицы Якоби и сопутствующий выбор метода решения систем уравнений позволили получить линейную зависимость сложности вычислений от размера сетки, $O(N)$, где N – размер расчетной сетки.

При проведении численных экспериментов использовались замыкания для параметра профиля и коэффициента скорости дрейфа, C_0 и v_d , предложенные в [15]. Этот вид замыканий был предложен для моделирования течений в трубах малого диаметра ($D \leq 5D$ см) и применим для моделирования течений начиная от вертикальных и до около-горизонтальных труб, $\theta \in [0^\circ, 88^\circ]$ (угол отсчитывается от вертикали). Диапазон углов наклона труб, рассмотренных в тестах, составляет $\theta \in [0^\circ, 121^\circ]$. Этот факт может оказать некоторое влияние на результаты моделирования, и другие корреляции, предназначенные для более широкого диапазона углов наклона труб, будут также исследованы в будущем. Вместе с тем, мы не ожидаем существенного влияния выбора конкретной модели замыканий модели дрейфа на результаты, полученные в настоящей работе.

4. Численные эксперименты

В статье ниже представлены результаты нескольких численных экспериментов. В их число входит несколько базовых тестов, использовавшихся для верификации вычислительного кода fs1D, а также тесты, ориентированные на сравнение различных форм записи моделей дрейфа. Детали постановок тестовых задач и результаты сравнения различных математических моделей приведены ниже.

4.1. Течение жидкости в трубе переменного сечения

В процессе разработки было проведено тщательное тестирование вычислительного кода fs1D. В качестве одного из простейших тестов, использовавшихся для верификации, была выбрана задача моделирования однофазного течения эффективно несжимаемой жидкости в трубе переменного угла наклона и сечения.

Тест моделирует течение воды в трубе, состоящей из четырех секций, которые имеют разный диаметр и угол наклона (рис. 2): две горизонтальные секции имеют диаметр 0.05 м и

0.1 м, а вертикальные секции – 0.1 м и 0.2 м. Жидкость поступает в трубу с левого края с постоянной скоростью $v_m = 1$ м/с, на правой границе задано фиксированное давление $P_R = 10^5$ Па.

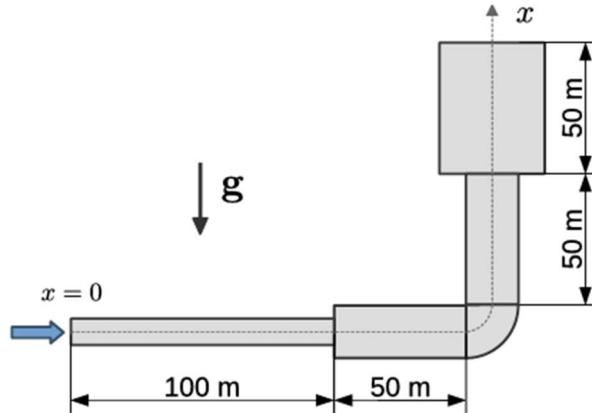


Рис. 2. Схема постановки задачи моделирования течения в трубе переменного диаметра

Для данной постановки задачи, исходная система уравнений может быть проинтегрирована аналитически. Уравнение неразрывности (1) для стационарного однофазного течения жидкости записывается как

$$\frac{\partial}{\partial x} (A \alpha_l \rho_l v_l) = q_l, \quad \alpha_l = 1,$$

из чего в предположении пренебрежимо малой сжимаемой жидкости и отсутствия массовых притоков следует

$$A \rho_l v_l = \text{const}$$

Отсюда находится следующее распределение скорости жидкости ($\rho_l = 1000$ кг/м³):

$$v_m = v_l = \begin{cases} 1.0 \text{ м/с,} & x < 100 \text{ м,} \\ 0.25 \text{ м/с,} & 100 \text{ м} \leq x < 150 \text{ м,} \\ 0.25 \text{ м/с,} & 150 \text{ м} \leq x < 200 \text{ м,} \\ 0.0625 \text{ м/с,} & 200 \text{ м} \leq x \leq 250 \text{ м.} \end{cases}$$

В силу этого распределения скорости, закон сохранения импульса для каждого участка постоянства скорости жидкости имеет вид (с учётом соотношения (3))

$$0 = -\frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_m} \frac{2f}{D} v_m |v_m| - g \cos \theta,$$

откуда может быть записано уравнение на распределение давления

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_m \left(g \cos \theta + \frac{2f}{D} v_m^2 \right), \quad (10)$$

где

$$f = \begin{cases} 24/\text{Re}_m, & \text{Re}_m < 2100, \\ 0.0262/\text{Re}_m^{0.139}, & \text{Re}_m \leq 2100 \end{cases}$$

и $\text{Re}_m = \rho_l v_m D / \eta_l$. Интегрируя (10), можно получить распределение давления во всей трубе в виде кусочно-линейной функции координаты. Для рассмотренной постановки задачи такое решение примет вид

$$p(x) = \begin{cases} 1105106.9 - 232.9 x, & x < 100 \text{ м,} \\ 1082616.7 - 8.018 x, & 100 \text{ м} \leq x < 150 \text{ м,} \\ 2554115.5 - 9818.01 x, & 150 \text{ м} \leq x < 200 \text{ м,} \\ 2552567.5 - 9810.27 x, & 200 \text{ м} \leq x \leq 250 \text{ м.} \end{cases}$$

Проведено сравнение результатов численного моделирования с аналитическими решениями. В численных экспериментах внимание было уделено нескольким аспектам. Результаты сравнения различных моделей дрейфа представлены на рис. 3, а. Для однофазного стационарного течения рассматриваемые модели показывают схожие распределения давления. Сеточная сходимость к аналитическому решению показана на рис. 3, б для трех сеток с 25, 100 и 400 ячейками. В данном случае результаты показаны для модели I, однако для других моделей результаты оказываются неотличимыми. Ключевым фактором отклонения аналитических и численных решений в данном случае является точность аппроксимации угла наклона трубы. Эта ошибка аппроксимации уменьшается с уменьшением размера сетки, что приближает результаты моделирования к аналитическому решению. Третий график на этом рисунке показывает распределение давления вблизи изменения диаметра трубы. Все рассматриваемые модели дают похожие результаты, близкие к аналитическому решению.

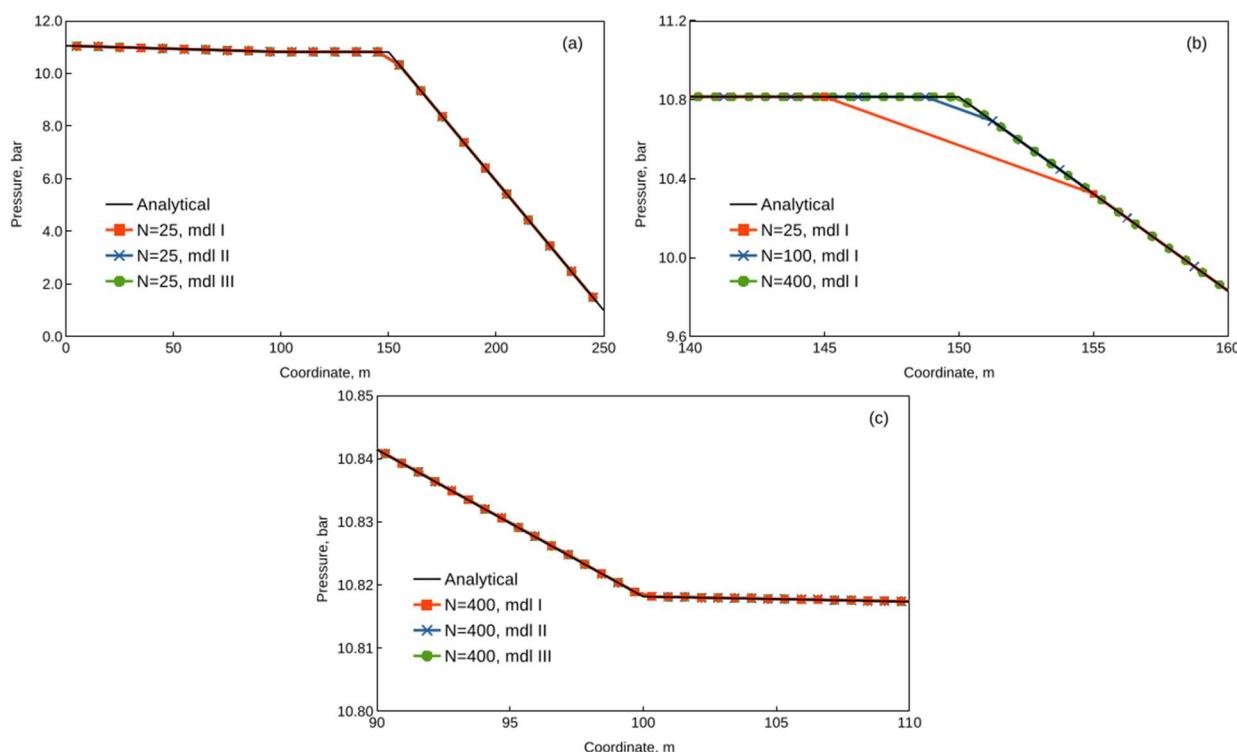


Рис. 3. Сравнение аналитического и численного распределения давления для течения в трубе переменного сечения: (а) сравнение различных математических моделей; (б) сеточная сходимость результатов; (с) распределение давления вблизи точки ступенчатого изменения диаметра трубы

4.2. Сегрегация в вертикальной трубе

Данная тестовая задача моделирует течение двухфазной жидкости в вертикальной трубе. Распределение начальных фаз предполагает, что более тяжелая фаза расположена над более лёгкой (рис. 4), и под действием сил гравитации эти фазы должны поменяться местами. В статье моделируется течение в закрытой с двух сторон вертикальной трубе длиной 1 м диаметром 0.05 м. В качестве начального условия используется гидростатическое распределение давления при давлении вверху трубы, заданном равным 10^5 Па.

Эволюция распределения объемной доли жидкости в трубе в процессе моделирования показана на рис. 4. На рисунке показан процесс сегрегации и сравнение распределений объемных долей жидкости в заданные моменты времени $T = 0.2$ с, 0.6 с и 1 с для трех рассматриваемых математических моделей. Представленные результаты показывают, что результаты моделирования для разных моделей практически неразличимы. Однако скорость

сходимости для этих расчетов различается. Несмотря на идентичную постановку задачи и критерии сходимости для нелинейных итераций, количество временных шагов отличается на 10 % (рис. 5), а количество нелинейных итераций может различаться в 1.3 раза из-за более сложной формы нелинейных членов уравнения импульса смеси в модели I.

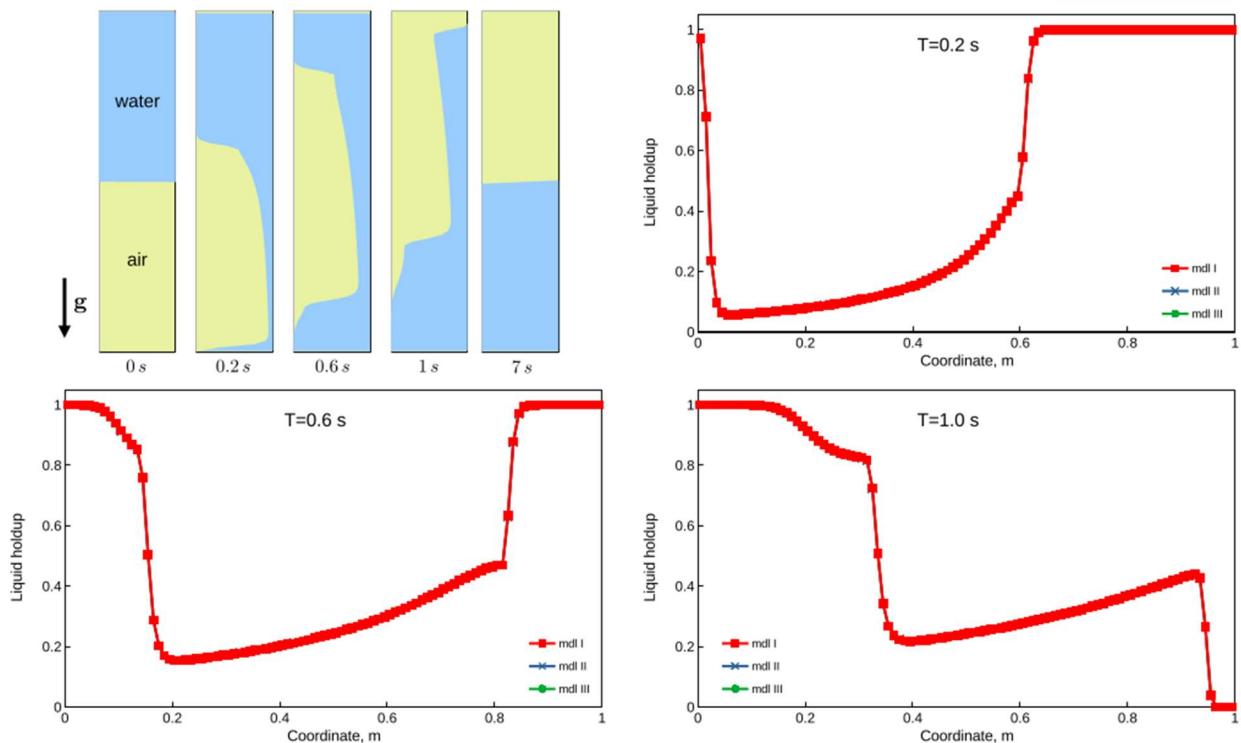


Рис. 4. Распределение объемной доли жидкости для задачи сегрегации жидкости и газа в трубе в различные моменты времени

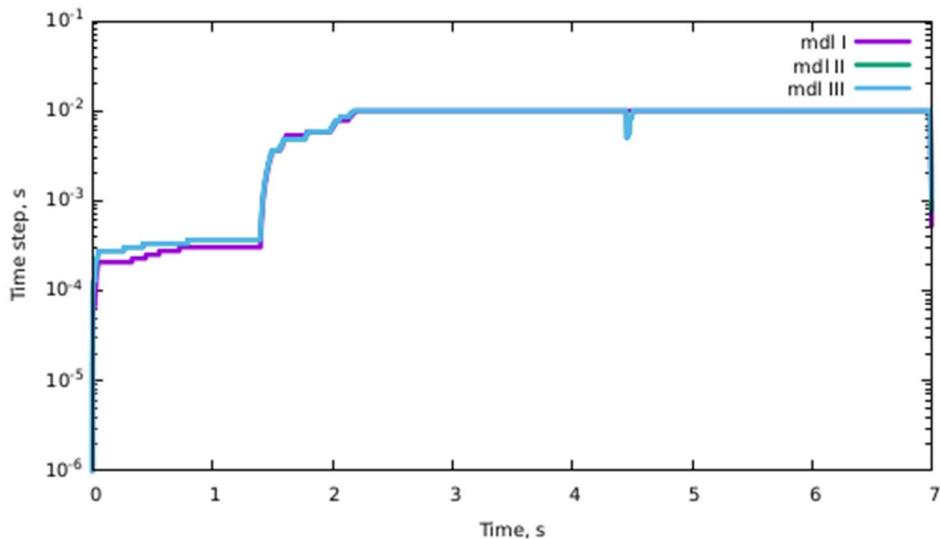


Рис. 5. Эволюция величины шага интегрирования по времени для расчетов, выполненных с различными математическими моделями; максимальный временной шаг для алгоритма адаптивного выбора шага установлен равным 10^{-2} с

Расчет для модели I проходит с меньшим шагом интегрирования по времени в сравнении с двумя другими моделями и занимает 5671 шагов и 30984 ньютоновских итераций, в то время как для двух других моделей требуется 5200 временных шагов и 24140 нелинейных

итераций. Изменение размера сетки приводит к некоторым вариациям соотношения временных шагов и нелинейных итераций, необходимых для выполнения моделирования с различными математическими моделями. Использование моделей II и III все еще даёт некоторое преимущество, но выигрыш может быть довольно ограниченным, в пределах 5 ÷ 10 %.

4.3. Двухфазное течение в вертикальной трубе

Рассматривается течение двухфазной жидкости в вертикальной трубе. Труба имеет длину 100 м, диаметр 0.05 см, закрыта снизу и открыта сверху. Зона притока газа и жидкости с объемным расходом $Q_g = Q_l = 2 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ расположена на расстоянии 1 м от нижнего края трубы. Указанные параметры постановки задачи приводят к формированию стационарного режима течения двухфазной смеси в трубе.

Представленные результаты численных экспериментов получены для расчетной сетки, содержащей $N = 100$ ячеек; время моделирования задано равным $T = 10000$ с, чего оказывается достаточным для выхода на стационарное решение. Все рассмотренные математические модели дают практически идентичные результаты расчетов (рис. 6): видимой разницы в распределении объемной доли жидкости и скорости газа не отмечается. Скорость сходимости для различных математических моделей в основном повторяет сценарий, наблюдавшийся для задачи сегрегации. Для расчета по модели I требуется примерно на 25 % большее количество временных шагов и нелинейных итераций по сравнению с двумя другими моделями. Использование модели I в данном случае не дает никаких преимуществ перед другими моделями ни в точности моделирования, ни в вычислительной эффективности расчетов.

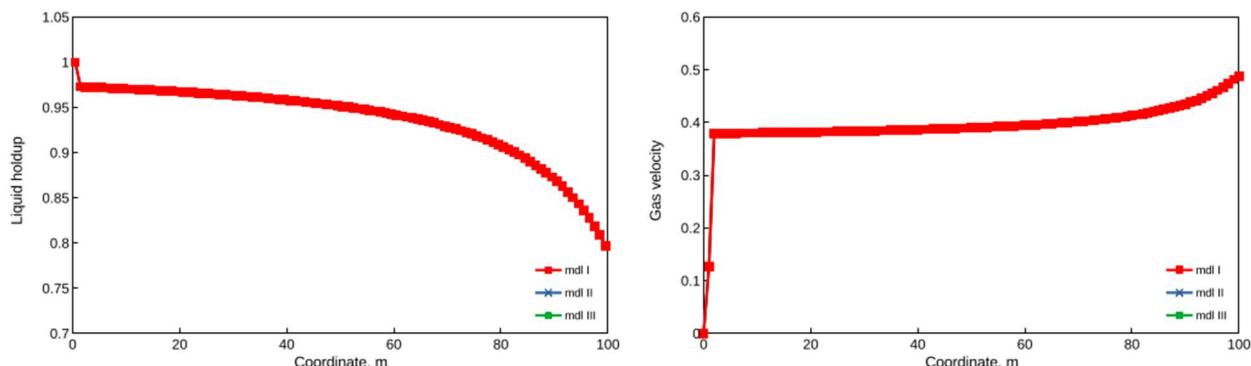


Рис. 6. Стационарные распределения объемной доли жидкости и скорости газа вдоль трубы для задачи моделирования двухфазного течения в вертикальной трубе

4.4. Двухфазное течение в W-образной трубе

В четвертом тесте моделируется течение смеси газа и жидкости в W-образной трубе. В работе [25] была проведена большая серия экспериментальных исследований, и эти результаты часто используются для валидации одномерных нестационарных многофазных моделей и проверки кодов. Использованная в той работе экспериментальная установка состояла из четырех наклонных сегментов труб, соединенных гибкими патрубками. Соответствующая геометрия экспериментальной установки аппроксимируется расчетной конфигурацией трубы, показанной на рис. 7. Здесь диаметр трубы равен $D = 0.0518$ м, длина сегмента равна $l = 3.8$ м, а длина соединительной секции составляет $h = 0.4$ м. В экспериментах и в расчетах рассматриваются два набора углов наклона секций. Конкретные значения приведены в таблице 1. Для увеличения эффективной длины трубы ко входу дополнительно может быть подключен резервуар (объем резервуара эквивалентен длине трубы 53 м с $D = 0.0518$ м). При численном моделировании этот резервуар представляется как сегмент вертикальной трубы длиной 1 метр с диаметром $D = 0.377$ м, имея тот же объем, что и резервуар экспериментальной установки.

Таблица 1

Углы наклона сегментов W-образной трубы

Set	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
#1	105°	75°	105°	76.4°
#2	115.7°	64.3°	115.4°	65.9°

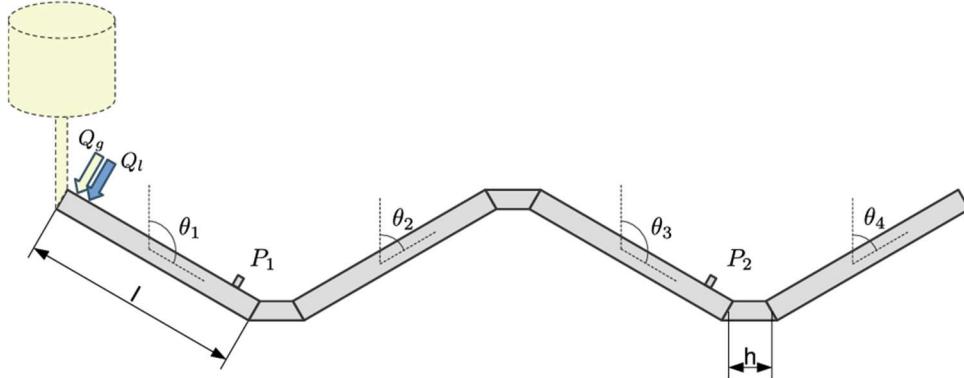


Рис. 7. Схема постановки задачи о моделировании течения в W-образной трубе

В ходе численных экспериментов моделировались два экспериментальных случая, комбинирующие различные углы наклона трубы, наличие или отсутствие резервуара и различные расходы газа и жидкости. Конкретные параметры расчетных случаев задачи сведены в таблицу 2; нумерация и названия тестов сохранены такими же, как в оригинальной статье [25].

Таблица 2

Параметры задачи моделирования течения в W-образной трубе

Название теста	Углы наклона	Наличие резервуара	$Q_g, \text{м}^3/\text{с}$	$Q_l, \text{м}^3/\text{с}$
“Run 1”	#1	–	2.7×10^{-4}	2.69×10^{-4}
“Run 9”	#2	+	2.62×10^{-4}	2.71×10^{-4}

Обе рассмотренных постановки задачи были рассчитаны на трех вычислительных сетках с размером ячеек $\Delta x = 0.2$ м, 0.1 м и 0.05 м. Для сравнения с экспериментальными данными использовались зависимости массового расхода жидкости на выходе и изменение давления в точках наблюдения P_1 и P_2 .

Первая тестовая конфигурация, “Run 1” реализует в экспериментах устойчивый режим течения с незначительными колебаниями параметров вокруг средних значений. Пробковый режим течения в расчетах и эксперименте не возникает. Результаты расчетов по модели I показывают различное поведение в зависимости от используемой вычислительной сетки (рис. 8). Для наиболее подробной сетки массовый расход жидкости на выходе пульсирует и демонстрирует схожее поведение с экспериментальными данными. Две другие модели предсказывают стационарный режим течения с постоянным массовым расходом на выходе, и эти результаты не зависят от используемой расчетной сетки. Средняя величина массового расхода соответствует экспериментальным данным.

Распределения давления, представленные на рис. 9, хорошо согласуются с экспериментом для моделей II и III, в то время как для модели I наблюдаются высокочастотные колебания. Более того, установившиеся уровни давления оказываются ниже экспериментальных и по сравнению с результатами расчетов для других моделей. Это указывает на формирование иного режима течения в трубе при использовании этой модели.

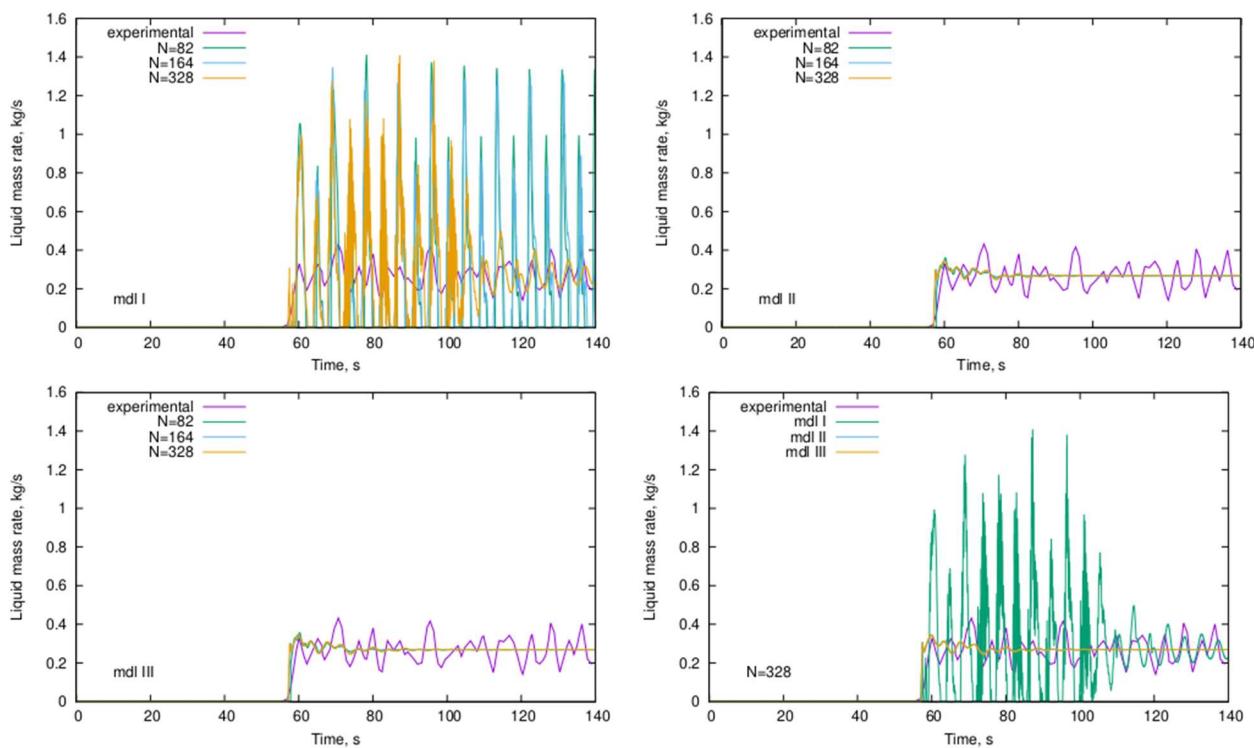


Рис. 8. Течение в W-образной трубе, “Run 1”: массовые расходы жидкости в выходном сечении трубы для математических моделей I, II и III, рассчитанные на трех сетках размером 82, 164 и 328 ячеек, а также сравнение массовых расходов жидкости для всех трех математических моделей для наиболее подробной из использованных расчетных сеток

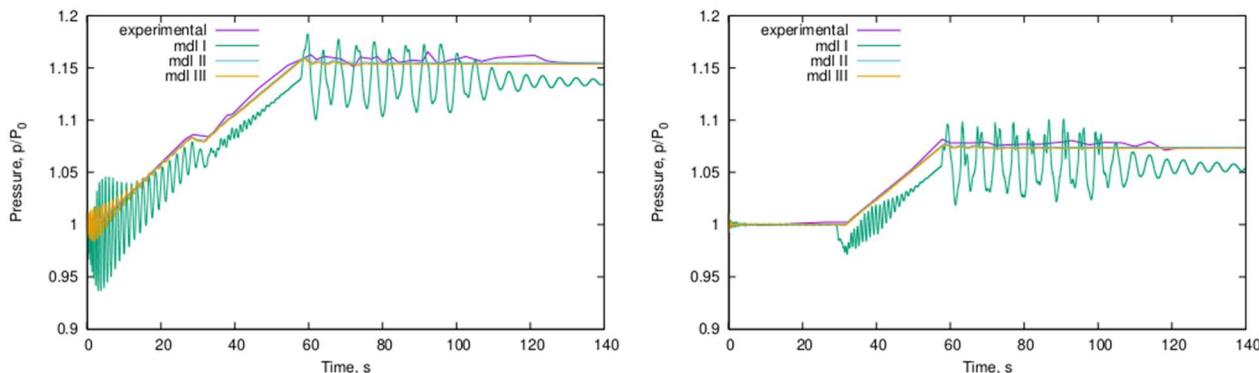


Рис. 9. Течение в W-образной трубе, “Run 1”: эволюция давления в точках мониторинга P_1 (слева) и P_2 (справа), $N = 328$ ячеек

Разница в поведении решения отражается на количестве шагов по времени и числе нелинейных итераций. Эти показатели для модели I в 3–4 раза превышают таковые для двух других моделей. Конкретные значения для сетки $N = 164$ ячеек сведены в таблицу 3. Количество временных шагов для расчета заданного интервала времени составило 28975, 9312 и 9302 шагов при числе нелинейных итераций 233213, 65956 и 71581 для моделей I, II и III, соответственно.

Вторая рассмотренная тестовая задача, “Run 9”, демонстрирует периодический режим течения с регулярными выплесками жидкости на выходе. Это поведение воспроизводится в расчетах всеми математическими моделями (рис. 10). Однако, детали течения у разных моделей несколько различаются. В эксперименте наблюдается постоянная величина массового расхода при вытекании жидкости (что, однако, может быть результатом процедуры усреднения, примененной при обработке экспериментальных данных [25]), но в расчетах наблюдаются некоторые колебания. Наименьшую амплитуду пульсаций обеспечивает модель II, чуть

большие колебания наблюдаются у модели III, а наибольшая амплитуда, приводящая к дополнительной фрагментации выплесков имеет место для модели I.

Количество выплесков и промежуток времени между ними варьируется в зависимости от выбора математической модели. В эксперименте за время наблюдений регистрируется четыре выброса. Расчеты с использованием моделей II и III воспроизводят пять выплесков за тот же период времени. Модель I обеспечивает промежуточный результат между экспериментом и другими моделями: предсказаны четыре выброса, но их длина и период между ними ближе к результатам моделирования для других моделей, чем к экспериментальным данным.

Таблица 3

Количество шагов по времени и нелинейных итераций метода Ньютона для разных математических моделей при расчете периодических течений в W-образной трубе

Название теста	Модель I		Модель II		Модель III	
	Число шагов по времени	Число итераций	Число шагов по времени	Число итераций	Число шагов по времени	Число итераций
“Run 1”, $N = 164$	28975	233213	9312	65956	9302	71581
“Run 9”, $N = 174$	154681	1085385	68823	550460	107787	742220

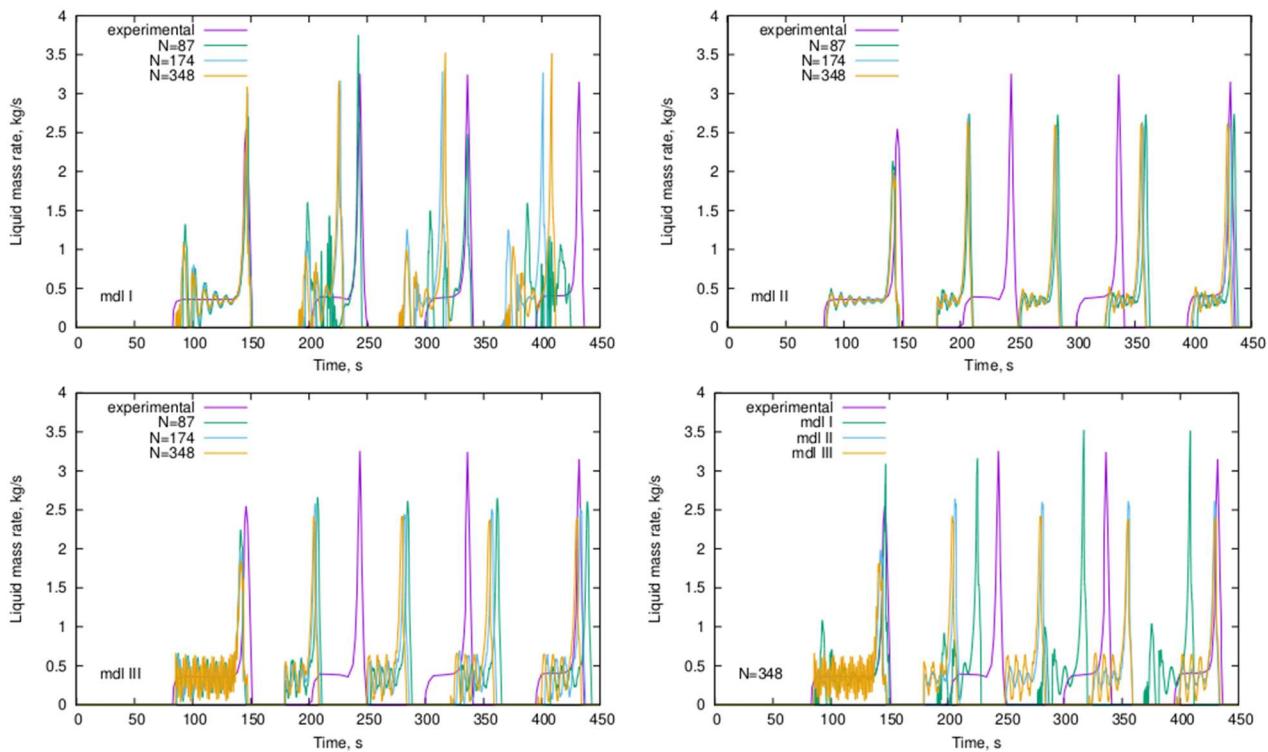


Рис. 10. Течение в W-образной трубе, “Run 9”: массовые расходы жидкости в выходном сечении трубы для математических моделей I, II и III, рассчитанные на трех сетках размером 87, 174 и 348 ячеек, а также сравнение массовых расходов жидкости для всех трех математических моделей для наиболее подробной из использованных расчетных сеток

Распределения давления в точках мониторинга (рис. 11) показывают адекватное соответствие с экспериментальными данными и воспроизводят ключевые этапы образования пробкового режима [25]. Разница с экспериментом в основном обусловлена сдвигом во времени из-за разницы в периодах между выплесками. Амплитуда колебаний давления при выплесках лучше предсказана по модели I.

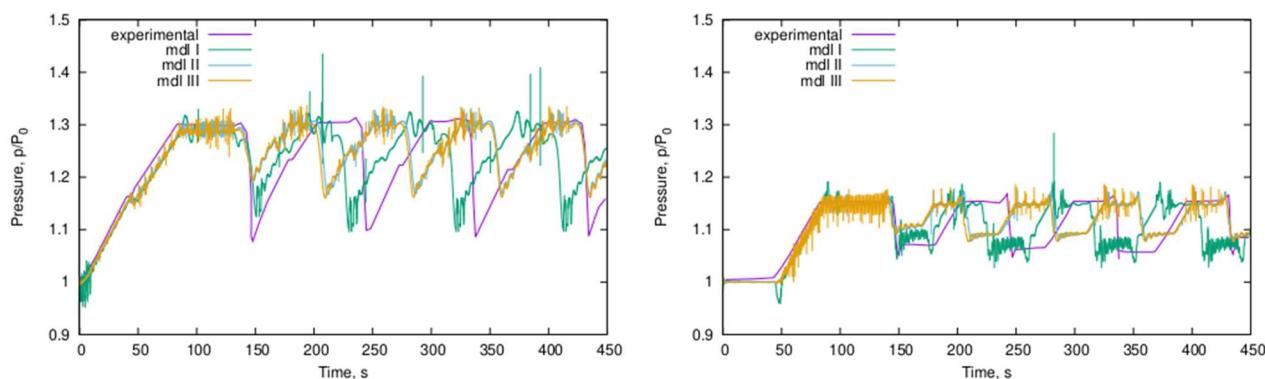


Рис. 11. Течение в W-образной трубе, “Run 9”: эволюция давления в точках мониторинга P_1 (слева) и P_2 (справа), $N = 348$ ячеек

Количество временных шагов и нелинейных итераций для этого теста также различается в зависимости от математической модели. Для сетки с $N = 174$ ячейки, наименьшее количество временных шагов требуется для модели II, примерно в 1.5 раза больше количество временных шагов необходимо для выполнения расчетов с моделью III, и более чем в два раза большее количество временных шагов требуется при использовании модели I (детали приведены в таблице 3).

5. Обсуждение

Целью проведенного в работе сравнения было оценить, существует ли какое-либо явное влияние выбора математической модели на результаты моделирования. Представленные в работе результаты показывают, что выбор математической модели при нестационарных течениях оказывает существенное влияние на результаты. Однако это влияние не является очевидным: использование более теоретически обоснованной модели не гарантирует какого-либо улучшения результатов математического моделирования по сравнению с другими рассмотренными моделями. Более того, использование модели I требует большего числа временных шагов для выполнения проведения расчетов, что существенно увеличивает время вычисления.

Следует отметить, что выбор математической модели является не единственным фактором неопределенности при использовании в расчетах модели дрейфа. Еще один значимый момент – это замыкающие отношения модели дрейфа. Популярной темой исследований является настройка корреляций под конкретный класс течений или параметры определенной скважины, которые будут моделироваться с помощью того или иного вычислительного кода. Влияние этих факторов планируется исследовать в будущем путем варьирования различных замыканий и оценки различий в результатах.

6. Заключение

В настоящей работе обсуждается вопрос выбора формулировки одномерной модели дрейфа для описания нестационарных многофазных течений в трубах, применимой для моделирования течений в скважинах и трубопроводных системах. Рассмотрено несколько математических моделей, известных в литературе, и три из них реализованы в вычислительном коде fs1D. Для реализованных моделей проведено сравнение результатов моделирования на примере четырех тестовых задач, которые включают в себя как стационарные, так и нестационарные периодические течения.

Проведенные численные эксперименты показали хорошее совпадение результатов расчетов с различными математическими моделями для стационарных течений. Для нестационарных течений наблюдаемое поведение несколько отличается. Для задачи сегрегации результаты моделирования для различных математических моделей также хорошо согласу-

ются, в то время как для течения в W-образной трубе результаты различаются как количественно, так и качественно. Интересно отметить, что выбор несколько более теоретически обоснованной модели (модель I) не дает никаких видимых преимуществ по сравнению с другими математическими моделями при сопоставлении с экспериментальными данными. Более колебательный характер течения для этой модели приводит к значительному увеличению вычислительных затрат на моделирование: количество нелинейных итераций в этих тестах может увеличиться до 3.5 раз.

Приведенные выше наблюдения ставят вопрос о значимости формулировки математической модели по сравнению с корреляциями для замыкания модели дрейфа. Это дает основания полагать, что значимость фактора неопределенности в замыканиях модели дрейфа может превосходить влияние выбора математической модели. Этую гипотезу планируется исследовать в будущем.

Литература

1. Berry R., Zou L., Zhao H., Zhang H., Peterson J., Martineau R., Kadioglu S., Andrs D., Hansel J. RELAP-7 Theory Manual, tech. report INL/EXT-14-31366 (Revision 3). Idaho National Laboratory. 2018. https://inldigitallibrary.inl.gov/sites/sti/sti/Sort_4964.pdf
2. Zhang C., Su H., Zhang J. On the computation of compressible multiphase flows with heat and mass transfer in elastic pipelines // Journal of Computational Physics. 2023. Vol. 490. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112257>
3. Baer M., Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials // International Journal of Multiphase Flow. 1986. Vol. 12. Pp. 861–889. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(86\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9)
4. Bonizzi M., Issa R. On the simulation of three-phase slug flow in nearly horizontal pipes using the multi-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. 2003. Vol. 29. Pp. 1719–1747. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2003.09.002>
5. Krasnopol'sky B.I., Lukyanov A.A. A conservative fully implicit algorithm for predicting slug flows // Journal of Computational Physics. 2018. Vol. 355. Pp. 597–619. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.11.032>
6. Pan L., Webb S., Oldenburg C. Analytical solution for two-phase flow in a wellbore using the drift flux model // Advances Water Resources. 2011. Vol. 34. Pp. 1656–1665. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.08.009>
7. Krasnopol'sky B., Starostin A., Osipov A. Unified graph-based multi-fluid model for gas-liquid pipeline flows // Computers and Mathematics with Applications. 2016. Vol. 72. Pp. 1244–1262. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.020>
8. Yadigaroglu G., Banerjee S., Hewitt G. Introduction to multiphase flow. Springer. 2018. 214 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-58718-9>
9. Ishii M., Hibiki T. Thermo-fluid dynamics of two-phase flow. Springer, New York. 2006. 462 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7985-8>
10. Zuber N., Findlay J. Average volumetric concentration in two-phase flow systems // Journal of Heat Transfer. 1965. Vol. 87. Pp. 453–468. <https://doi.org/10.1115/1.3689137>
11. Malekzadeh R., Belfroid S.P.C., Mudde R.F. Transient drift flux modelling of severe slugging in pipeline-riser systems // International Journal of Multiphase Flow. 2012. Vol. 46. Pp. 32–37. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2012.06.005>
12. Osipov A., Sin'kov K., Spesivtsev P. Justification of the drift-flux model for two-phase flow in a circular pipe // Fluid Dynamics. 2014. Vol. 49. Pp. 614–626. <https://doi.org/10.1134/S0015462814050081>

13. Spesivtsev P.E., Kharlashkin A.D., Sinkov K.F. Study of the transient terrain-induced and severe slugging problems by use of the drift-flux model // *SPE Journal*. 2017. Vol. 22. Pp. 1570–1584. <https://doi.org/10.2118/186105-PA>
14. Abbasi M., Naderi Lordejani S., Velmurugan N., Berg C., Iapichino L., Schilders W., van de Wouw N. A Godunov-type scheme for the drift flux model with variable cross section // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2019. Vol. 179. Pp. 796–813. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.04.089>
15. Shi H., Holmes J.A., Durlofsky L.J., Aziz K., Diaz L.R., Alkaya B., Oddie G. Drift-flux modelling of two-phase flow in wellbores // *SPE Journal*. 2005. Vol. 10. Pp. 24–33. <https://doi.org/10.2118/84228-PA>
16. Livescu S., Durlofsky L., Aziz K., Ginestra J. A fully-coupled thermal multiphase wellbore flow model for use in reservoir simulation // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2010. Vol. 71. Pp. 138–146. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.11.022>
17. Wang H., Li H., Ren Z. Modelling multiphase fluid flow and salt precipitation due to water vaporization in producing wells of under ground gas storage // *Gondwana Research*. 2023. Vol. 122. Pp. 348–359. <https://doi.org/10.1016/j.gr.2022.12.010>
18. Tonkin R., Sullivan M., O’Sullivan J. A review of mathematical models for geothermal wellbore simulation // *Geothermics*. 2021. Vol. 97. 102255. <https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2021.102255>
19. Brennen C.E. *Fundamentals of Multiphase Flows*. Cambridge University Press, West Nyack, 2005. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511807169>
20. Nigmatullin R. *Dynamics of Multiphase Media*. Nauka, New York, 1987.
21. Pour K.M., Voskov D., Bruhn D. Coupled modelling of well and reservoir for geo-energy applications // *Geoenergy Science and Engineering*. 2023. Vol. 227. 211926. <https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.211926>
22. Eclipse reservoir simulator. <https://www.slb.com/products-and-services/delivering-digital-at-scale/software/eclipse-industry-reference-reservoir-simulator>
23. Gryzlov A., Safonov S., Krasnopol'sky B., Arsalan M. Combining machine learning and a multiphase flow model for hybrid virtual flow metering, in: Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, no. SPE-216672-MS, 2023. <https://doi.org/10.2118/216672-MS>
24. Golub G., Van Loan C. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 2013. 784 p. <https://books.google.ru/books?id=5U-l8U3P-VUC>
25. De Henau V., Raithby G. A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines // *International Journal of Multiphase Flow*. 1995. Vol. 21. Pp. 365–379. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(94\)00081-T](https://doi.org/10.1016/0301-9322(94)00081-T)

References

1. Berry R., Zou L., Zhao H., Zhang H., Peterson J., Martineau R., Kadioglu S., Andrs D., Hansel J., RELAP-7 Theory Manual, tech. report INL/EXT-14-31366 (Revision 3), Idaho National Laboratory. 2018. https://inldigitallibrary.inl.gov/sites/sti/sti/Sort_4964.pdf
2. Zhang C., Su H., Zhang J., On the computation of compressible multiphase flows with heat and mass transfer in elastic pipelines, *Journal of Computational Physics*, 2023, vol. 490. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112257>
3. Baer M., Nunziato J., A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials, *International Journal of Multiphase Flow*, 1986, vol. 12, pp. 861–889. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(86\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0301-9322(86)90033-9)
4. Bonizzi M., Issa R., On the simulation of three-phase slug flow in nearly horizontal pipes using the multi-fluid model, *International Journal of Multiphase Flow*, 2003, vol. 29, pp. 1719–1747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2003.09.002>
5. Krasnopol'sky B. I., Lukyanov A. A., A conservative fully implicit algorithm for predicting slug flows, *Journal of Computational Physics*, 2018, vol. 355, pp. 597–619. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.11.032>

6. Pan L., Webb S., Oldenburg C., Analytical solution for two-phase flow in a wellbore using the drift flux model, *Advances Water Resources*, 2011, vol. 34, pp. 1656–1665.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.08.009>
7. Krasnopol'sky B., Starostin A., Osiptsov A., Unified graph-based multi-fluid model for gas-liquid pipeline flows, *Computers and Mathematics with Applications*, 2016, vol. 72, pp. 1244–1262.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.020>
8. Yadigaroglu G., Banerjee S., Hewitt G., *Introduction to multiphase flow*. Springer, 2018. 214 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-58718-9>
9. Ishii M., Hibiki T., *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer, New York, 2006. 462 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7985-8>
10. Zuber N., Findlay J., Average volumetric concentration in two-phase flow systems, *Journal of Heat Transfer*, 1965, vol. 87, pp. 453–468. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3689137>
11. Malekzadeh R., Belfroid S. P. C., Mudde R. F., Transient drift flux modelling of severe slugging in pipeline-riser systems, *International Journal of Multiphase Flow*, 2012, vol. 46, pp. 32–37.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2012.06.005>
12. Osiptsov A., Sin'kov K., Spesivtsev P., Justification of the drift-flux model for two-phase flow in a circular pipe, *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49. pp. 614–626.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462814050081>
13. Spesivtsev P. E., Kharlashkin A. D., Sinkov K. F., Study of the transient terrain-induced and severe slugging problems by use of the drift-flux model, *SPE Journal*, 2017, vol. 22, pp. 1570–1584.
DOI: <https://doi.org/10.2118/186105-PA>
14. Abbasi M., Naderi Lordejani S., Velmurugan N., Berg C., Iapichino L., Schilders W., van de Wouw N., A Godunov-type scheme for the drift flux model with variable cross section, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019, vol. 179, pp. 796–813.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.04.089>
15. Shi H., Holmes J.A., Durlofsky L.J., Aziz K., Diaz L.R., Alkaya B., Oddie G., Drift-flux modelling of two-phase flow in wellbores, *SPE Journal*, 2005, vol. 10, pp. 24–33.
DOI: <https://doi.org/10.2118/84228-PA>
16. Livescu S., Durlofsky L., Aziz K., Ginestra J., A fully-coupled thermal multiphase wellbore flow model for use in reservoir simulation, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, vol. 71, pp. 138–146. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.11.022>
17. Wang H., Li H., Ren Z., Modelling multiphase fluid flow and salt precipitation due to water vaporization in producing wells of under ground gas storage, *Gondwana Research*, 2023, vol. 122, pp. 348–359.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.gr.2022.12.010>
18. Tonkin R., Sullivan M., O'Sullivan J., A review of mathematical models for geothermal wellbore simulation, *Geothermics*, 2021, vol. 97, 102255. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2021.102255>
19. Brennen C.E., *Fundamentals of Multiphase Flows*, Cambridge University Press, West Nyack, 2005.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511807169>
20. Nigmatullin R. *Dynamics of Multiphase Media*. Nauka, New York, 1987.
21. Pour K.M., Voskov D., Bruhn D., Coupled modelling of well and reservoir for geo-energy applications, *Geoenergy Science and Engineering*, 2023, vol. 227, 211926.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geoen.2023.211926>
22. Eclipse reservoir simulator. <https://www.slb.com/products-and-services/delivering-digital-at-scale/software/eclipse-industry-reference-reservoir-simulator>
23. Gryzlov A., Safonov S., Krasnopol'sky B., Arsalan M., Combining machine learning and a multiphase flow model for hybrid virtual flow metering, in: Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, no. SPE-216672-MS, 2023. DOI: <https://doi.org/10.2118/216672-MS>

24. Golub G., Van Loan C., *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 2013. 784 p.
<https://books.google.ru/books?id=5U-l8U3P-VUC>
25. De Henau V., Raithby G., A study of terrain-induced slugging in two-phase flow pipelines, *International Journal of Multiphase Flow*, 1995, vol. 21, pp. 365–379. DOI: [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(94\)00081-T](https://doi.org/10.1016/0301-9322(94)00081-T)

Статья поступила в редакцию 18 ноября 2025 г.