

# Nonlinear Dynamics of Acoustic Instability in a Vibrationally Excited Gas: Influence of Relaxation Time and Structure of Shock Waves

S. S. Khrapov

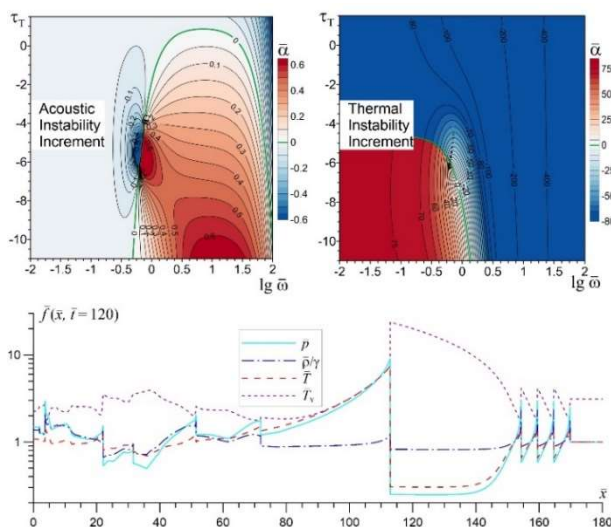
*Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russia*

[khrapov@volsu.ru](mailto:khrapov@volsu.ru)

## Abstract

The paper considers the dynamics of a nonequilibrium acoustically active gas in which, due to relaxation processes, sound waves become unstable and, at the nonlinear stage of evolution, form a quasi-stationary system of shock-wave pulses propagating at a supersonic speed from the disturbance source. Based on the methods of numerical gas-dynamic modeling, it is shown that the dynamics and structure of these shock-wave pulses depend on the model of the oscillatory relaxation time. If this relaxation time decreases with increasing temperature faster than a certain critical value, then conditions for the development of local thermal instability may arise between the shock wave fronts, which, in areas with a high degree of nonequilibrium of the medium, leads to a thermal explosion and the formation of strong shock waves with a small density jump. These shock waves do not have the property of evolution, and therefore, over time, they relax to a stable state corresponding to the structure of the shock-wave pulses. A detailed analysis of the numerical simulation results showed that the intensity and structure of shock-wave pulses do not depend on the initial disturbances, but are determined only by the initial parameters of the nonequilibrium medium. Consequently, the system of shock-wave pulses is a nonlinear autowave structure. The convergence of numerical solutions to the exact one is investigated when describing the flow structure of a nonequilibrium vibrationally excited gas in the vicinity of a shock wave front. Good agreement is shown between the structure of shock waves obtained in numerical models and the nonequilibrium shock adiabat written in the Rankine–Hugoniot form with an additional term taking into account the vibrational-translational energy exchange in the shock gas over the width of the numerical front.

Keywords: nonequilibrium gas, vibrational relaxation time, acoustic and thermal instabilities, shock-autowave pulses, parallel gas-dynamic algorithms.



Maps of the distribution of the increment of acoustic and thermal instabilities (top panel) and the shock-wave structure of the flow (bottom panel) in a nonequilibrium vibrationally excited

УДК 533.7, 534.2

# Нелинейная динамика акустической неустойчивости в колебательно-возбужденном газе: влияние времени релаксации и структура ударных волн

С. С. Храпов

*Волгоградский государственный университет,  
Россия, Волгоград, 400062, просп. Университетский, 100  
khrapov@volsu.ru*

## Аннотация

Рассмотрена динамика неравновесного акустически активного газа, в котором из-за релаксационных процессов звуковые волны становятся неустойчивыми и на нелинейной стадии эволюции формируют квазистационарную систему ударно-волновых импульсов, распространяющихся со сверхзвуковой скоростью от источника возмущений. На основе методов численного газодинамического моделирования показано, что динамика и структура этих ударно-волновых импульсов зависит от модели времени колебательной релаксации. Если это время релаксации убывает с ростом температуры быстрее некоторого критического значения, то между фронтами ударных волн могут возникать условия для развития локальной тепловой неустойчивости, которая в областях с высокой степенью неравновесности среды приводит к тепловому взрыву и формированию сильных ударных волн с малым скачком плотности. Эти ударные волны не обладают свойством эволюционности, и поэтому с течением времени релаксируют к устойчивому состоянию, соответствующему структуре ударно-волновых импульсов. Детальный анализ результатов численного моделирования показал, что интенсивность и структура ударно-волновых импульсов не зависит от начальных возмущений, а определяется только исходными параметрами неравновесной среды. Следовательно, система ударно-волновых импульсов представляет собой нелинейную автоволновую структуру. Исследована сходимость численных решений к точному при описании структуры течения неравновесного колебательно-возбужденного газа в окрестности фронта ударных волн. Показано хорошее согласие структуры ударных волн, получаемых в численных моделях, с неравновесной ударной адиабатой, записанной в форме Рэнкина–Гюгонио с дополнительным слагаемым, учитывающим колебательно-поступательный энергообмен в заударном газе на ширине численного фронта.

Ключевые слова: неравновесный газ, время колебательной релаксации, акустическая и тепловая неустойчивости, ударно-автоволновые импульсы, параллельные газодинамические алгоритмы.

## 1. Введение

Исследование нелинейных волновых структур в неравновесных и тепловыделяющих средах [1–9] важно для понимания протекающих в них физико-химических процессов [10–16] и разработки на их основе технических систем [17–21]. Газодинамические неустойчивости являются одним из эффективных механизмов образования наблюдаемых волновых структур в неравновесных средах [1, 3, 22–28]. Так в неравновесном колебательно-возбужденном газе акустическая неустойчивость [1, 3, 27, 28] на нелинейной стадии эволюции

приводит к образованию пилообразной системы слабых ударных волн (УВ), из которых впоследствии формируются ударно-волновые импульсы (УВИ) большой интенсивности [5, 7]. Тепловая неустойчивость в химически активных тепловыделяющих средах может при определенных условиях приводить к возникновению теплового взрыва [29, 30] и формированию сильных ударных и детонационных волн [8, 19–21]. Таким образом, акустическая и тепловая неустойчивости на нелинейной стадии развития приводят к образованию в неравновесном газе ударных волн, исследование структуры и устойчивости которых является важным этапом решения как фундаментальных, так и прикладных задач. Выделим некоторые работы, касающиеся изучения структуры и устойчивости УВ в неравновесных средах. Структура слабых ударных волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе детально исследована в [1–4] на основе акустического уравнения с квадратичной нелинейностью и получено, что при определенных условиях УВ становится неустойчивой и распадается на автоволновые периодические импульсы или на ступенькообразную автоволну и стационарную ударную волну разрежения. В работе [7] рассмотрена задача трансзвукового натекания неравновесного колебательно-возбужденного газа на твердую стенку и на основе численного газодинамического моделирования показано, что при дозвуковом режиме течения с числами Маха  $M < 1$  формируются ударно-волновые импульсы [5], структура которых качественно напоминает автоволновые импульсы из [1–4]. А при  $M > 1$  образуются квазистационарные ударные волны и за фронтом этих УВ происходит генерация неустойчивых возмущений, которые на нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости формируют систему мелко-масштабных УВИ в заударном газе. Кроме того, учет химического энерговыделения в неравновесном колебательно-возбужденном газе приводит к существенному увеличению интенсивности УВИ [7].

Важнейшей характеристикой неравновесных сред, определяющей свойства и динамику протекающих в них физико-химических процессов, является время колебательной релаксации, а точнее зависимость этого времени от плотности и температуры [10–12, 14, 31–36]. Поэтому исследование влияния времени колебательной релаксации на структуру ударно-волновых импульсов, формирующихся в неравновесном колебательно-возбужденном газе на нелинейной стадии развития акустической неустойчивости, является актуальной задачей и целью данной работы. В п. 2 сформулирована постановка задачи для численного моделирования нелинейной динамики акустической неустойчивости с различными параметрами модели времени релаксации. В п. 3 представлены результаты численного моделирования.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Модель времени релаксации

Рассмотрим динамику акустической неустойчивости на нелинейной стадии эволюции в неравновесном колебательно-возбужденном газе. Воспользуемся математической моделью однокомпонентного колебательно-возбужденного газа, подробно описанной в работе [5]. Следуя [5], представим зависимость времени колебательной релаксации  $\tau$  от плотности и температуры в виде:

$$\tau(\rho, T) = \frac{p_A T^{n-1} \exp(a_0 + a_1 T^{-1/3} + a_2 T^{-2/3} + a_3 T^{1/3})}{R\rho [1 - m \exp(-\theta_{\min}/T)]}, \quad (1)$$

где  $\rho$  и  $T$  – плотность и температура, соответственно;  $p_A$  – атмосферное давление;  $R$  – газовая постоянная;  $\theta_{\min}$  – минимальная из характеристических температур колебательных мод [11, 12, 14];  $a_k$ ,  $n$  и  $m$  – коэффициенты модели времени релаксации [5, 31–36]. Как видно из (1), модель времени релаксации содержит 6 калибровочных коэффициентов  $(a_0, a_1, a_2, a_3, n, m)$ , определяющих зависимость  $\tau$  от температуры. При определенном способе обезразмеривания исходных уравнений [5] количество этих коэффициентов

уменьшается на единицу благодаря исключению параметра  $a_0$ . Далее будем использовать безразмерные величины, определенные в работе [5].

Для реальных газов различные теоретические (полуэмпирические) и экспериментальные модели предсказывают (дают) разные значения калибровочных коэффициентов в (1). Поэтому исследование влияния времени релаксации на линейную и нелинейную динамику акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе позволит получить дополнительный критерий верификации калибровочных параметров в модели (1) для реальных газов.

Влияние модели времени релаксации  $\tau(\rho, T)$  на линейную динамику акустической неустойчивости определяется значениями безразмерных параметров  $\tau_\rho = \partial \ln \tau / \partial \ln \rho$  и  $\tau_T = \partial \ln \tau / \partial \ln T$  [1, 3, 27, 28], для которых с учетом (1) имеем:  $\tau_\rho = -1$ ,

$$\tau_T = (n-1) - \frac{\bar{a}_1}{3} \bar{T}^{-1/3} - \frac{2\bar{a}_2}{3} \bar{T}^{-2/3} + \frac{\bar{a}_3}{3} \bar{T}^{1/3} + \frac{\bar{\theta}_{\min}}{\bar{T}} \frac{m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})}{1 - m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})}, \quad (2)$$

где  $\bar{a}_1 = a_1 T_0^{-1/3}$ ;  $\bar{a}_2 = a_2 T_0^{-2/3}$ ;  $\bar{a}_3 = a_3 T_0^{1/3}$ ;  $\bar{T} = T/T_0$ ;  $\bar{\theta}_{\min} = \theta_{\min}/T_0$ ,  $T_0$  – начальная температура газа. Далее нижним индексом «0» будем обозначать начальные значения величин в исходном стационарном состоянии, на фоне которого и будет далее исследоваться динамика развития акустической неустойчивости.

При анализе нелинейных структур (слабых ударных волн), формирующихся в неравновесном акустически активном газе, наряду с  $\tau_T$  используется безразмерный параметр  $\tau_{TT} = T^2 \partial^2 \tau / \partial T^2$  [1–4], для которого с учетом (1) и (2) получим

$$\tau_{TT} = (n-1) + \tau_T^2 - 2\tau_T - \frac{2}{9} (\bar{a}_1 \bar{T}^{-1/3} + \bar{a}_2 \bar{T}^{-2/3} - 2\bar{a}_3 \bar{T}^{1/3}) + \frac{\bar{\theta}_{\min}^2}{\bar{T}^2} \frac{m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})}{[1 - m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})]^2} \quad (3)$$

## 2.2. Акустическая и тепловая неустойчивости в неравновесном газе

В общем случае с учетом вязкости, теплопроводности, нагрева и охлаждения динамика линейных возмущений ( $\tilde{f} \propto e^{-i\omega t + ikx}$ , где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число) в неравновесном колебательно-возбужденном газе описывается дисперсионным уравнением четвертого порядка [27, 28], которое можно представить в виде

$$b_0(\bar{\omega}^2, \bar{\omega})\bar{k}^4 + b_1(\bar{\omega}^3, \bar{\omega}^2, \bar{\omega})\bar{k}^2 + b_2(\bar{\omega}^4, \bar{\omega}^3, \bar{\omega}^2) = 0, \quad (4)$$

где  $\bar{\omega} = \omega \tau_0$  и  $\bar{k} = k \tau_0 c_\infty$  – безразмерные частота и волновое число, соответственно;  $c_\infty = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$  – замороженная (высокочастотная) скорость звука [1, 3, 27, 28];  $\tau_0$ ,  $p_0$  и  $\rho_0$  – начальные значения времени релаксации, давления и плотности, соответственно;  $\gamma$  – показатель адиабаты. Выражения для коэффициентов  $b_j$  могут быть легко получены из [27, 28] и зависят не только от частоты, но и от безразмерных параметров модели неравновесного газа:  $\tau_\rho$ ,  $\tau_T$ ,  $\gamma$ , степени неравновесности среды ( $S_0 = \tau_0 \rho_0 Q_0 / p_0$ , где  $Q_0$  – начальная удельная мощность нагрева газа), коэффициентов температуропроводности ( $\bar{\chi} = \chi_0 / \tau_0 c_\infty^2$ ) и кинематической вязкости ( $\bar{\mu} = \mu_0 / \tau_0 c_\infty^2$ ), удельной колебательной теплоемкости ( $C_v = \partial \varepsilon_v^e / R \partial T$ , где  $R$  – газовая постоянная,  $\varepsilon_v^e$  – удельная колебательная энергия равновесного газа [5]), коэффициентов, характеризующих зависимости удельных мощностей нагрева  $Q$  и охлаждения  $\Lambda$  газа от плотности и температуры ( $Q_\rho = \partial \ln Q / \partial \ln \rho$ ,  $Q_T = \partial \ln Q / \partial \ln T$ ,  $\Lambda_\rho = \partial \ln \Lambda / \partial \ln \rho$ ,  $\Lambda_T = \partial \ln \Lambda / \partial \ln T$  [5]).

В данной работе, как и в [5, 6, 27, 28], будем рассматривать динамику возмущений, распространяющихся от некоторого источника. Поэтому воспользуемся пространственным

анализом устойчивости, в котором закон дисперсии представляется в виде  $\bar{k}(\bar{\omega})$ , где  $\bar{\omega}$  – заданная вещественная частота возмущений,  $\bar{k} = \text{Re } \bar{k} - i\bar{\alpha}$  – комплексное волновое число,  $\bar{\alpha}$  – инкремент неустойчивости [5, 27, 28]. Тогда уравнение (4) имеет аналитические комплексные решения, которые описывают закон дисперсии звуковых и энтропийных волн. Если для соответствующих возмущений величина  $\bar{\alpha} > 0$ , то они оказываются неустойчивыми. Следовательно, для звуковых волн при  $\bar{\alpha} > 0$  имеем акустическую неустойчивость, а для энтропийных – тепловую.

При проведении численного газодинамического моделирования важно знать границы устойчивости и иметь оценки инкремента акустической и тепловой неустойчивостей. Поскольку мы исследуем влияние времени релаксации, то построим решение уравнения (4) на плоскости переменных  $(\lg \bar{\omega}, \tau_T)$  при фиксированных значениях остальных параметров модели [5]:  $\gamma = 1.4$ ,  $S_0 = 1$ ,  $C_v = 0.0888$ ,  $\tau_\rho = -1$ ,  $\Lambda_T = 1.4286$ ,  $Q_{\rho,T} = \Lambda_\rho = 0$ ,  $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 10^{-4}$ . На рис. 1 показаны распределения безразмерного инкремента  $\bar{\alpha}$  для акустической и тепловой неустойчивостей, на которых сплошной зеленой линией показаны границы устойчивости. Из рис. 1а видно, что акустическая неустойчивость локализована в диапазоне частот  $0.5 < \bar{\omega} < 100$  и в основном ее инкремент достигает максимальных значений при  $\bar{\omega} \sim 2\pi$ . Однако в окрестности  $\bar{\omega} \sim 1$  и  $\tau_T \sim -6$  имеется небольшая область, примыкающая к границе устойчивости, с локальным максимумом инкремента. В этой области значение акустического инкремента оказывается приблизительно в 2 раза больше, чем при  $\bar{\omega} \sim 2\pi$ . С ростом степени неравновесности среды  $S_0$  граница устойчивости звуковых волн смещается вправо в область больших частот, а инкремент акустической неустойчивости возрастает. При этом область локального максимума инкремента смещается вдоль границы устойчивости вверх в сторону больших значений параметра  $\tau_T$ .

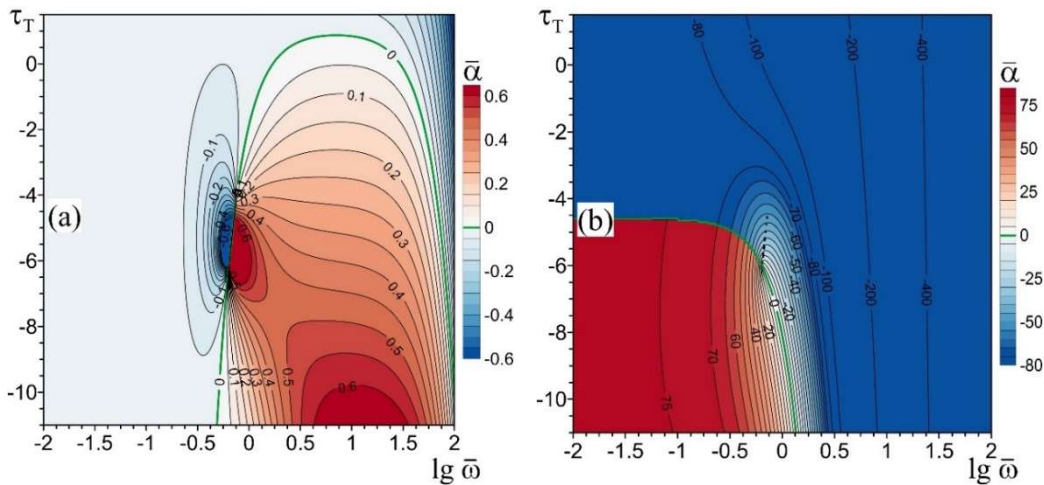


Рис. 1. Влияние модели времени релаксации на линейную динамику газодинамических неустойчивостей в неравновесном колебательно-возбужденном газе. На плоскости параметров  $(\lg \bar{\omega}, \tau_T)$  показаны распределения безразмерного инкремента  $\bar{\alpha}$  для акустической (а) и тепловой (б) неустойчивостей

Тепловая неустойчивость, наоборот, локализована в низкочастотной области при  $\bar{\omega} < 1$  и имеет инкремент приблизительно на два порядка больше акустического. При этом фазовая скорость энтропийных волн оказывается приблизительно в 100 раз меньше скорости звука [27, 28]. С увеличением параметра  $S_0$  граница устойчивости энтропийных мод расширяется вправо и вверх захватывая области больших частот и  $\tau_T$ , а инкремент тепловой неустойчивости также возрастает.

### 2.3. Вычислительная газодинамическая модель

Для исследования нелинейных волновых структур (ударных волн, волн разрежения и УВИ), возникающих в неравновесном колебательно-возбужденном газе с учетом нагрева и охлаждения, воспользуемся системой газодинамических уравнений [5], которую представим в следующем консервативном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad (5)$$

где 
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \\ \rho \varepsilon_v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \rho \mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ (E + p)u - \frac{\rho \mu}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \\ \rho \varepsilon_v u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \\ \rho g u - \frac{\rho \varepsilon_v^e - \rho \varepsilon_v}{\tau} - \Lambda \\ \frac{\rho \varepsilon_v^e - \rho \varepsilon_v}{\tau} + Q \end{pmatrix};$$

$E = \rho \left( \frac{u^2}{2} + \varepsilon \right)$  – плотность полной энергии газа без учета колебательной энергии;  $\varepsilon$  и  $u$  – удельная внутренняя энергия и скорость газа, соответственно;  $g$  – внешняя удельная сила;  $\mu = \left( \frac{4}{3} \mu_1 + \mu_2 \right)$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – коэффициенты первой и второй кинематической вязкости, соответственно;  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности;  $\varepsilon_v$  – удельная колебательная энергия молекулы газа связана с колебательной температурой газа  $T_v$  соотношением [5]

$$\varepsilon_v(T_v) = R \sum_{\ell=1}^{N_v} \frac{r_\ell \theta_\ell}{\exp(\theta_\ell/T_v) - 1},$$

где  $\theta_\ell$  – характеристическая колебательная температура  $\ell$ -моды,  $r_\ell$  – степень вырождения  $\ell$ -моды;  $N_v$  – количество колебательных мод. Равновесное значение удельной колебательной энергии  $\varepsilon_v^e \equiv \varepsilon_v(T)$ . Система (5) замыкается уравнением состояния идеального газа (см. формулу (5) в [5]). В соответствии с [5] удельные мощности нагрева  $Q$  и охлаждения  $\Lambda$  представим в виде

$$Q = Q_0, \quad \Lambda(T) = Q_0 \left( \frac{T - T_{ex}}{T_0 - T_{ex}} \right), \quad (6)$$

где  $T_{ex}$  – температура внешней среды ( $T_{ex} < T_0$ ).

Для численного решения системы уравнений (5) воспользуемся методом MUSCL (Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws) [5, 37, 38] и проведем дискретизацию непрерывных величин  $\mathbf{U}(x, t)$  в узлах пространственно-временной сетки

$$\mathbf{U}(x, t) \rightarrow \mathbf{U}(x_i, t_n) \equiv \mathbf{U}_i^n,$$

где  $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ ;  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ ;  $\Delta x = L/N$  – размер пространственных ячеек;  $L$  – размер расчетной области;  $N$  – количество расчетных ячеек;  $\Delta t_n$  – временной шаг. Численный консервативный алгоритм метода MUSCL представим в следующем обобщенном виде

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{\Delta x} \left( \hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2} \right) + \Delta t_n \hat{\mathbf{G}}_i, \quad (7)$$

где дробные индексы  $i \pm 1/2$  соответствуют границам ячеек расчетной сетки

$$(x_{i\pm 1/2} = x_i \pm \Delta x/2), \hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}_{i\pm 1/2}(t) dt \text{ и } \hat{\mathbf{G}}_i = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{G}_i(t) dt$$

В методе MUSCL второй порядок точности по пространству достигается использованием кусочно-линейной реконструкции сеточных функций

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{U}_i^n + \Theta_i^n (x - x_i), \quad x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, \quad (8)$$

где для определения наклонов  $\Theta_i^n = \Theta\left(\frac{\mathbf{U}_i^n - \mathbf{U}_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n}{\Delta x}\right)$  применяются TVD-ограничители (Total Variation Diminishing) [39], которые подавляют нефизичные (паразитные) осцилляции численного решения. В данной работе используется TVD-ограничитель Ван Лиры [39]

$$\Theta(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1 + \xi_2}, & \xi_1\xi_2 \geq 0 \\ 0, & \xi_1\xi_2 < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Второй порядок точности по времени в методе MUSCL обеспечивается применением процедуры предиктор-корректор. На первом предиктор-этапе вычисляются промежуточные значения параметров течения

$$\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t_n}{2\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i-1/2}^n)] + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{G}(\mathbf{U}_i^n), \quad (10)$$

где с учетом (8) имеем  $\mathbf{U}_{i\pm 1/2}^n = \mathbf{U}_i^n \pm \Theta_i^n \Delta x/2$ .

На втором этапе вычисляются величины  $\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2}$  с использованием приближенных методов решения задачи Римана [40, 41]. При решении задачи Римана о распаде произвольного газодинамического разрыва сначала находим значения параметров течения слева ( $L$ ) и справа ( $R$ ) от границ ячеек с учетом (9) и (10):  $\mathbf{U}_L = \tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2} + \Theta_i^n \Delta x/2$  и  $\mathbf{U}_R = \tilde{\mathbf{U}}_{i+1}^{n+1/2} - \Theta_{i+1}^n \Delta x/2$ . Затем вычисляем значения потоков на границах ячеек, используя метод Хартена–Лакса–Ван Лиры (HLL-метод) [40, 41]

$$\hat{\mathbf{F}}_{i\pm 1/2} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}_L), & 0 < \Phi_L \\ \frac{\Phi_R \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \Phi_L \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \Phi_L \Phi_R (\mathbf{U}_L - \mathbf{U}_R)}{\Phi_R - \Phi_L}, & \Phi_L \leq 0 \leq \Phi_R \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}_R), & \Phi_R < 0 \end{cases} \quad (11)$$

где  $\Phi_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R)$ ,  $\Phi_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R)$ ,  $c_{L,R} = \sqrt{\gamma p_{L,R}/\rho_{L,R}}$ . Метод HLL описывает ударные волны (в том числе и сильные УВ) и волны разряжения, но может существенно «размывать» контактные разрывы и тангенциальные разрывы скорости (в многомерных постановках). Для точного описания этих разрывов применяется HLLC-модификация этого метода [40, 41].

На заключительном корректор-этапе с учетом (11) и  $\hat{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}(\tilde{\mathbf{U}}_i^{n+1/2})$  вычисляются значения параметров течения на  $t_{n+1}$  временном слое по формуле (7).

Численный алгоритм MUSCL является явным, поэтому временной шаг  $\Delta t_n$  определяется из условия устойчивости

$$\Delta t_n = K \cdot \min_{i=1..N} \left( \frac{\Delta x}{c_i + |u_i|}, \frac{(\Delta x)^2}{2\mu_i}, \frac{(\Delta x)^2}{2\chi_i}, \tau_i \right), \quad (12)$$

где  $\chi$  – коэффициент температуропроводности;  $0 < K < 1$  – число Куранта. В численных экспериментах использовалось значение  $K = 0.5$ .

Результаты численного моделирования удобно анализировать в безразмерном виде, переходя в исходных уравнениях (5) к безразмерным величинам  $\bar{f} = f / l_f$  [5], где  $l_f$  – соответствующие характерные масштабы численной модели:  $l_t = \tau_0$ ,  $l_u = c_{s0} = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ ,  $l_x = c_{s0} \tau_0$ ,  $l_T = T_0$ ,  $l_p = p_0$ ,  $l_\rho = \rho_0 / \gamma$ .

Расчетная область задается в пределах  $\bar{x} \in [0, L]$  ( $\bar{L} = 500$ ) с количеством ячеек  $N = 5 \times 10^4$  ( $\Delta \bar{x} = \bar{L} / N = 0.01$ ). В начальный момент времени ( $\bar{t}_0 = 0$ ) стационарные распределения газодинамических параметров течения задаются в виде:  $\bar{u}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{u}_i^0 = M$ ,  $\bar{p}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{p}_i^0 = 1$ ,  $\bar{\rho}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{\rho}_i^0 = \gamma$ ,  $\bar{T}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{T}_i^0 = 1$ , где  $i = 0, \dots, N + 3$ ,  $M = u_i^0 / c_{s0}$  – число Маха. Численная схема является пятиточечной и расчетные ячейки в формулах (7)–(12) имеют индексы  $i = 2, \dots, N + 1$ . В фиктивных ячейках  $i = 0, 1, N + 2, N + 3$  газодинамические величины определяются с использованием граничных условий. На левой границе расчетной области при  $\bar{x}_{3/2} = 0$  задается условия типа «твердой теплонепроницаемой стенки» и для консервативных переменных в фиктивных ячейках  $\bar{x}_{0,1}$  имеем:  $\bar{U}_0^{n+1} = \pm \bar{U}_3^{n+1}$ ,  $\bar{U}_1^{n+1} = \pm \bar{U}_2^{n+1}$  (знак « $\leftarrow$ » используется для потока массы  $\rho u$ ). На правой границе расчетной области при  $\bar{x}_{N+3/2} = L$  задается условия типа свободного протекания:  $\bar{U}_{N+2}^{n+1} = \bar{U}_{N+1}^{n+1}$ ,  $\bar{U}_{N+3}^{n+1} = \bar{U}_{N+2}^{n+1}$ .

В окрестности левой границы расчетной области задается источник вынужденных колебаний  $\bar{g}(\bar{x}, \bar{t})$  с частотой  $\bar{\omega}_0$  (см. формулу (21) в [5]), генерирующий звуковые волны.

### 3. Результаты численного моделирования

Для исследования влияния времени релаксации на структуру ударно-волновых импульсов, формирующихся на нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости, воспользуемся численной моделью (7)–(12). Для повышения производительности вычислений численный алгоритм MUSCL (см. пп. 2.3 и [5, 6]) был распараллелен с использованием технологии OpenMP. Благодаря параллельной реализации кода численные расчеты ускоряются в десятки раз, что позволяет частично скомпенсировать существенное уменьшение шага интегрирования из-за значительного (в десятки раз) увеличения температуры за фронтом сильных ударных волн (см. пп. 3.2). Такие высокие температуры приводят к уменьшению времени релаксации на 2–3 порядка и, как следствие, с учетом такого же уменьшения временного шага численного алгоритма (12) в сотни раз увеличивают суммарное время проведения вычислительных экспериментов при использовании последовательной версии кода.

В качестве базовой выберем численную модель со следующими значениями параметров (модель 7 из табл. 1 в [5]):  $\bar{\omega}_0 = 2\pi$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 10^{-4}$ ,  $\bar{a}_1 = 10$ ,  $\bar{a}_2 = \bar{a}_3 = n = m = 0$ ,  $\bar{\theta}_{\min} = 6$ ,  $\bar{T}_{ex} = 0.3$  ( $\Lambda_T = 1.4286$ ),  $S_0 = 1$ . На основе этих параметров можно вычислить другие важные для анализа параметры линейной и нелинейной моделей:  $C_v \approx 0.0888$ ,  $\tau_T \approx -4.3333$ ,  $\tau_{TT} \approx 24.223$ ,  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}_0) \approx 0.303$ ,  $\bar{T}_{v0} \approx 3.1035$ . Далее эту базовую модель будем обозначать как A0.

В расчетной области  $0 \leq \bar{x} \leq 500$ , содержащей  $5 \times 10^4$  ячеек, были проведены десятки вычислительных экспериментов, в которых варьировались только параметры  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$ ,  $n$ ,  $m$  и  $\bar{\theta}_{\min}$ . Некоторые из этих расчетов сгруппированные в три подгруппы (А, В, С) приведены в табл. 1.



Таблица 1 состоит из двух частей, слева приведены исходные параметры вычислительных экспериментов, а справа расчетные параметры ударно-волновых импульсов, сформировавшихся на конечной нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости. Нижним индексом «1» обозначены параметры течения перед фронтом УВ, а индексом «2» – за фронтом УВ.

Таблица 1

## Численные модели

No.	Исходные параметры численных моделей									Расчетные параметры на фронте УВИ						
	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$n$	$m$	$\bar{\theta}_{\min}$	$\tau_T$	$\tau_{TT}$	$\bar{\alpha}(\bar{\omega}_0)$	$\bar{u}_s$	$\bar{p}_1$	$\bar{T}_1$	$\bar{T}_{v1}$	$\bar{p}_2$	$\bar{T}_2$	$\bar{T}_{v2}$
A0	10	0	0	0	0	6	-4.3333	24.223	0.3030	1.449	0.6444	0.7224	3.9052	2.5661	1.2094	3.6848
A1	13	0	0	1	0	6	-4.3333	24.557	0.3030	1.445	0.6424	0.7211	3.9084	2.5529	1.2049	3.6949
A2	6	2	0	0	0	6	-4.3333	24.667	0.3030	1.444	0.6439	0.7212	3.9123	2.5451	1.1955	3.7425
A3	16	0	0	2	0	6	-4.3333	24.891	0.3030	1.440	0.6435	0.7209	3.9129	2.5343	1.1928	3.7455
A4	15	0	5	0	0	6	-4.3333	25.334	0.3030	1.435	0.6476	0.7220	3.9161	2.5190	1.1908	3.7373
B0	10	0	0	0	1	6	-4.3184	24.154	0.3021	1.446	0.6451	0.7234	3.9010	2.5534	1.2021	3.7129
B1	10	0	0	0	1	4	-4.2587	23.737	0.2869	1.393	0.6691	0.7506	3.2289	2.3650	1.1803	3.0813
B2	10	0	0	0	1	2	-4.0203	21.706	0.2643	1.356	0.7034	0.7846	2.5882	2.2166	1.1723	2.4680
C0	9	0	0	0	0	6	-4.0000	21.001	0.2830	1.415	0.6701	0.7488	3.8296	2.4348	1.1952	3.6496
C1	6	0	0	0	0	6	-3.0000	12.667	0.2228	1.298	0.7745	0.8485	3.5366	1.9822	1.1611	3.4312
C2	3	0	0	0	0	6	-2.0000	6.3338	0.1628	1.180	0.8807	0.9347	3.2787	1.5511	1.1140	3.2327
C3	12	0	0	0	0	6	-5.0000	31.335	0.3426	1.506	0.6061	0.6814	4.0209	2.7851	1.2340	3.7433
C4	13	0	0	0	0	6	-5.3333	35.223	0.3622	1.528	0.5932	0.6664	4.0646	2.8684	1.2642	3.6604
C5	14	0	0	0	0	6	-5.6666	39.335	0.3816	1.547	0.5814	0.6537	4.0981	2.9485	1.2750	3.6717
C6	15	0	0	0	0	6	-6.0000	43.668	0.4007	1.566	0.5746	0.6437	4.1298	2.9924	1.3123	3.5388

Сделаем несколько предварительных замечаний, являющихся важными при интерпретации результатов численного газодинамического моделирования. Хорошо известно, что любой численный метод сквозного расчета газодинамических разрывов (ударных и детонационных волн, контактных и тангенциальных разрывов) сглаживает эти разрывы на несколько расчетных ячеек [37–41], что обусловлено наличием в этих методах численной (схемной) вязкости. Из-за этого в численных газодинамических моделях, основанных, например, на методах типа Годунова [42], ширина фронта ударных волн в зависимости от разрешения пространственной сетки (размера ячеек) всегда на 3–6 порядков превышает реальную физическую ширину УВ, которая составляет несколько длин свободного пробега молекул  $\lambda_f$  [44]. Пространственное разрешение нашей численной модели  $\Delta x = 0.01 c_{s0} \tau_0$ , что, например, для  $N_2$  при атмосферном давлении и температуре  $10^3$  К дает значение  $\Delta x \approx 200$  мкм и размер расчетной области  $L = 10$  м. Даже при таком высоком разрешении физическая ширина УВ оказывается в  $10^2 \div 10^3$  раз меньше ширины фронта УВ в численных экспериментах. Значения газодинамических величин за таким фронтом (отмечены в табл. 1 нижним индексом «2») определяются в точке  $\bar{x}_2$ , соответствующей максимуму давления, которая расположена на значительном расстоянии ( $10^2 \div 10^3 \lambda_f$ ) от физического фронта УВ. Таким образом, значения газодинамических величин ( $\bar{p}_2, \bar{\rho}_2, \bar{u}_2, \bar{T}_2, \bar{T}_{v2}$ ) за фронтом УВ в численных расчетах относятся уже к существенно заударному газу, в котором неравновесные релаксационные процессы могут значительно изменить колебательную температуру в точке  $\bar{x}_2$ . Причем это изменение тем больше, чем выше температура  $\bar{T}_2$  и больше размер ячеек  $\Delta x$  (ширина численного фронта УВ). С уменьшением  $\Delta x$  для заданной УВ величина газодинамических скачков

давления  $\bar{p}_2/\bar{p}_1$ , плотности  $\bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$ , скорости  $\bar{u}_2/\bar{u}_1$  и температуры  $\bar{T}_2/\bar{T}_1$  на численном фронте УВ будет слабо изменяться и стремиться к конечному пределу, который всегда больше 1, а отношение колебательных температур  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1}$  при этом будет стремиться к 1. Это полностью согласуется с математической моделью неравновесного колебательно-возбужденного газа (5). Поэтому далее под фронтом ударной волны будем подразумевать численный фронт УВ, а для физически корректного описания результатов численного моделирования будем говорить о величинах  $\bar{p}_2/\bar{p}_1$ ,  $\bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1$ ,  $\bar{u}_2/\bar{u}_1$  и  $\bar{T}_2/\bar{T}_1$  как о газодинамических скачках на фронте УВ, а об отношении  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1}$  – как об изменении колебательной энергии (температуры) в заударном газе. Детальный анализ структуры ударных волн, получаемых в вычислительных экспериментах, и вопросы сходимости численных решений рассмотрены в пп. 3.3.

Рассмотрим сначала базовую модель А0, которая была рассчитана ранее в работе [5]. Акцентируем наше внимание на конечной стадии эволюции акустической неустойчивости в один из последних моментов времени, когда вблизи правой границы расчетной области уже полностью сформировалась квазистационарная система из десяти ударно-волновых импульсов (рис. 2). На рис. 2, а показана структура течения в окрестности левой границы расчетной области, где расположен источник малых возмущений среды. В этой области из-за многократного отражения от левой границы ударных волн, образующихся в результате развития акустической неустойчивости и нелинейного взаимодействия УВИ, также формируется некоторая ударно-волновая структура. Несколько ударно-волновых импульсов, сформировавшихся на правой границе волнового пакета, показаны на рис. 2, б, а общая структура течения в данный момент времени во всей расчетной области представлена на рис. 2, с. Видно, что в области между источником возмущений и сформировавшейся системой УВИ ударно-волновая структура является более сложной из-за взаимодействия встречных УВ. В этой области наблюдается увеличение до 200% амплитуды возмущений давления, плотности и температуры по сравнению с УВИ. В момент столкновения фронтов УВ возникают пики возмущений, а при их расхождении образуются области разрежения («провалы»).

Для анализа структуры газодинамических течений наряду с пространственно-временными распределениями параметров также часто используются термодинамические диаграммы состояний  $(p, \rho)$ ,  $(p, T)$  и  $(p, V)$ , где  $V = 1/\rho$  – удельный объем. Построим подобные диаграммы для области течения в УВИ, которая располагается между точками 1–5 на рис. 2, б. На рис. 3, а–с показана структура УВИ на плоскости стандартных термодинамических параметров  $\bar{p}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$ . Кривые 1–2 описывают фронт ударной волны первого УВИ и показывают соотношения между скачками термодинамических величин на нем. Между точками 2 и 3 происходит плавное изменение параметров заударного газа, значения которых в точке 3 достигают своего минимума. Аналогично кривые 3–4 описывают фронт ударной волны второго УВИ, а скачки термодинамических параметров на этом фронте больше, чем на фронте первого УВИ. Между точками 4–5 также происходит плавное изменение параметров течения, значения которых в точке 5 становятся минимальными. Кривые 4–5 полностью сливаются с кривыми 3–4 в соответствующих областях течения. Структура течения последующих ударно-волновых импульсов с хорошей точностью описывается кривыми 3–4–5. Для сравнения со структурой УВ в равновесном газе на рис. 3, а точечными линиями показаны ударные адиабаты [43] и видно, что кривые 1–2 и 3–4 проходят выше этих ударных адиабат. Это обусловлено релаксационными процессами в неравновесном колебательно-возбужденном газе [1, 3, 10, 24]. Неравновесность течения и колебательная релаксация также приводят к смещению в заударном газе максимума температуры относительно максимумов давления и плотности, что хорошо заметно на рис. 3, б–с. Сначала на фронте ударных волн температура скачком увеличивается до значений в точках 2 и 4, а затем в заударном газе (кривые 2–3 и 4–5) при уменьшении давления и плотности продолжается плавный рост температуры пока не будет достигнут ее максимум, положение которого при этом оказывается немного дальше от фронта УВ, чем максимальные значения давления и плотности. Пространственный сдвиг между максимумами давления и температуры составляет для первого УВИ  $\Delta \bar{x} \approx 0.1$ , а для второго и последующих УВИ –  $\Delta \bar{x} \approx 0.2$ .

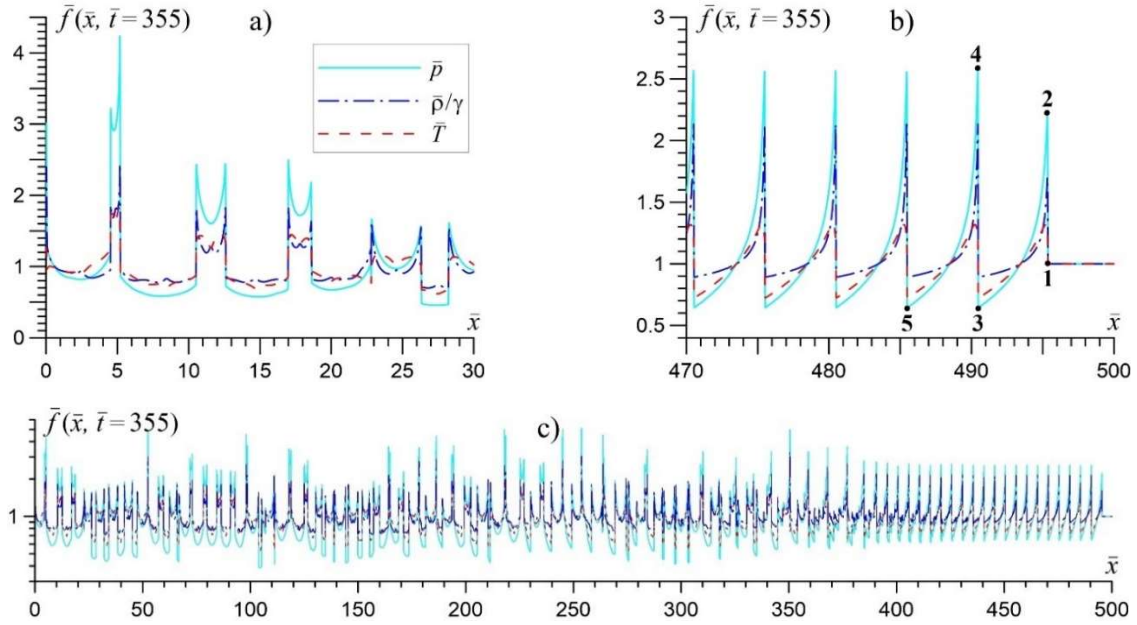


Рис. 2. Конечная стадия эволюции акустической неустойчивости в модели А0. Показаны пространственные распределения давления, плотности и температуры в волновом пакете в момент времени  $\bar{t} = 355$ : а) структура течения с взаимодействующими ударными волнами около источника звука; б) ударно-волновые импульсы (УВИ), цифрами отмечены точки минимумов и максимумов УВИ; в) ударно-волновая структура течения во всей расчетной области

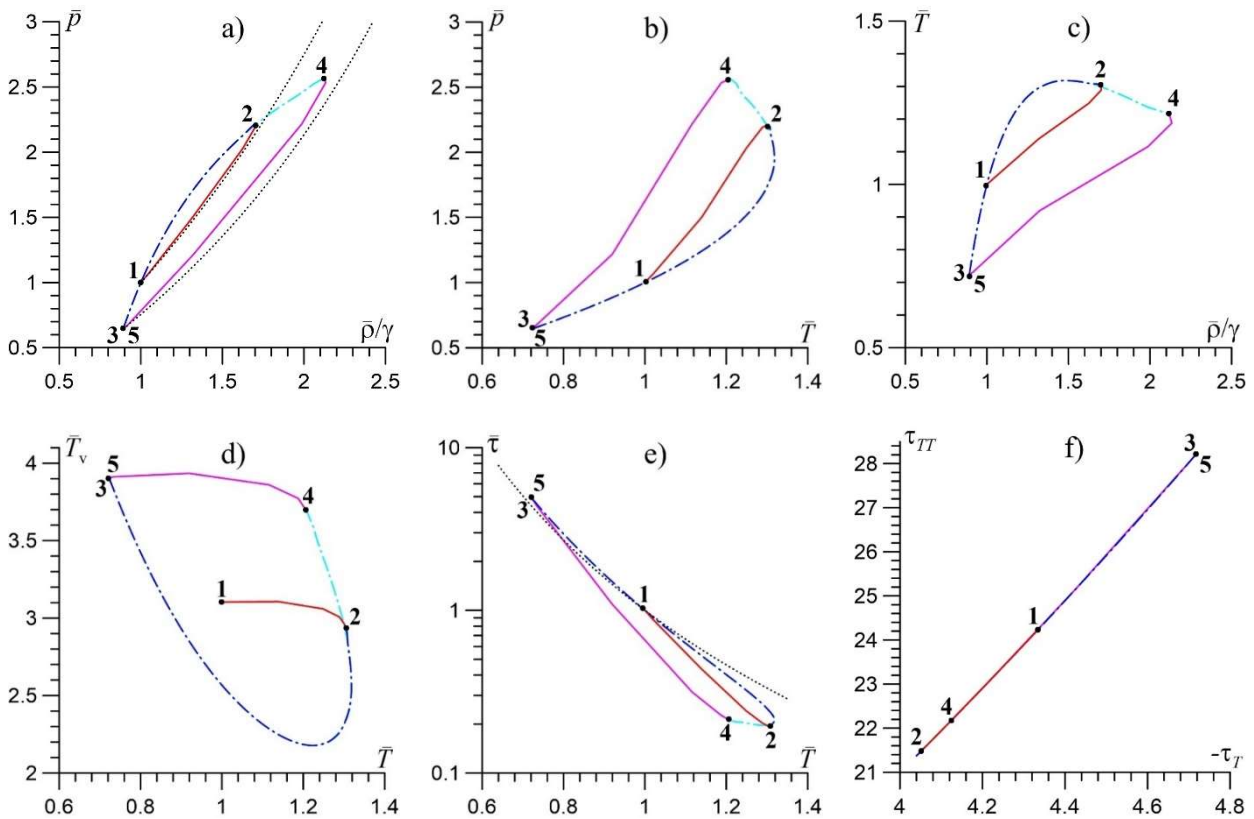


Рис. 3. Структура течения на различных участках УВИ между точками 1-2-3-4-5 (см. рис. 2, б) в момент времени  $\bar{t} = 355$ . На плоскости термодинамических и релаксационных параметров течения показаны зависимости: а)  $\bar{p}(\bar{\rho}/\gamma)$ ; б)  $\bar{p}(\bar{T})$ ; в)  $\bar{T}(\bar{\rho}/\gamma)$ ; д)  $\bar{T}_v(\bar{T})$ ; е)  $\bar{\tau}(\bar{T})$ ; ф)  $\tau_{TT}(\tau_T)$ . Точечными линиями на а) показаны ударные адиабаты равновесного газа, а на е) – функция  $\propto \bar{T}^{-1} \exp\{\bar{a}_1(\bar{T}^{-1/3} - 1)\}$

В неравновесном колебательно-возбужденном газе для полного описания структуры течения в УВИ необходимо добавить диаграммы с параметрами, характеризующими неравновесность и релаксацию. На рис. 3, d приведена диаграмма  $(\bar{T}_v, \bar{T})$ , которая показывает, как изменяется уровень неравновесности  $(\bar{T}_v / \bar{T})$  в УВИ. В целом колебательная и термодинамическая температуры находятся в противофазе, т.е. с ростом  $\bar{T}$  величина  $\bar{T}_v$  уменьшается. Однако за фронтом УВ (кривые 2–3 и 4–5) в небольшом диапазоне температур  $1.2 < \bar{T} < 1.3$  наблюдается отклонение от общей закономерности, и с уменьшением  $\bar{T}$  колебательная температура также уменьшается пока не достигнет своего минимума ( $\bar{T}_{v,\min} \approx 2.2$ ) при  $\bar{T} \approx 1.2$ . Это приводит в заударном газе к аналогичному сдвигу положений экстремумов в пространственных распределениях колебательной и термодинамической температур. Для соответствующего сдвига между максимумом  $\bar{T}$  и минимумом  $\bar{T}_v$  во всех УВИ получаем:  $\Delta \bar{x} \approx 0.5$ . На рис. 3, e представлена диаграмма  $(\bar{\tau}, \bar{T})$ , показывающая изменение времени релаксации от температуры в УВИ. Видно, что за фронтом первого УВИ  $\bar{\tau}$  уменьшается приблизительно в 5 раз (кривая 1–2), а за фронтом второго УВИ – в 25 раз (кривая 3–4). Минимальные же значения времени релаксации в точках 2 и 4 практически совпадают. Сильное понижение времени релаксации за фронтом УВ приводит к ускорению релаксационных процессов и наблюдаемым распределениям колебательной температуры в УВИ. На этом же рисунке точечной линией показана температурная зависимость времени релаксации из (1) и видно, что она проходит выше кривых 1–2 и 3–4. Это связано с наличием в (1) зависимости от плотности, которая на фронте УВ также испытывает значительные скачки, еще больше уменьшая время релаксации. На рис. 3, f приведена диаграмма  $(\tau_{TT}, \tau_T)$ , которая по сути является визуализацией нелинейной зависимости (3) с учетом (2). Несмотря на нелинейный характер этих формул все наши кривые 1–2–3–4–5, описывающие структуру УВИ, укладываются на одну практически прямую линию. Это означает, что зависимость  $\tau_{TT}$  от  $\tau_T$  является приблизительно линейной:  $\tau_{TT} \approx a + b\tau_T$ , где коэффициенты  $a$  и  $b$  зависят от параметров модели релаксации. Так для модели А0 имеем:  $a \approx -19.5$ ,  $b \approx 10.1$ .

### 3.1. Влияние времени релаксации на динамику УВИ

Проанализируем результаты вычислительных экспериментов, представленных в табл. 1. В правой части этой таблицы приведены значения параметров УВИ: скорость фронта УВ ( $\bar{u}_s$ ), давление ( $\bar{p}_{1,2}$ ), температура ( $\bar{T}_{1,2}$ ) и колебательная температура ( $\bar{T}_{v1,2}$ ). Для удобства анализа результатов моделирования введем следующие обозначения:  $\hat{P} = \bar{p}_2 / \bar{p}_1$ ,  $\hat{R} = \bar{\rho}_2 / \bar{\rho}_1$ ,  $\hat{T} = \bar{T}_2 / \bar{T}_1$ ,  $\hat{T}_v = \bar{T}_{v2} / \bar{T}_{v1}$  которые определяют величину скачков соответствующих термодинамических параметров течения неравновесного газа. Введем также величину, обратную скачку плотности (степени сжатия) на фронте УВ:  $\hat{V} = 1 / \hat{R} = \bar{\rho}_1 / \bar{\rho}_2$ .

Рассмотрим первую подгруппу численных расчетов А0–А4 (см. табл. 1), в которых варьируются параметры  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{a}_3$ ,  $n$  так, чтобы значение  $\tau_T$  оставалось постоянным. Следовательно, эти модели имеют равные значения акустического инкремента  $\bar{\alpha}(\bar{\omega}_0)$ , и линейная стадия развития акустической неустойчивости в них протекает одинаково, а различия возникают только на нелинейной стадии при образовании ударно-волновых импульсов. Эти различия должны быть связаны с параметром  $\tau_{TT}$  и отличием температурных зависимостей времени релаксации при высоких и низких температурах. Из табл. 1 видно, что с увеличением параметра  $\tau_{TT}$  скорость УВИ и скачок давления на фронте УВ уменьшаются. Так в базовой модели А0 получаем их максимальные значения ( $\bar{u}_s \approx 1.449$ ,  $\hat{P} \approx 3.982$ ), а в модели А4 – минимальные ( $\bar{u}_s \approx 1.435$ ,  $\hat{P} \approx 3.89$ ). Скачок температуры на фронте УВ также уменьшается с ростом  $\tau_{TT}$ , а колебательная температура заударного газа, наоборот, возрастает. Это связано с тем, что пространственные распределения этих температур в УВИ находятся в противофазе. Если сравнивать зависимости  $\bar{\tau}(\bar{T})$  для различных моделей, то с увеличением параметра  $\tau_{TT}$  при повышении температуры ( $\bar{T} > 1$ ) эти зависимости становятся более пологими, т.е. время релаксации возрастает. Следовательно скорость релаксационных процессов

уменьшается, что приводит к снижению эффективности перекачки колебательной энергии в тепловую в заударном газе и уменьшению давления и температуры за фронтом УВ.

Во второй подгруппе моделей В0-В2 (см. табл. 1) учитываются поправки кинетической теории [11], которые включаются в (1) при  $m = 1$ . Также в этой подгруппе варьируются значения характеристической колебательной температуры  $\bar{\theta}_{\min}$ . Модель В0 отличается от А0 только учетом кинетической поправки, и видно, что при этом увеличивается значение параметра  $\tau_T$  и, как следствие, уменьшается акустический инкремент. В результате происходит незначительное менее 1 % уменьшение интенсивности УВИ. Такое слабое влияние обусловлено тем, что  $\bar{\theta}_{\min} \gg \bar{T}_2$  и влияние кинетической поправки на зависимость  $\bar{\tau}(\bar{T})$  в этом диапазоне температур мало. Если уменьшать характеристическую температуру приближая ее температуре потока и УВИ, то постепенно будут уменьшаться как акустический инкремент, так и амплитуда УВИ (см. модели В1 и В2 в табл. 1). Кроме того, при уменьшении  $\bar{\theta}_{\min}$  увеличивается значение параметра  $C_v$ , который также входит в дисперсионное уравнение (4) и определяет долю колебательной энергии в равновесном газе. Для модели В1 получаем  $C_v \approx 0.28$ , а для В2 –  $C_v \approx 0.42$ .

В третьей подгруппе моделей С0–С6 (см. табл. 1) варьируется только параметр  $\bar{a}_1$ , который оказывает сильное влияние как на акустический инкремент из-за изменения параметра  $\tau_T$ , так и на интенсивность ударно-волновых импульсов, образующихся на конечной стадии эволюции акустической неустойчивости. Как видно из табл. 1, в модели С2 образуются самые слабые УВИ с  $\bar{u}_s \approx 1.18$ ,  $\hat{P} \approx 1.76$  и  $\hat{T} \approx 1.19$ , а в модели С6 – самые интенсивные УВИ с  $\bar{u}_s \approx 1.57$ ,  $\hat{P} \approx 5.21$  и  $\hat{T} \approx 2.04$ .

### 3.2. Тепловой взрыв и динамика сильных УВ с малым скачком плотности

Если параметр  $\tau_T$  в модели времени колебательной релаксации (2) становится меньше некоторого критического значения  $\tau_T^*$ , то структура течения и динамика УВИ существенно изменяются. В наших численных моделях при заданных значениях фиксированных параметров получается, что  $\tau_T^* \approx -5.33$ . Далее рассмотрим численную модель С5 из табл. 1, в которой условие  $\tau_T < \tau_T^*$  заведомо выполняется. Нелинейная динамика акустической неустойчивости в модели С5 показана на рис. 4. До момента времени  $\bar{t} < 40$  акустическая неустойчивость эволюционирует стандартным образом [5], последовательно проходя линейную стадию экспоненциального роста амплитуды с заданным акустическим инкрементом, нелинейные стадии образования пилообразной системы слабых ударных волн и ударно-волновых импульсов большой интенсивности (см. рис. 4, а). Далее при  $\bar{t} > 40$  периодический режим генерации УВИ, происходящий из-за нелинейного взаимодействия (слияния) слабых ударных волн в пилообразной системе, заканчивается. Это связано как с развитием в окрестности точки  $\bar{x} \approx 20$  тепловой неустойчивости низкочастотных колебаний (см. рис. 1), так и с возникновением двух обратных УВИ большой интенсивности, которые и разрушают пилообразную систему слабых ударных волн. Как видно из рис. 4, б, к моменту времени  $\bar{t} = 45$  успевают сформироваться только четыре УВИ, распространяющихся со сверхзвуковой скоростью в положительном направлении. Отметим, что при дальнейшем уменьшении величины  $\tau_T$  количество таких УВИ также уменьшается.

Далее из-за расходящихся в разные стороны УВИ и действия тепловой неустойчивости газ между ударными волнами быстро охлаждается. Обратные УВИ, распространяющиеся к источнику звука, отражаются от левой границы расчетной области (твердой стенки) и к моменту времени  $\bar{t} = 108$  образуют две ударные волны, которые движутся в положительном направлении по холодному газу (рис. 4, с). Как видно из этого рисунка, безразмерные значения давления и температуры газа в области между системой из четырех УВИ и отраженными УВ ( $50 < \bar{x} < 120$ ) снижаются до величины  $\sim 0.25 \div 0.3$ . Кроме того, в этой области из-за быстрого охлаждения возникает обратное течение с дозвуковой скоростью  $\bar{u} \approx -0.35$ , а газ при этом становится сильно неравновесным ( $\bar{T}_v/\bar{T} \approx 65$ ). Из-за низкой температура газа в

этой области время колебательной релаксации возрастает приблизительно в 3700 раз по сравнению с начальным невозмущенным состоянием, что приводит к эффекту «замороженности» колебательной энергии. В дальнейшем этот холодный газ со значительными запасами «замороженной» колебательной энергии, протекая со сверхзвуковой скоростью через фронт ударных волн, может создавать в заударном газе условия, необходимые для возникновения тепловой неустойчивости с высокими значениями инкремента. Стрелками на рис. 4, с показаны области за фронтами отраженных УВ, в которых уже возникли условия для очень быстрого (взрывного) развития тепловой неустойчивости. В течение очень короткого промежутка времени ( $\Delta \bar{t} \sim 0.1$ ) температура газа в этих областях возрастает в десятки раз, т.е. происходит тепловой взрыв, который приводит к образованию сильных ударных волн.

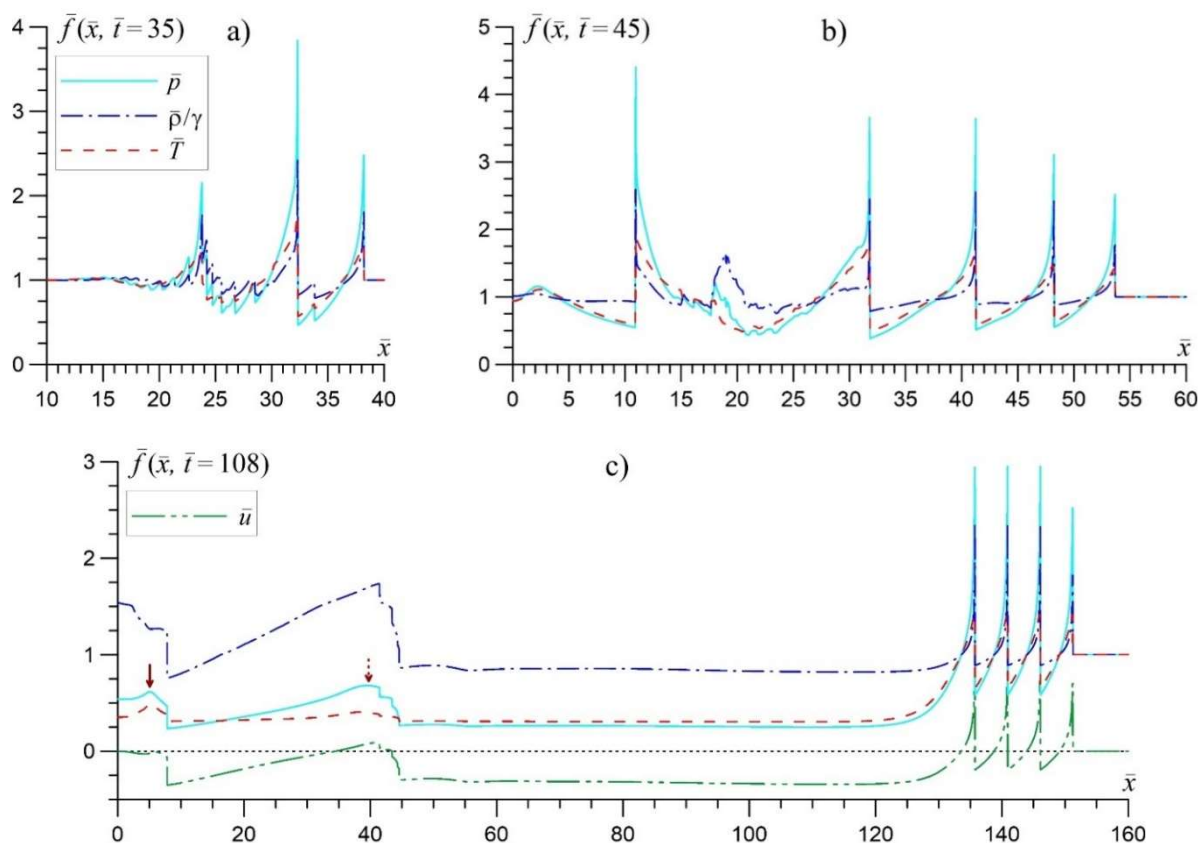


Рис. 4. Эволюция акустической неустойчивости для модели C5 (см. табл. 1). Показаны пространственные распределения давления, плотности, температуры и скорости в волновом пакете в различные моменты времени: а) начальная стадия формирования системы УВИ; б) стадия образования области пониженной температуры между расходящимися в разные стороны УВИ; в) структура течения на начальной стадии развития тепловой неустойчивости в отраженных от левой границы УВ, распространяющихся по холодному и сильно неравновесному газу (стрелками показаны очаги взрывного развития тепловой неустойчивости)

Тепловой взрыв в первой области при  $\bar{x} \approx 5$  происходит в момент времени  $\bar{t} \approx 108.4$ , а во второй ( $\bar{x} \approx 39$ ) – при  $\bar{t} \approx 109.2$ . Взрывное развитие тепловой неустойчивости в этих областях возникает из-за сильного дисбаланса между нагревом и охлаждением газа. Избыточный нагрев газа за фронтом УВ обеспечивается интенсивной перекачкой колебательной энергии, запасенной в холодном газе, в тепловую энергию заударного газа. В результате температура этого заударного газа возрастает, а это приводит к еще большему увеличению интенсивности нагрева и быстрому экспоненциальному росту температуры, т.е. тепловому взрыву. Динамика взрывного развития тепловой неустойчивости и образования сильных ударных волн для второй области ( $\bar{x} \approx 39$ ) показана на рис. 5. Хорошо заметная на рисунке

стадия нелинейного развития тепловой неустойчивости начинается с момента времени  $\bar{t} \approx 109.1$  и сопровождается быстрым локальным увеличением температуры (рис. 5, с) и давления (см. рис. 5, b), плотность (рис. 5, а) при этом практически не изменяется (процесс почти изохорический). К моменту времени  $\bar{t} \approx 109.2$  давление возрастает от значений  $\bar{p}_1 \approx 0.95$  до  $\bar{p}_2 \approx 25.3$ , а температура – от  $\bar{T}_1 \approx 0.6$  до  $\bar{T}_2 \approx 15.6$ . Таким образом, в этой локальной области происходит тепловой взрыв, который приводит к образованию в газе сильных ударных волн со скачками давления  $\hat{P} = \bar{p}_2/\bar{p}_1 \approx 31.6$ , температуры  $\hat{T} = \bar{T}_2/\bar{T}_1 \approx 29.8$  и плотности  $\hat{R} = \bar{\rho}_2/\bar{\rho}_1 \approx 1.06$ , распространяющихся в противоположных направлениях со сверхзвуковой скоростью ( $M \gg 1$ ). Как видно из рис. 5, фронты этих ударных волн за время  $\Delta\bar{t} = 109.4 \div 109.3$  проходят расстояние  $\sim 1.35$ , что дает для скорости УВ значение  $\bar{u}_s \approx 13.5$ . С учетом скорости течения и температуры газа перед фронтом ударной волны получаем для числа Маха значение  $M_1 \approx 20.7$ . За фронтом ударной волны газ также движется со сверхзвуковой скоростью относительно ее фронта –  $M_2 \approx 3.21$ . Характерной особенностью сильных ударных волн, возникающих в результате теплового взрыва, является равновесность заударного газа, при которой колебательная и термодинамическая температуры сравниваются:  $\bar{T}_{v2} \approx \bar{T}_2$  (рис. 5, с). Это означает, что за фронтом этих УВ вся колебательная энергия, запасенная в холодном газе, очень быстро за  $\Delta\bar{t} \sim 0.001$  выделяется в тепло из-за значительного снижения времени релаксации в перетекающем через фронт УВ газе от  $\bar{\tau}_1 \sim 10^2$  до  $\bar{\tau}_2 \sim 10^{-4}$ . Таким образом, показанные на рис. 5 сильные ударные волны имеют нестандартную (аномальную) структуру с почти изохорическим скачком и сверхзвуковым течением заударного газа. Поэтому эти ударные волны не удовлетворяют условию эволюционности разрывов [43] и должны с течением времени распасться (релаксировать) к другому устойчивому состоянию.

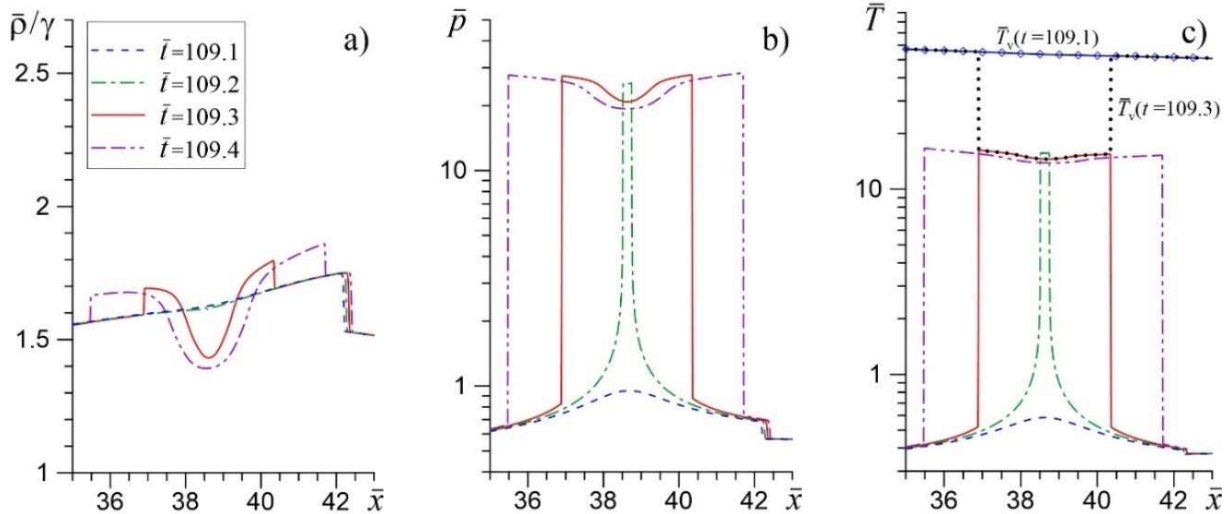


Рис. 5. Образование ударной волны большой интенсивности из-за взрывного развития тепловой неустойчивости за фронтом отраженных УВИ (точечная стрелка на рис. 4). Показаны распределения плотности (а), давления (b) и температуры (с) в последовательные моменты времени. Дополнительно на с) показаны распределения колебательной температуры  $\bar{T}_v$  в два момента времени

На рис. 6 показана динамика сильных ударных волн, образовавшихся в результате теплового взрыва в переохлажденном газе с высокой степенью неравновесности. Как видно из рис. 6, а, в ударной волне, распространяющейся в положительном направлении, к моменту времени  $\bar{t} = 120$  давление и температура за фронтом уменьшаются до значений  $\bar{p}_2 \approx 9$  и  $\bar{T}_2 \approx 7.5$ , а профиль УВ становится все больше похож на профиль УВИ. Также уменьшается и скорость распространения этой УВ, так как за время от момента своего зарождения она проходит расстояние, соответствующее средней скорости движения  $\sim 7.3$ . Кроме того,

хорошо заметно изменение и структуры фронта УВ, связанное с увеличением скачка плотности (степени сжатия), который возрастает на 40 % по сравнению с начальным. Далее эта тенденция в эволюции УВ продолжается, и к моменту времени  $\bar{t} \approx 170$  ее амплитуда, скорость и структура становятся полностью аналогичны УВИ, образовавшимся на конечной стадии развития акустической неустойчивости при  $\bar{t} = 108$  (см. рис. 4, с). Во время теплового взрыва также образуются УВ, движущиеся в противоположном направлении, и между расходящимися в разные стороны УВ образуются области охлажденного и сильно неравновесного газа. Затем ударные волны, отраженные от левой границы расчетной области, инициируют в этом холодном газе развитие тепловой неустойчивости, приводящей к повторным тепловым взрывам и возникновению сильных ударных волн. Далее неустойчивая структура этих ударных волн изменяется, и они превращаются в УВИ с устойчивой квазистационарной структурой. Этот процесс является периодическим (автоволновым) и приводит к увеличению количества УВИ (рис. 6, б).

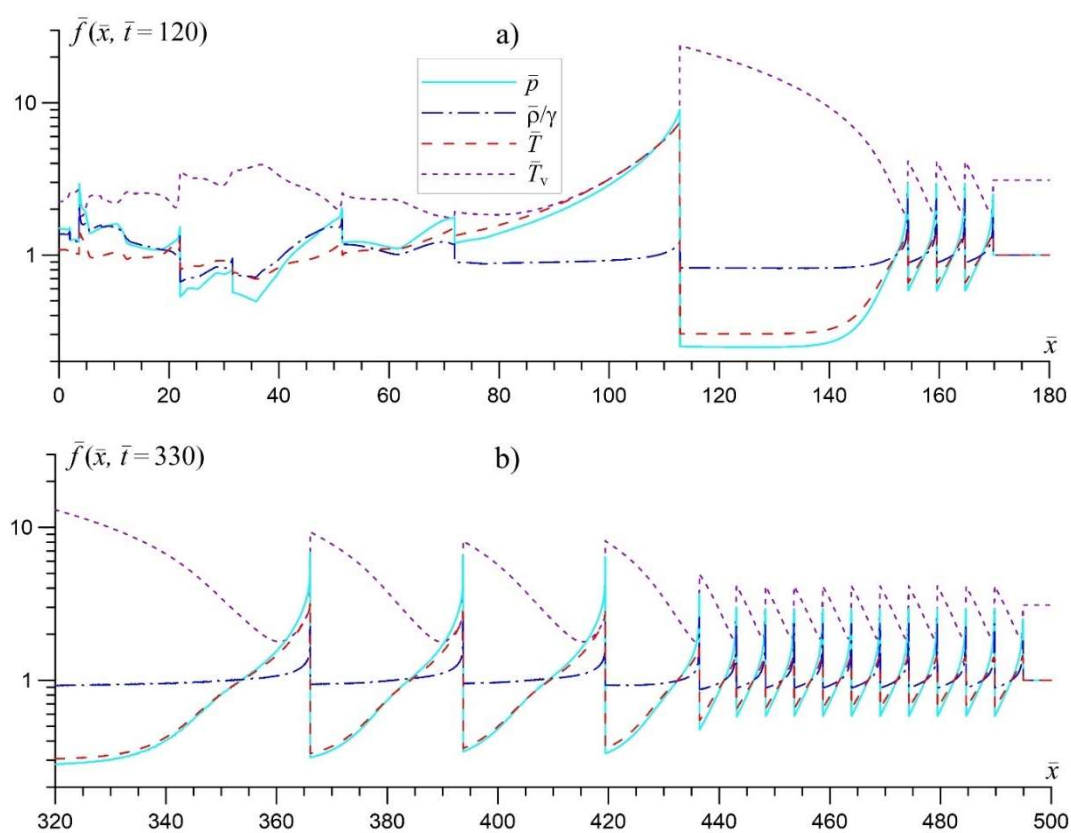


Рис. 6. Динамика ударно-волновых импульсов в модели C5 (см. табл. 1). Показаны распределения давления, плотности, температуры и колебательной температуры в различные моменты времени

Таким образом, можно выделить два механизма образования ударно-волновых импульсов в неравновесном газе. В первом УВИ образуются на конечной нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости [5]. Этот механизм реализуется всегда в акустически активной неравновесной среде. Второй механизм реализуется, когда модель допускает развитие тепловой неустойчивости, переходящей в тепловой взрыв. В результате формируются нестабильные ударные волны высокой интенсивности с большими скачками давления и температуры, которые релаксируют к УВИ и увеличивают их количество в волновом пакете.

Кроме того, проведенный анализ показал, что интенсивность и пространственно-временная структура ударно-волновых импульсов не зависит от начальных возмущений и определяется исходными параметрами неравновесного колебательно-возбужденного газа. Если изменять частоту источника звука, находящегося на левой границе расчетной области, в



пределах области акустической неустойчивости (см. рис. 1), то это приводит только к фазовому сдвигу УВИ и не влияет на их амплитуду, скорость и расстояние между максимумами. Следовательно, УВИ являются периодической последовательностью автоволновых импульсов, которые ранее были получены в работе [1–4] при изучении структуры слабых ударных волн в рамках приближенной модели, основанной на решении нелинейного акустического уравнения. Эти автоволновые импульсы возникают из-за распада слабых ударных волн, амплитуда и скорость которых оказываются ниже некоторого предельного значения [1–4]. Аналогичный распад слабых ударных происходит и в нашей задаче с источником возмущений, когда на нелинейной стадии развития акустической неустойчивости формируется пилообразная последовательность слабых УВ [5, 6], пространственно-временная структура которых зависит от начальной частоты возмущений, а их амплитуда определяется исходными параметрами неравновесной среды. Далее эти слабые УВ вблизи правой границы волнового пакета оказываются нестабильными в соответствии с критерием [1–4] и распадаются на последовательность автоволновых импульсов, формируя таким образом систему УВИ высокой интенсивности [5]. Поскольку расстояние от источника возмущений, на котором образуется пилообразная последовательность слабых УВ, зависит от акустического инкремента  $\bar{\alpha}(\bar{\omega})$ , то это приводит к пространственно-временному (фазовому) сдвигу УВИ. Например, для модели А0 расчетные положения ударно-волновых импульсов, формирующихся в численных экспериментах с различными частотами начальных возмущений  $\bar{\omega}_1 = 2\pi$  и  $\bar{\omega}_2 = \pi/2$ , имеют постоянный сдвиг  $\Delta\bar{x}_{1-2} \approx 1.45$ , а учитывая постоянную скорость этих УВИ  $\bar{u}_s \approx 1.45$  (см. табл. 1) получаем для временного сдвига  $\Delta\bar{t}_{1-2} \approx 1$ . При этом УВИ в расчетах с  $\bar{\omega}_1$  опережают УВИ в расчетах с  $\bar{\omega}_2$ , так как акустический инкремент в первом случае больше, чем во втором (см. рис. 1).

Отметим также, что в рассматриваемой модели не учитываются химические реакции диссоциации многоатомных молекул, которые могут протекать при высоких температурах [12, 14] и приводить к уменьшению эффективности энерговыделения при тепловом взрыве. Это связано с тем, что при диссоциации молекул снижается количество запасенной колебательной энергии, а также происходит поглощение тепловой энергии из потока, которая необходима для поддержания этой химической реакции. Если температура активации химической реакции (диссоциации) значительно превышает исходную температуру, при которой начинает развиваться тепловая неустойчивость, то учет в модели диссоциации молекул не должен приводить к качественным изменениям структуры течения как в момент теплового взрыва, так и при образовании сильных ударных волн. В данном случае учет диссоциации будет приводить только к количественным изменениям структуры течения, уменьшая амплитуду ударных волн, образующихся в результате теплового взрыва. Однако этот вопрос требует отдельного исследования и анализа в моделях с учетом химических реакций.

### 3.3. Структура ударных волн в неравновесном газе с учетом нагрева и охлаждения

Рассмотрим более детально вопрос о структуре и динамике сильных ударных волн, возникающих в результате теплового взрыва. На рис. 7, а-с показана структура одной из этих УВ в различные моменты времени. Во время своего зарождения при  $\bar{t} = 109.4$  (рис. 7, а) УВ имеет аномальную структуру, что хорошо заметно по распределению давления, плотности, температуры и скорости течения за фронтом УВ. Видно, что распределения давления (кривая 1) и температуры (кривая 3) имеют сильные скачки, а скачок плотности (кривая 2) очень мал, т.е. разрыв является почти изохорическим. Скорость течения газа относительно движущегося фронта УВ ( $\bar{u}^* = |\bar{u} - \bar{u}_s|$ ) также не испытывает значительного скачка на разрыве (кривая 6), т.е. заметного торможения потока не происходит. В результате за фронтом УВ величина  $\bar{u}^*$  оказывается больше скорости звука (кривая 5), т.е. течение заударного газа является сверхзвуковым с числом Маха (кривая 7) больше 1 ( $M_2 \approx 3.2$ ). Такая нестандартная (аномальная) структура течения в окрестности разрыва давления и температуры возникает из-за

интенсивного нагрева газа за фронтом УВ, обусловленного быстрой перекачкой в тепло всей колебательной энергии, замороженной в сверхзвуковом потоке ( $M_1 \approx 20.7$ ) набегающего на фронт УВ холодного газа. В заударном газе колебательная температура  $\bar{T}_{v2}$  (кривая 4) и температура  $\bar{T}$  (кривая 3) сравниваются ( $\bar{T}_{v2} \approx \bar{T}_2$ ). Из-за этого интенсивного нагрева происходит быстрое избыточное расширение газа за фронтом УВ, которое с одной стороны ускоряет движение фронта волны, а с другой – эффективно гасит скачки плотности и скорости, приводя к сверхзвуковому течению заударного газа относительно фронта УВ. Возникший таким образом разрыв больше напоминает тепловую волну [44] и не удовлетворяет условию эволюционности ударных волн [43]. Поэтому согласно [43] этот разрыв должен немедленно распасться или, как в данном случае, достаточно быстро (за время  $\sim 50\tau_0$ ) релаксировать к новому устойчивому состоянию (см. рис. 6), соответствующему структуре УВИ. Такую неустойчивую ударную волну с аномальным температурным скачком  $\hat{T} \approx \hat{P}$  будем далее для определенности называть тепловой ударной волной (ТУВ). Процесс превращения (релаксации) этой ТУВ в УВИ показан на рис. 5, б-с. Видно, что к моменту времени  $\bar{t} = 130$  структура УВ существенно изменяется, величина скачков давления и температуры уменьшается, а скачки плотности и скорости, наоборот, возрастают. В результате скорость заударного газа становится дозвуковой с  $M_2 \sim 0.8 \div 0.9$ . Наблюдается также небольшое расщепление кривых 3 и 4 за фронтом УВ, указывающее на снижение эффективности преобразования колебательной энергии в тепловую в заударном газе, что далее приводит к ускорению процесса превращения ТУВ в УВИ. К моменту времени  $\bar{t} = 170$  происходит полное превращение ТУВ в УВИ с устойчивой структурой, которая позволяет этим УВИ образовывать квазистационарный волновой пакет, распространяющийся с постоянной сверхзвуковой скоростью от источника возмущений [5].

Эволюция параметров ТУВ в процессе ее распространения и превращения в УВИ показана рис. 7, d. Видно, что с течением времени скорость ударной волны, числа Маха, скачки давления и температуры монотонно убывают и стремятся к значениям характерным для УВИ, а скачок плотности, наоборот, монотонно возрастает до значений в УВИ. На этой зависимости параметров течения в ТУВ можно условно выделить три характерных временных интервала: 1) от момента зарождения до  $\bar{t} \approx 125$ , в котором скорость течения заударного газа остается сверхзвуковой, а скачок температуры существенно превышает скачок плотности  $\hat{T} \gg \hat{P}$ ; 2)  $125 < \bar{t} \leq 149$  с дозвуковым течением заударного газа, в конце этого интервала при  $\bar{t} \approx 149$  скачки плотности и температуры сравниваются; 3)  $\bar{t} > 149$ , на котором структура УВ постепенно становится устойчивой и принимает конфигурацию характерную для параметров течения в УВИ. На первом интервале при  $\bar{t} \sim 110$  наблюдается локальный рост скачков давления и температуры в ТУВ, который обусловлен движением этой волны по неоднородной среде со скачком параметров течения. Этот скачок соответствует фронту отраженной ударной волны, которая инициировала тепловой взрыв и возникновение ТУВ. Интенсивность нагрева газа за фронтом УВ можно оценить по поведению отношению температур  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1}$  и  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_2$  в заударном газе, приведенных на рис. 7, d. Чем меньше значения этих величин, тем интенсивнее нагрев газа и эффективнее процесс преобразования колебательной энергии в тепло за фронтом УВ. Видно, что свои минимальные значения ( $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1} \approx 0.3$  и  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_2 \approx 1$ ) эти величины принимают на временном интервале  $110 < \bar{t} \leq 125$ , когда ТУВ имеет высокую интенсивность и аномальную структуру с  $M_2 > 1$ . Далее при  $130 < \bar{t} \leq 148$  наблюдается быстрый рост этих величин до значений  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1} \sim 0.75$  и  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_2 \sim 2.5$ , который сопровождается ускорением процесса превращения ТУВ в УВИ. После  $\bar{t} > 150$  происходит медленное увеличение этих величин до своих максимальных значений  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1} \sim 0.9$  и  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_2 \sim 2.85$ .

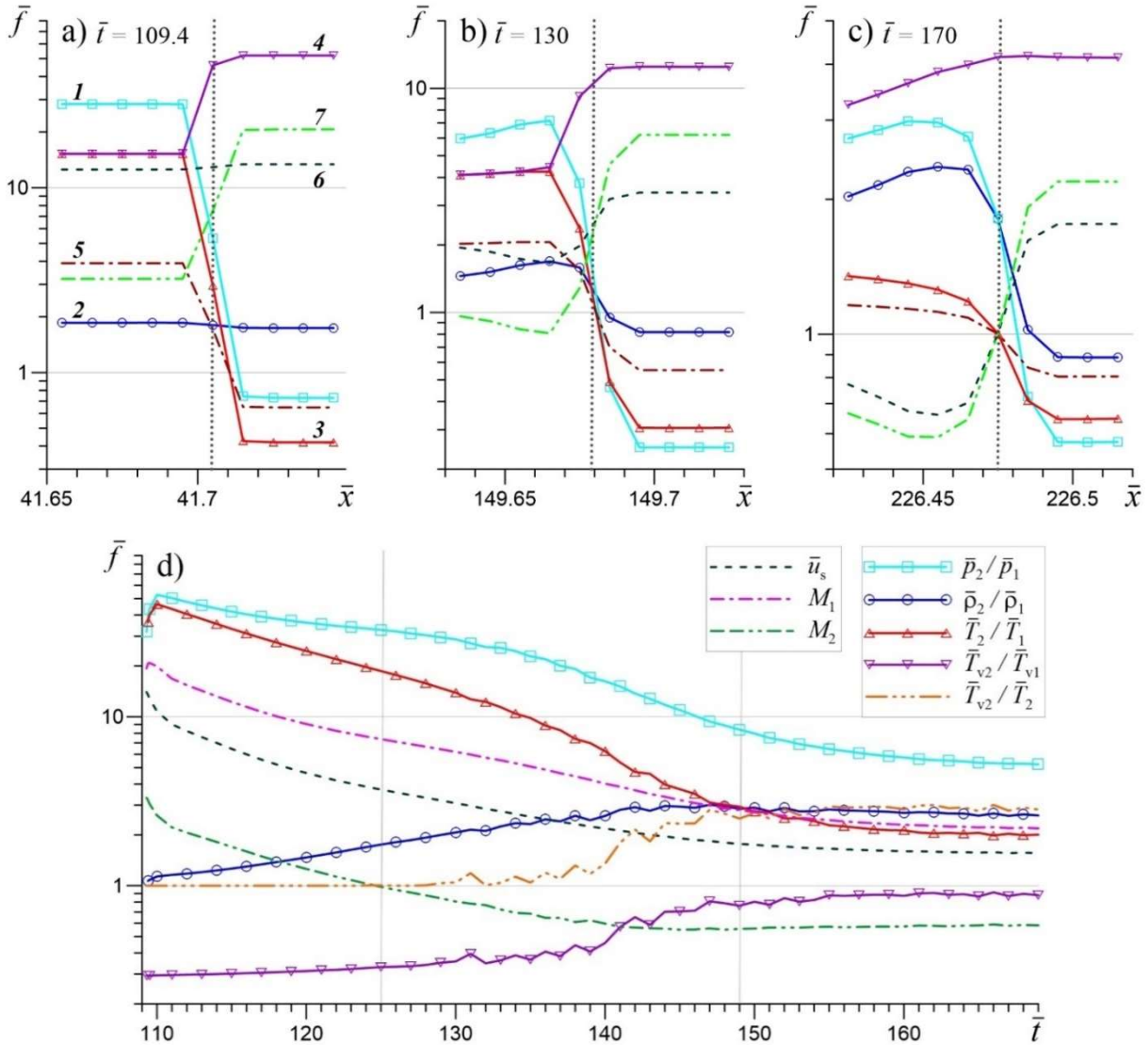


Рис. 7. Структура ударных волн в численной модели C5: а) – с) распределения параметров течения в окрестности фронта УВ (1 –  $\bar{p}$ , 2 –  $\bar{p}/\gamma$ , 3 –  $\bar{T}$ , 4 –  $\bar{T}_v$ , 5 –  $\bar{c}_s$ , 6 –  $\bar{u}^* = |\bar{u} - \bar{u}_s|$ , 7 –  $M = \bar{u}^*/\bar{c}_s$ ) в различные моменты времени (символами отмечены узлы расчетной сетки); д) зависимость параметров течения перед ( $f_1$ ) и за фронтом ( $f_2$ ) УВ от времени. Точечной линией на а) – с) показано положение фронта УВ

Рассмотрим вопрос об адекватности численных решений при описании структуры течения в окрестности фронта ударных волн, формирующихся в неравновесном колебательно-возбужденном газе с учетом нагрева и охлаждения. Для этого исследуем сходимость численного решения к точному при уменьшении размера расчетных ячеек. На рис. 8 показана структура течения в окрестности фронта квазистационарной УВ, формирующейся в численных экспериментах [7] со сверхзвуковым ( $M = 3$ ) натеканием неравновесного колебательно-возбужденного газа на твердую стенку, в зависимости от разрешения пространственной сетки. Все основные численные результаты как в этой работе (пп. 3.1, 3.2), так и в [5,7] получены при  $\Delta\bar{x} = 0.01$ . Дополнительно для исследования сходимости были проведены расчеты на более грубых сетках с  $2^n \Delta\bar{x}$  и более точных с  $\Delta\bar{x}/2^n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ). С уменьшением размера расчетных ячеек ширина численного фронта УВ ( $\lambda_s$ ) линейно уменьшается, приближаясь к ширине физического фронта УВ (рис. 8, а, б, с). Начиная с оптимального разрешения численной модели ( $\Delta\bar{x} = 0.01$ ) при уменьшении размера расчетных ячеек величина скачков давления, плотности и температуры на численном фронте УВ остается практически постоянной

(рис. 8, d), а отношение  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_{v1}$  стремится к 1, подтверждая тем самым сходимость численного решения к точному с непрерывным изменением колебательной температуры (энергии) на фронте УВ в соответствии с математической моделью неравновесного газа (5). Поскольку при дальнейшем уменьшении размера ячеек ( $n > 4$ ) кривые распределения газодинамических величин на рис. 8, a, b, c практически сливаются, то штриховую линию на этом рисунке можно условно назвать точным решением. Тогда при оптимальном пространственном разрешении численной модели значения всех газодинамических величин за численным фронтом УВ (т.е. в точке  $\bar{x}_2$ ) хорошо согласуются с точным решением в заударном газе.

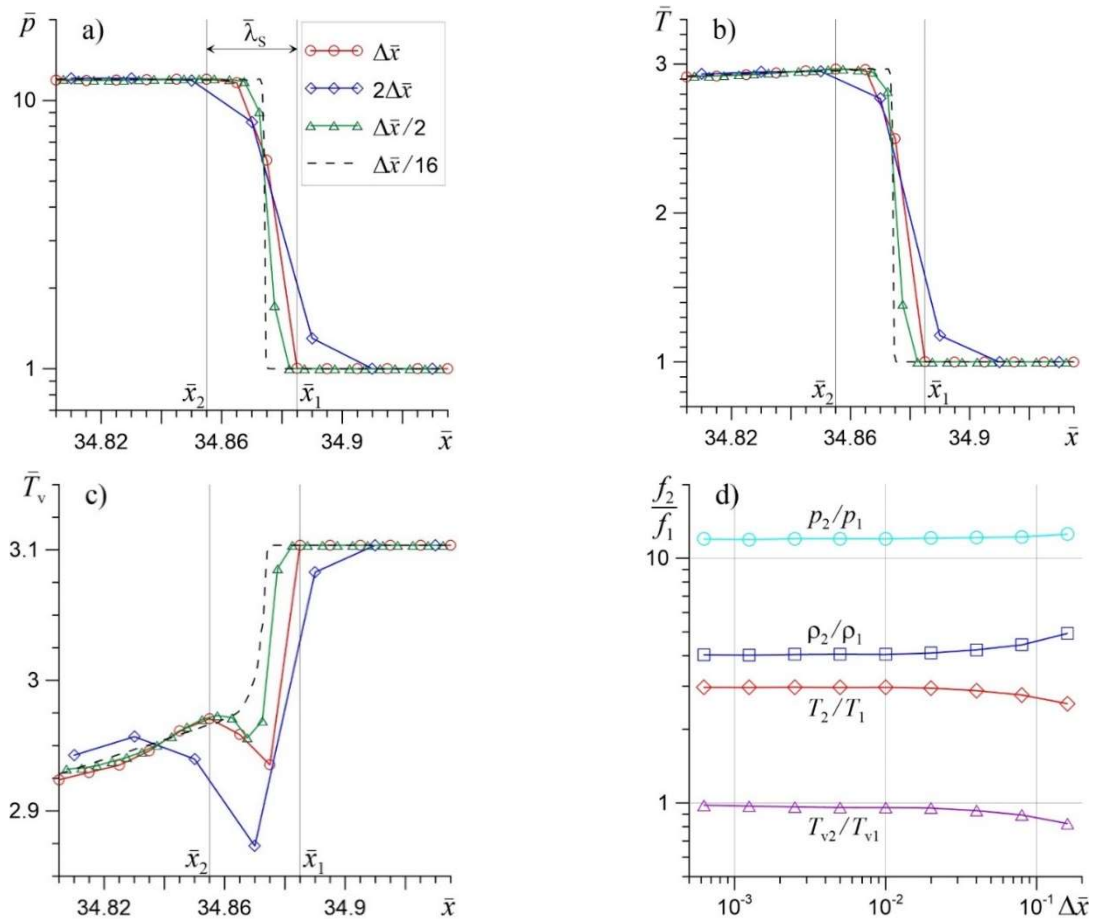


Рис. 8. Сходимость численных решений, описывающих структуру фронта УВ, в зависимости от разрешения пространственной сетки: а), d) и с) – распределение давления, температуры и колебательной температуры в окрестности фронта УВ, соответственно; d) – зависимость скачков газодинамических величин на фронте УВ от шага расчетной сетки

Различия между значениями газодинамических величин за численным фронтом УВ и точным решением в заударном газе должно приводить к отклонению величины скачков давления и плотности на фронте УВ, получаемых в численных экспериментах, от ударной адиабаты Рэнкина–Гюгонно. В связи с этим возникает вопрос являются ли эти отклонения систематическими и можно ли для таких численных УВ построить аналог адиабаты Рэнкина–Гюгонно. Для этого рассмотрим простую аналитическую модель, описывающую структуру численных УВ в неравновесном колебательно-возбужденном газе с учетом нагрева и охлаждения. Перейдем в систему отсчета фронта УВ, движущегося со скоростью  $\bar{u}_s$ , пренебрежем вязкостью, теплопроводностью и локальной нестационарностью течения. Тогда, интегрируя систему уравнений (5), записанных в безразмерном виде, по ширине численного фронта УВ в пределах от  $\bar{x}_2$  до  $\bar{x}_1$  (см. рис. 8), получим уравнения для плотностей потоков массы, импульса, тепловой и колебательной энергий на численном фронте УВ

$$\bar{\rho}_2(\bar{u}_2 - \bar{u}_s) = \bar{\rho}_1(\bar{u}_1 - \bar{u}_s), \quad (13)$$

$$\bar{\rho}_2(\bar{u}_2 - \bar{u}_s)^2 + \bar{p}_2 = \bar{\rho}_1(\bar{u}_1 - \bar{u}_s)^2 + \bar{p}_1, \quad (14)$$

$$\left[ \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_s)^2 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_s)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{\bar{p}_2}{\bar{\rho}_2} - \frac{\bar{p}_1}{\bar{\rho}_1} \right) \right] J = I, \quad (15)$$

$$[\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v1}) - \bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v2})] J = I_v, \quad (16)$$

где  $J = \bar{\rho}_{1,2} |\bar{u}_{1,2} - \bar{u}_s|$  – модуль плотности потока массы. Отличительной особенностью рассматриваемого течения неравновесного газа является наличие на численном фронте УВ тепловыделения  $I$ , обусловленного колебательно-поступательной релаксацией или перекачкой колебательной энергии в тепловую, а также имеющего связь с аналогичной величиной  $I_v$  в уравнении (16). Величины  $I$  и  $I_v$ , локализованные в области  $\bar{\lambda}_s = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$  (где  $\bar{\lambda}_s$  – ширина численного фронта УВ) могут быть представлены в виде [5]

$$I = \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}_1} \bar{\rho} \left[ \frac{\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_v) - \bar{\varepsilon}_v^e(\bar{T})}{\bar{\tau}(\bar{T}, \bar{\rho})} - \bar{\Lambda}(\bar{T}) \right] d\bar{x}, \quad I_v = \int_{\bar{x}_2}^{\bar{x}_1} \bar{\rho} \left[ -\frac{\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_v) - \bar{\varepsilon}_v^e(\bar{T})}{\bar{\tau}(\bar{T}, \bar{\rho})} + \bar{Q}(\bar{T}) \right] d\bar{x} \quad (17)$$

Функции нагрева  $\bar{Q}$  и охлаждения  $\bar{\Lambda}$ , входящие в (17), определяются из условия теплового баланса в исходном стационарном состоянии (см. (11) в [5]). В случае  $\bar{T} > \bar{T}_{ex}$  (где  $T_{ex}$  – температура теплоотвода) величина  $\bar{\Lambda}$  может обеспечивать уменьшение  $I$ , снижая температуру за фронтом УВ. Здесь можно провести некоторую математическую аналогию с работой [9], в которой рассматривалась задача со специфическим источником тепла на физическом фронте УВ, приводящим к изменению структуры течения на этом фронте.

С учетом стационарного баланса [5], уравнения (16) и замены подынтегральной функции в (17) ее средним значением выражение для  $I$  может быть записано в виде

$$I = [\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v1}) - \bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v2})] J + \bar{\rho}_s \frac{S_0}{\gamma} \left[ 1 - \frac{\bar{T}_s - \bar{T}_{ex}}{1 - \bar{T}_{ex}} \right] \bar{\lambda}_s, \quad (18)$$

где  $\bar{\rho}_s = \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} = \frac{\bar{\rho}_1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\hat{V}} \right)$ ,  $\bar{T}_s = \frac{\bar{T}_1 + \bar{T}_2}{2} = \frac{\bar{T}_1}{2} (1 + \hat{P}\hat{V})$ . Первое слагаемое в (18) связано с удельной мощностью тепловыделения  $\bar{Q}_s^{(v)} \propto [\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v1}) - \bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_{v2})]$  на численном фронте УВ за счет колебательно-поступательного энергообмена. Второе слагаемое в (18) определяется балансом на численном фронте УВ удельных мощностей нагрева  $\bar{Q}_s = S_0/\gamma$  и охлаждения  $\bar{\Lambda}_s = \frac{S_0}{\gamma} \frac{\bar{T}_s - \bar{T}_{ex}}{1 - \bar{T}_{ex}}$  газа внешними источниками накачки и теплоотвода, соответственно.

Из уравнений (13) и (14) можно получить следующие полезные соотношения [43]

$$J^2 = \frac{\bar{p}_1}{\bar{V}_1} \frac{\hat{P} - 1}{1 - \hat{V}}, \quad (\bar{u}_1 - \bar{u}_s)^2 = \bar{p}_1 \bar{V}_1 \frac{\hat{P} - 1}{1 - \hat{V}}, \quad (\bar{u}_2 - \bar{u}_s)^2 = \hat{V}^2 (\bar{u}_1 - \bar{u}_s)^2, \quad (19)$$

где  $\hat{P} = \bar{p}_2/\bar{p}_1$ ,  $\hat{V} = \bar{V}_2/\bar{V}_1 = \bar{\rho}_1/\bar{\rho}_2$ . С учетом (19) из (15) получим уравнение, описывающее структуру течения на численном фронте УВ при наличии в неравновесном газе источников нагрева и охлаждения

$$\left\{ \hat{V} [(\gamma - 1) + (\gamma + 1)\hat{P}] - [(\gamma + 1) + (\gamma - 1)\hat{P}] \right\} \sqrt{\frac{\hat{P} - 1}{1 - \hat{V}}} = \frac{2(\gamma - 1)}{\bar{p}_1^{3/2} \bar{V}_1^{1/2}} I \quad (20)$$

Если величина  $I$  не зависит от параметров течения за фронтом УВ, то уравнение (20) сводится к квадратному уравнению, физически корректное ( $\hat{V} > 0$ ) решение которого имеет вид

$$\hat{V} = \frac{(\gamma+1)+(\gamma-1)\hat{P}}{(\gamma-1)+(\gamma+1)\hat{P}} - \frac{\hat{I}^2 - \hat{I}\sqrt{\hat{I}^2 + 8[(\gamma-1)+(\gamma+1)\hat{P}](\hat{P}-1)^2}}{2[(\gamma-1)+(\gamma+1)\hat{P}]^2(\hat{P}-1)}, \quad (21)$$

где  $\hat{I} = \frac{2(\gamma-1)}{\bar{p}_1^{3/2}\bar{V}_1^{1/2}} I$ . В пределе при  $\Delta\bar{x} \rightarrow 0$  из (18) следует, что величина  $I$  обращается в ноль ( $I \rightarrow 0$ ), поскольку  $\bar{\lambda}_S \rightarrow 0$  и  $\bar{T}_{v2} \rightarrow \bar{T}_{v1}$  (см. рис. 8). В результате уравнения (20) и (21) переходят в классическое уравнение ударной адиабаты Рэнкина–Гюгонио.

Отметим, что при выборе оптимального пространственного разрешения численной модели в (18) можно пренебречь слагаемыми с внешним нагревом и теплоотводом, которые пропорциональны ширине численного фронта УВ ( $\lambda_S$ ). Тогда уравнение (20) можно представить в следующем виде:

$$\hat{P} = \frac{\hat{\gamma} - \hat{V} + [2(\bar{\varepsilon}_{v1} - \bar{\varepsilon}_{v2})/\bar{p}_1\bar{V}_1]}{\hat{\gamma}\hat{V} - 1} \quad \text{или} \quad \hat{V} = \frac{\hat{\gamma} + \hat{P} + [2(\bar{\varepsilon}_{v1} - \bar{\varepsilon}_{v2})/\bar{p}_1\bar{V}_1]}{\hat{\gamma}\hat{P} + 1}, \quad (22)$$

где  $\hat{\gamma} = (\gamma+1)/(\gamma-1)$ . Уравнение (22) аналогично уравнению, описывающему структуру детонационных волн [29], только вместо химического тепловыделения имеем колебательно-поступательный энергообмен в слое заударного газа шириной  $\bar{\lambda}_S \gg \bar{\lambda}_f$  ( $\bar{\lambda}_f$  – безразмерная длина свободного пробега молекул).

В общем случае для неравновесного газа с учетом нагрева и охлаждения величина  $I$  в численных моделях должна зависеть как от параметров течения перед фронтом УВ, так и за фронтом УВ. Поэтому решение уравнений (20) и (22) может быть представлено в виде функций  $\hat{V}(\hat{P}, \bar{p}_1, \bar{V}_1, \bar{T}_1, \bar{T}_{v1}, \bar{T}_{v2})$  или  $\hat{P}(\hat{V}, \bar{p}_1, \bar{V}_1, \bar{T}_1, \bar{T}_{v1}, \bar{T}_{v2})$  и для того, чтобы эти функции однозначно определялись только значением  $\hat{P}$  и параметрами течения перед фронтом УВ, необходимо исключить из аргументов функций величину  $\bar{T}_{v2}$ .

Детальный анализ результатов численного моделирования позволил выявить зависимость между отношением температур  $\bar{T}_{v2}/\bar{T}_2$  за фронтом УВ и скачком температуры  $\hat{T}$ , которая с хорошей точностью аппроксимируется аналитической функцией:

$$\bar{T}_{v2} = \hat{T}\bar{T}_1 \left[ 1 + \eta \exp(-\hat{T}^2/\sigma^2) \right], \quad (23)$$

где  $\hat{T} = \hat{P}\hat{V}$ , а коэффициенты  $\eta$  и  $\sigma$  зависят от исходных параметров неравновесной среды и пространственного разрешения численной модели.

Уравнения (20) и (22) с учетом (23) позволяет объяснить структуру и динамику ударных волн, полученных в численных экспериментах. В рамках численных моделей с  $\Delta\bar{x} = 0.01$  решения уравнений (20) и (22) практически не различаются из-за пренебрежимо малого вклада в формуле (18) слагаемого, пропорционального ширине численного фронта УВ  $\bar{\lambda}_S \approx 3\Delta\bar{x}$  и зависящего от баланса внешних источников нагрева и охлаждения. На рис. 9 показаны аналитические решения уравнения (22) при различных значениях параметров течения перед фронтом УВ.

Коэффициенты  $\eta$  и  $\sigma$  определялись с использованием численных моделей [7], в которых в результате трансзвукового натекания неравновесного колебательно-возбужденного газа на твердую стенку образуются устойчивые квазистационарные ударные волны. Красными пронумерованными кружками на рис. 9, а показаны результаты численных экспериментов для параметров неравновесного газа, соответствующих модели А0 из табл. 1, при различных числах Маха в натекающем потоке: 1 –  $M=1$ ; 2 –  $M=1.5$ ; 3 –  $M=2$ ; 4 –  $M=2.5$ ; 5 –

$M = 3$ ;  $6 - M = 4$ . На врезке рис. 9а видно, что данные численных экспериментов с хорошей точностью (максимальное относительное отклонение не превышает 5%) аппроксимируются функцией (23) с коэффициентами  $\eta \approx 4.2$  и  $\sigma \approx 1.2$ . Используя полученную зависимость  $\bar{T}_{v2}(\hat{T}, \bar{T}_1)$  находим решение уравнения (22), которое далее будем называть неравновесной ударной адиабатой. Неравновесная ударная адиабата изображена на рис. 9, а сплошной голубой линией и видно, что все экспериментальные точки (1–10) с хорошей точностью (максимальное относительное отклонение не превышает нескольких процентов) укладываются на эту кривую. Точки 7 и 8, отмеченные на рис. 9, а синими крестиками, соответствуют ударно-волновым импульсам на рис. 2, б, причем точка 7 соответствует первому максимуму, а точка 8 – второму и последующим максимумам в последовательности УВИ. Точки 9 и 10, отмеченные на рис. 9, а синими треугольниками, соответствуют слабым ударным волнам, которые образуются на начальной нелинейной стадии развития акустической неустойчивости, когда в результате нелинейного насыщения амплитуды возмущений формируется пилообразная последовательность слабых УВ [5]. Эти слабые УВ в неравновесном акустически активном газе оказываются неустойчивыми (см. пп. 3.2) и с течением времени распадаются, образуя последовательность ударно-волновых импульсов – УВИ. Один из переходов от слабых ударных волн к УВИ, показан на рис. 9, а сплошной синей стрелкой, т.е.  $9 \rightarrow 7$  и  $10 \rightarrow 8$ .

Интенсивность ударных волн можно характеризовать не только скачками термодинамических величин на их фронте, но и числом Маха в сверхзвуковом потоке, натекающем на фронт УВ. Так для слабых ударных волн (точки 9 и 10 на рис. 9, а) получаем  $M_1^{(9,10)} \approx \{1.07, 1.13\}$ , для УВИ в точках 7 и 8 –  $M_1^{(7,8)} \approx \{1.45, 1.91\}$ , а для квазистационарных УВ в точках 1–6 имеем  $M_1^{(1-6)} \approx \{1.48, 1.87, 2.31, 2.76, 3.22, 4.17\}$ . С увеличением интенсивности ударных волн величина  $M_1$  возрастает, а в заударном газе из-за более сильного торможения потока на фронте УВ, наоборот, число Маха ( $M_2$ ) в дозвуковом течении уменьшается:  $M_2^{(9,10)} \approx \{0.94, 0.89\}$ ,  $M_2^{(7,8)} \approx \{0.75, 0.62\}$ ,  $M_2^{(1-6)} \approx \{0.73, 0.59, 0.54, 0.5, 0.46, 0.42\}$ .

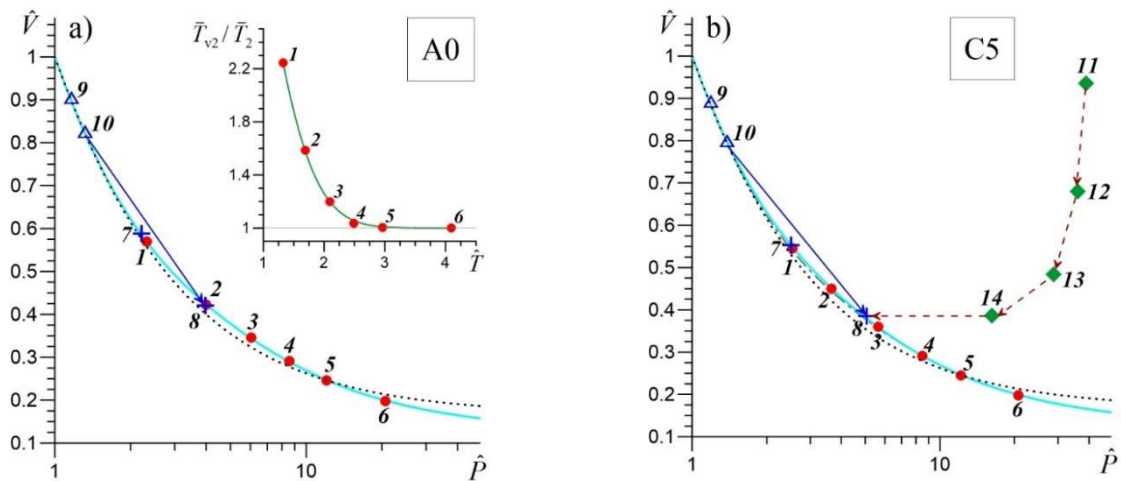


Рис. 9. Сравнение структуры ударных волн на  $(\hat{V}, \hat{P})$ -диаграмме в аналитических (22) и численных моделях из табл. 1: а) модель А0; б) модель С5 из табл. 1. Сплошной голубой линией показано решение уравнения (22), а точечной – ударная адиабата Рэнкина–Гюгонно. Пронумерованными символами отмечены параметры УВ, полученные в различных численных экспериментах. На врезке показана экспериментальная зависимость (23) для модели А0. Пунктирной серой линией на б) показана неравновесная адиабата для модели А0

Аналогичные результаты, показанные на рис. 9, б, получаются и для модели С5. В этом случае для коэффициентов в (23) получаем:  $\eta \approx 4.48$  и  $\sigma \approx 1.15$ . Из рис. 9, б видно, что неравновесная адиабата в модели С5 проходит незначительно выше (см. область между точками 7 и 3), чем соответствующая кривая для модели А0 (показана на рис. 9, б серой пунктирной линией). При этом относительное максимальное отклонение решений для этих моделей

также не превышает нескольких процентов. В модели С5 наряду со стационарными УВ (точки 1–6), ударно-волновыми импульсами (точки 7 и 8) и слабыми УВ (точки 9 и 10) образуются сильные ударные волны с неустойчивой структурой (см. пп. 3.2), которые с течением времени превращаются в УВИ. Зелеными пронумерованными ромбиками на рис. 9, b показаны параметры этой неустойчивой УВ в различные моменты времени (см. рис. 7, d для сравнения): 11 –  $\bar{t} = 109.4$ ; 12 –  $\bar{t} = 120$ ; 13 –  $\bar{t} = 130$ ; 14 –  $\bar{t} = 140$ . Штриховыми стрелками на  $(\hat{V}, \hat{P})$ -диаграмме показана последовательность переходов между состояниями сильной УВ (ТУВ), образовавшейся в результате теплового взрыва, вплоть до превращения ее в УВИ (11 → 12 → 13 → 14 → 8).

На рис. 9 также сравниваются неравновесная ударная адиабата (22), описывающая структуру УВ в численных расчетах, с адиабатой Рэнкина–Гюгонио, которая показана на этом рисунке точечной линией. Видно, что даже для достаточного высокого (оптимального) пространственного разрешения численной модели с  $\Delta\bar{x} = 0.01$  имеются заметные различия между этими ударными адиабатами, которые связаны с наличием в (22) дополнительного слагаемого, учитывающего колебательно-поступательный энергообмен в заударном газе на ширине численного фронта УВ с  $\bar{\lambda}_s \gg \bar{\lambda}_f$ . Величина отклонения между этими ударными адиабатами на рис. 9 зависит от интенсивности ударных волн (скачка давления  $\hat{P}$ ) и определяется разностью колебательных энергий перед и за численным фронтом УВ ( $\bar{\varepsilon}_{v1} - \bar{\varepsilon}_{v2}$ ). В рассмотренных выше вычислительных экспериментах на фронт УВ натекает неравновесный колебательно-возбужденный газ с  $\bar{T}_{v1} > \bar{T}_1$ , а из-за скачка температуры на этом фронте в заударном газе начинают быстрее протекать процессы VT-релаксации, которые, в свою очередь, приводят к заметным изменениям колебательной энергии (температуры) за численным фронтом УВ (в заударном газе). Величина колебательно-поступательного энергообмена в (22) зависит от скачка температуры ( $\hat{T} = \hat{P}\hat{V}$ ) на фронте УВ, а направление (знак) этого энергообмена определяется соотношением между  $\bar{T}_{v1}$  и  $\bar{T}_2$ . При малой интенсивности ударных волн с  $\hat{P} < 2$  скачок температуры невелик  $\hat{T} < 1.2$  и слагаемое с колебательно-поступательным энергообменом в (22) оказывается очень малым, поэтому неравновесная ударная адиабата и адиабата Рэнкина–Гюгонио практически сливаются на рис. 9. С ростом величины  $\hat{P}$  увеличивается и скачок температуры на фронте УВ, что сначала приводит к возрастанию интенсивности перекачки колебательной энергии в тепловую и увеличению отклонений между ударными адиабатами (интервал  $2 < \hat{P} < 5$  на рис. 9), а затем эффективность VT-энергообмена снижается и значение соответствующего слагаемого в (22)  $\propto (\bar{\varepsilon}_{v1} - \bar{\varepsilon}_{v2})$  уменьшается. При  $\hat{P} \sim 12$  колебательные энергии сравниваются  $\bar{\varepsilon}_{v1} \sim \bar{\varepsilon}_{v2}$  и неравновесная ударная адиабата (22) пересекает адиабату Рэнкина–Гюгонио. Дальнейшее увеличение интенсивности УВ приводит к обратному VT-энергообмену, при котором тепловая энергия в заударном газе перекачивается в колебательную энергию за счет VT-релаксации. В области значений  $\hat{P} < 12$  выполняются соотношения  $\bar{\varepsilon}_{v1} > \bar{\varepsilon}_{v2}$  и  $\bar{T}_{v1} > \bar{T}_2$ , а при  $\hat{P} > 12$  получаем соответственно  $\bar{\varepsilon}_{v1} < \bar{\varepsilon}_{v2}$  и  $\bar{T}_{v1} < \bar{T}_2$ . Так для численных моделей 3, 5, 6 на рис. 9 получаем соответственно  $\bar{T}_2 \approx \{2.1, 3, 4.1\}$ , а температуры в набегающем на фронт потоке газа для всех этих моделей одинаковы  $\bar{T}_1 = 1$  и  $\bar{T}_{v1} \approx 3.1$ . Подчеркнем, что в пределе при  $\Delta\bar{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_{v2} \rightarrow \bar{\varepsilon}_{v1}$  и неравновесная ударная адиабата (22) переходит в адиабату Рэнкина–Гюгонио. Для более грубых расчетных сеток различие между этими адиабатами возрастает.

В численных экспериментах с натеканием трансзвукового потока неравновесного газа на твердую стенку [7] устойчивые ударные волны формируются только при  $M \geq 1$ , а во всех остальных случаях с дозвуковым натеканием ( $M < 1$ ) могут образовываться только слабые ударные волны, которые оказываются неустойчивыми и с течением времени распадаются на последовательность УВИ. Характерное время распада  $\Delta t_d$  зависит от числа Маха. Так при скорости натекания с  $M = 0.9$  получаем  $\Delta \bar{t}_d \sim 30$ , а при  $M = 0.75$  имеем  $\Delta \bar{t}_d \sim 20$ . Таким образом, можно сделать следующие выводы относительно УВ, полученных в численных экспериментах:



- 1) все УВ с параметрами лежащими на неравновесной ударной адиабате выше точки 7 (см. рис. 9) оказываются нестабильными и с течением времени распадаются на автоволновую последовательность УВИ (точки 7 и 8);
- 2) все УВ, параметры которых лежат выше неравновесной ударной адиабаты (точки 11–14), также являются неустойчивыми и с течением времени релаксируют к УВИ (точка 8).

#### 4. Заключение

Основные результаты:

1. На основе решения дисперсионного уравнения линейной модели неравновесного газа построены распределения инкремента акустической и тепловой неустойчивости на плоскости параметров: частота – модель времени колебательной релаксации ( $\omega, \tau_T$ ). Эти распределения (карты устойчивости) позволяют определить границы устойчивости и выявить области наиболее неустойчивых гармоник звуковых и энтропийных мод в неравновесном газе, что является важным фактором при постановке начальных условий в вычислительных экспериментах и анализе результатов численного моделирования. Показано, что акустическая неустойчивость в неравновесном газе при наличии внешнего теплоотвода развивается только при  $\omega\tau > 0.5$ , а в более низкочастотном диапазоне звуковые волны затухают. Тепловая неустойчивость, наоборот, возникает в низкочастотной области спектра при  $\omega\tau < 1$ . С ростом степени неравновесности среды границы устойчивости звуковых и энтропийных мод смещаются в область более высоких частот, а инкремент акустической и тепловой неустойчивостей увеличивается.

2. С использованием технологии параллельных вычислений OpenMP проведено распараллеливание численного газодинамического алгоритма, предназначенного для исследования динамики акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе. Это позволило ускорить расчеты в десятки раз и исследовать динамику и структуру сильных ударных волн, возникающих в охлажденном неравновесном газе из-за развития тепловой неустойчивости и теплового взрыва.

3. Проанализирована структура ударно-волновых импульсов (УВИ), формирующихся на конечной нелинейной стадии развития акустической неустойчивости. С использованием термодинамических диаграмм выявлены основные закономерности распределения параметров течения в УВИ. Показано, что за фронтом ударных волн максимум в распределении температуры заударного газа смещен дальше по потоку относительно максимумов давления и плотности. Распределение колебательной температуры в заударном газе находится в противофазе с распределением температуры, а ее минимум также имеет смещение, но уже относительно максимума температуры. Эти особенности структуры течения в УВИ обусловлены более интенсивным колебательно-поступательным энергообменом в заударном газе из-за значительных скачков температуры на фронте ударных волн.

4. Исследовано влияние времени релаксации на структуру ударно-волновых импульсов и показано, что зависимость времени релаксации от температуры  $\tau(T)$ , может оказывать существенное влияние как на динамику акустической неустойчивости, так и на интенсивность УВИ. В моделях времени релаксации, имеющих в начальном состоянии одинаковый наклон функций  $\tau(T)$  (модельный параметр  $\tau_T \propto \partial\tau/\partial T$ ), но разную кривизну (модельный параметр  $\tau_{TT} \propto \partial^2\tau/\partial T^2$ ), скорость роста амплитуды звуковых волн на линейной стадии развития акустической неустойчивости совпадает. Незначительные различия между этими моделями появляются только на нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости и зависят от параметра  $\tau_{TT}$ , с увеличением которого интенсивность УВИ уменьшается. В моделях с убывающими функциональными зависимостями  $\tau(T)$  уменьшение параметра  $\tau_T$  (увеличение наклона функций) приводит к увеличению как инкремента акустической неустойчивости, так и интенсивности ударно-волновых импульсов. Если значение параметра  $\tau_T$  оказывается

меньше некоторого критического значения, то в газе между УВИ могут возникать области низких температур с высокой степенью неравновесности, в которых возможно развитие тепловой неустойчивости с большим значением инкремента.

5. Показано, что за фронтом отраженных УВ, распространяющихся по охлажденному газу с высокой степенью неравновесности, возникают условия для развития сильной тепловой неустойчивости, которая приводит к очень быстрому (взрывному) росту давления и температуры – тепловому взрыву. В результате теплового взрыва в неравновесном газе формируются сильные ударные волны с большими скачками давления и температуры на фронте, а скачок плотности при этом оказывается очень малым. Поэтому эти ударные волны можно отнести, в отличие от изотермических УВ [43], к другому предельному типу УВ с изохорическим скачком. В данной работе для определенности эти сильные УВ с изохорическим скачком названы тепловыми ударными волнами (ТУВ). Низкая степень сжатия в ТУВ обусловлена сильным тепловым расширением заударного газа из-за интенсивной перекачки колебательной энергии в тепловую за фронтом УВ. Это интенсивное тепловыделение также приводит к малому скачку скорости течения, и в результате скорость заударного газа относительно фронта УВ оказывается сверхзвуковой. Поэтому ТУВ оказываются нестабильными, так как не удовлетворяют условию эволюционности УВ [43], и с течением времени распадаются, образуя последовательность устойчивых ударно-волновых импульсов.

6. Детальный анализ результатов численного моделирования, в том числе и в работах [5–7], позволил выделить несколько механизмов образования УВИ. Во-первых, УВИ образуются на конечной нелинейной стадии развития акустической неустойчивости [5] в задаче с источником возмущений, который генерирует звуковые волны. Эти звуковые волны в неравновесном газе оказываются неустойчивыми [27, 28], и их амплитуда сначала возрастает экспоненциально (линейная стадия), затем происходит нелинейное насыщение амплитуды возмущений, и образуется пилообразная система слабых ударных волн, из которых в дальнейшем формируется система более интенсивных УВИ. Кроме того, результаты численного моделирования показали, что структура УВИ не зависит от начальных возмущений, генерируемых источником, а определяется только исходными параметрами неравновесной среды. Начальные возмущения (частота и амплитуда) влияют только на фазу УВИ, которая определяется моментом времени образования этих волновых структур. Второй механизм связан с распадом ТУВ, образующихся при тепловом взрыве в сильно неравновесном газе, а формирующиеся при этом УВИ имеют такую же структуру, как и в первом случае. Третий механизм образования УВИ реализуется в задаче с дозвуковым натеканием неравновесного колебательно-возбужденного газа на твердую стенку [7]. Если исходные параметры неравновесной среды аналогичны первому и второму случаю, то УВИ имеют такую же структуру. Таким образом, можно сделать вывод о том, что структура УВИ не зависит как от параметров начального возмущения среды, так и от типа этого возмущения. Следовательно, УВИ представляют собой автоволновую структуру или ударно-автоволновые импульсы (УАВИ). Отметим, что первый механизм образования УАВИ хорошо согласуется с механизмом распада слабых ударных, в результате которого возникает последовательность автоволновых импульсов [1–4].

7. Показана сходимости численных моделей к точному решению, описывающему структуру ударных волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе. Получено, что структура УВ в численных моделях описывается уравнением неравновесной ударной адiabаты в форме Рэнкина–Гюнио с дополнительным слагаемым, которое учитывает колебательно-поступательный энергообмен в слое заударного газа и зависит от разности колебательных энергий перед и за численным фронтом УВ. Ширина численного фронта УВ определяется шагом расчетной сетки и даже при оптимальном пространственном разрешении ( $\Delta x = 0.01 c_{s0} \tau_0$ ) все равно оказывается на много порядков больше реальной ширины физического фронта УВ, поэтому процессы VT-релаксации в этом слое заударного газа успевают заметно изменить значения колебательной энергии и температуры. В пределе при

$\Delta x \rightarrow 0$  неравновесная ударная адиабата переходит в классическую адиабату Рэнкина – Гюгонио, а колебательная энергия изменяется непрерывно на газодинамическом скачке (разрыве). Отметим, что используемое в нашей численной модели высокое пространственное разрешение, которое мы называем оптимальным, позволяет как с хорошей точностью описывать структуру течения в заударном газе, так и исследовать динамику развития акустической неустойчивости с высоким волновым разрешением (порядка ста ячеек на длину волны) для наиболее неустойчивых гармоник [5, 6].

8. На основе анализа результатов вычислительных экспериментов и структуры численных УВ, описываемых неравновесной ударной адиабатой, определены условия существования квазистационарных ударно-волновых структур в неравновесном газе. Первым необходимым условием является соответствие структуры УВ неравновесной ударной адиабате, т.е. состояния этих ударных волн на термодинамической  $(P, V)$ -диаграмме должны лежать на кривой ударной адиабаты. Второе достаточное условие ограничивает минимальную интенсивность или скорость УВ, которая должна быть не меньше скорости ударно-автоволновых импульсов. Для численных моделей, рассмотренных в данной работе, это предельное значение скорости, выраженное через число Маха натекающего на фронт газа, составляет  $M_1 \sim 1.4 \div 1.6$ . Если ударные волны не удовлетворяют этим двум условиям, то они оказываются неустойчивыми и с течением времени распадаются на последовательность ударно-автоволновых импульсов.

Отметим, что ударно-автоволновые импульсы, распространяясь в неравновесном химически активном газе, могут усиливаться [7] за счет дополнительного химического тепловыделения в заударном газе. Далее при определенных условиях эти ударно-волновые структуры могут инициировать в газе развитие тепловой неустойчивости, которая также сможет привести к тепловому взрыву [29, 30] и образованию детонационных волн высокой интенсивности [8, 19–21]. Кроме того, представляет интерес исследование структуры ударно-автоволновых импульсов как в сверхзвуковых потоках, так и в многомерных многокомпонентных моделях неравновесного колебательно-возбужденного газа [12, 14, 17, 45] в приложении к разработке экспериментальных энергетических установок, генерирующих ударно-автоволновые импульсы [46, 47].

## Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00401, <https://rscf.ru/project/23-21-00401/>

## Литература

1. Макарян В. Г., Молевич Н. Е. Структура слабых ударных волн в стационарно неравновесной среде // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2005. Т. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2005-3/articles/84/>
2. Макарян В. Г., Молевич Н. Е. Слабые ударные волны в неравновесных средах с отрицательной дисперсией // Журнал технической физики. 2005. Т. 75, вып. 6. С. 13–18.
3. Makaryan V. G., Molevich N. E. Stationary shock waves in nonequilibrium media // Plasma Sources Science and Technology. 2007. Vol. 16. № 1. Pp. 124–131.
4. Molevich N. E., Galimov R. N., Makaryan V. G., Zavershinskii D. I. General nonlinear acoustical equation of relaxing media and its stationary solutions // The Journal of the Acoustical Society of America. 2013. Vol. 133. № 5. Pp. 3555–3563.
5. Храпов С. С. Нелинейная динамика акустической неустойчивости в колебательно-возбужденном газе: влияние нагрева и охлаждения // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т.24, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1059/>

6. Храпов С. С., Иванченко Г. С., Радченко В. П., Титов А. В. Численное моделирование акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Журнал технической физики. 2023. Т. 93 № 12. С. 1727–1731.
7. Храпов С. С. Численное моделирование ударных волн в неравновесном химически активном газе // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2024. Т. 27. № 1. С. 86–96. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.6>
8. Панасенко А. В. Результаты расчетов распространения детонационных волн в канале с водородосодержащей смесью газов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24, вып. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1045/>
9. Голятин В. Ю., Кучинский В. В., Сухомлинов В. С. Влияние внешнего энергоподвода в область ударного слоя на структуру ударной волны // Журнал технической физики. 2005. Т. 75. № 5. С. 52–59. <https://journals.ioffe.ru/articles/8549>
10. Осипов А. И., Уваров А. В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // Успехи физических наук. 1992. Т. 162. № 11. С. 1–42. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199211a.0001>
11. Ковач Э. А., Лосев С. А., Сергиевская А. Л., Храпак Н. А. Каталог моделей физико-химических процессов 2. Процессы колебательного энергообмена // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Т. 10. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332/>
12. Шоев Г. В., Бондарь Е. А., Облапенко Г. П., Кустова Е. В. Разработка и апробация методики численного моделирования термически неравновесных диссоциирующих течений в ANSYSFluent // Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23. № 2. С. 159–171.
13. Суржиков С. Т. Применение квазистационарных eRC-моделей для расчета неравновесного излучения ударных волн при скорости порядка 10 км/с // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-4/articles/1015/>
14. Surzhikov S.T. Non-Equilibrium Supersonic Flow Past a Blunt Plate at High Angle of Attack // Fluid Dynamics. 2023. V. 58. No. 1. Pp. 113–127. <https://doi.org/10.1134/S0015462822700033>
15. Арсентьев И. В., Шарипов А. С., Луховицкий Б. И. Уточнение модели колебательной неравновесности с использованием однотраекторных молекулярно-динамических расчетов применительно к воспламенению синтез-газа за ударной волной // Авиационные двигатели. 2021. № 2(11). С. 61–69. [https://doi.org/10.54349/26586061\\_2021\\_2\\_61](https://doi.org/10.54349/26586061_2021_2_61)
16. Sharipov A. S., Loukhovitski B. I. Energy disposal into the vibrational degrees of freedom of bimolecular reaction products: Key factors and simple model // Chemical Physics. 2021. V. 544. P. 111098. <https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2021.111098>.
17. Surzhikov, S.T. Thermogasdynamics of a Model Ethylene-Fueled Combustion Chamber in Supersonic Flow // Fluid Dynamics. 2022. V. 57. Pp. 351–370. <https://doi.org/10.1134/S0015462822030144>
18. Seleznev R. K. On the Method for Estimating the Integral Characteristics of a Generic Scramjet with an Integrated Propulsion System // Fluid Dynamics. 2023. Vol. 58. Pp. 1584–1593. <https://doi.org/10.1134/S0015462823602607>
19. Фролов С. М., Шамшин И. О., Бырдин К. А., и др. Усиление ударной волны в двухфазной смеси перегретого водяного пара и жидкого триэтилалюминия // Горение и взрыв. 2024. Т. 17. № 2. С. 80–91. <https://doi.org/10.30826/CE24170208>
20. Шамшин И.О., Иванов В.С., Аксёнов В.С., Гусев П.А., Авдеев К.А., Фролов С.М. Распространение пламени и переход горения в детонацию в полуограниченной плоской щелевой камере сгорания с отдельной подачей этилена и кислорода // Горение и взрыв. 2023. Т. 16. № 4 С. 38–65. <https://doi.org/10.30826/CE23160405>
21. Шамшин И.О., Аксёнов В.С., Казаченко М.В., Гусев П.А., Фролов С.М. Быстрый переход горения в детонацию в спиралевидных трубах // Горение и взрыв. 2023. Т. 16. № 3. С. 29–50. <https://doi.org/10.30826/CE23160304>

22. Oran E. S., Gardner J. H. Chemical-acoustic interactions in combustion systems // *Progress in Energy and Combustion Science*. 1985. Vol. 11. No. 4. Pp. 253–276.  
[https://doi.org/10.1016/0360-1285\(85\)90003-6](https://doi.org/10.1016/0360-1285(85)90003-6)
23. Kogan E. Y., Molevich N. E. Sound waves in a nonequilibrium molecular gas // *Soviet Physics Journal*. 1986. Vol. 29. Pp. 547–551.
24. Осипов А. И., Уваров А. В. Неравновесный газ: проблемы устойчивости // *Успехи физических наук*. 1996. Т. 166. № 6. С. 639–650.
25. Молевич Н. Е. Дисперсия скорости звука и вторая вязкость в средах с неравновесными химическими реакциями // *Акустический журнал*. 2003. Т. 49. № 2. С. 229–232.
26. Zavershinskii D., Molevich N., Belov S., Riashchikov D. Over stability of acoustic waves in heat-releasing gaseous media // *AIP Conference Proceedings*. 2020. Vol. 2304, issue 1, article id. 020028.  
<https://doi.org/10.1063/5.0034849>
27. Храпов С. С., Иванченко Г. С., Радченко В. П., Маковеев И. С. Динамика малых возмущений в неравновесном колебательно-возбужденном газе // *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2023. Т. 26. № 4. С. 83–105. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.7>
28. Храпов С. С. Газодинамические неустойчивости в неравновесной химически активной среде // *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2024. Т. 27. № 1. С. 26–44.  
<https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.3>
29. Щелкин К. И. Теория горения и детонации // *Механика в СССР за 50 лет*. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 343–422.
30. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980. 479 с.
31. Millikan R. C., White D. R. Systematics of vibrational relaxation // *The Journal of Chemical Physics*. 1963. Vol. 39. Pp. 3209–3213.
32. Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Ступоченко Е. В., Шелепин Л. А. Колебательная релаксация и газовые лазеры // *Успехи физических наук*. 1972. Т. 108. № 4. С. 655–699.
33. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А., Костин В. Н. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. М.: ВИНТИ, АН СССР, 1980. Т. 10. № 1. 379 с.
34. Park C. Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics. J. Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
35. Косарева А. А., Нагнибеда Е. А. Диссоциация и колебательная релаксация в пространственно однородной смеси CO<sub>2</sub>/CO/O // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2016. Т. 3 (61), вып. 3. С. 468–480.
36. Кустова Е. В., Облапенко Г. П., Шарафутдинов И. З. Модели колебательной релаксации в неравновесных многотемпературных течениях // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т.16, вып.2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/536/>
37. van Leer B. Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // *J. Comput. Phys*. 1979. Vol. 32. Pp.101–136.
38. Khoperskov S. A., Vasiliev E. O., Sobolev A. M., Khoperskov A. V. The simulation of molecular clouds formation in the Milky Way // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. Vol. 428. Pp. 2311–2320.
39. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *J. Comput. Phys*. 1983. Vol. 49. Pp. 357–393.
40. Harten A., Lax P., van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM review*. 1983. Vol. 25. Pp. 35–61.
41. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // *Shock Waves*. 1994. Vol. 4. №1. Pp. 25–34.
42. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.

43. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Гидродинамика. Т. VI. М.: Наука, 1986. 736 с.
44. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
45. Галкин В. С., Лосев С. А. Уравнения релаксационной газодинамики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-6/articles/288/>
46. Radchenko V., Khrapov S. and Khoperskov V. CAD Model of an Experimental Setup for Studying Acoustic Instability in a Nonequilibrium Chemically Active Medium: Optimization of the Cooling System // 2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation. 2024. Pp. 533–538. <https://doi.org/10.1109/SUMMA64428.2024.10803831>
47. Khrapov S., Radchenko V. and Khoperskov A. Control of the Spectrum of Unstable Acoustic Waves in a Supersonic Channel of Experimental Setup // 2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation. 2024. Pp. 988–992. <https://doi.org/10.1109/SUMMA64428.2024.10803889>

## References

1. Makarian V., Molevich N., Structure of weak shock waves in a stationary nonequilibrium medium, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2005, vol. 3. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2005-3/articles/84/>
2. Makaryan V. G., Molevich N. E., Weak shock waves in negative-dispersion nonequilibrium media, *Technical Physics*, 2005, vol. 50, no. 6, pp. 685–691. <https://doi.org/10.1134/1.1947341>
3. Makaryan V. G., Molevich N. E., Stationary shock waves in nonequilibrium media, *Plasma Sources Science and Technology*, 2007, vol. 16, no. 1, pp. 124–131. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/16/1/017>
4. Molevich N. E., Galimov R. N., Makaryan V. G., Zavershinskii D. I., General nonlinear acoustical equation of relaxing media and its stationary solutions, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2013, vol. 133, no. 5, pp. 3555–3563. <https://doi.org/10.1121/1.4806465>
5. Khrapov S. S., Nonlinear dynamics of acoustic instability in a vibrationally excited gas: influence of heating and cooling, *Fluid Dynamics*, 2024, vol. 59, no. 4, pp. 899–915. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602584>
6. Khrapov S. S., Ivanchenko G. S., Radchenko V. P., Titov A. V., Numerical Modeling of Acoustic Instability in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas, *Technical Physics*, 2024, vol. 69, no. 6, pp. 1596–1601. <https://doi.org/10.1134/S1063784224060173>
7. Khrapov S. S., Numerical modeling of shock waves in a nonequilibrium chemically active gas, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 86–96. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.6>
8. Panasenko A. V., Calculation of Shock Wave Formation in a Shock Tube with a Different Method of Initial Gas Outflow, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 3. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.3.1045>
9. Golyatin V. Yu., Sukhomlinov V. S., Kuchinskiy V. V., Effect of external power supply to a shock layer on the shock wave structure, *Technical Physics*, 2005. vol. 50, no. 5, pp. 582–589. <https://doi.org/10.1134/1.1927212>
10. Osipov A. I., Uvarov A. V., Kinetic and gasdynamic processes in nonequilibrium molecular physics, *Soviet Physics Uspekhi*, 1992, vol. 35, no. 11, pp. 903–923. <https://doi.org/10.1070/PU1992v035n11ABEH002275>

11. Kovach E., Losev S., Sergievskaya A., Khrapak N., Catalogue of models of physical and chemical processes. Part 2. Vibrational energy exchange processes, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2010, vol. 10. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332/>
12. Shoen G. V., Bondar Y. A., Oblapenko G. P., Kustova E. V., Development and testing of a numerical simulation method for thermally nonequilibrium dissociating flows in ANSYS Fluent, *Thermophysics and Aeromechanics*, 2016, vol. 23, no. 2, pp. 151–163. <https://doi.org/10.1134/S0869864316020013>
13. Surzhikov S. T., Application of Quasi-Stationary eRC Models for the Calculation of Non-Equilibrium Radiation of Shock Waves at Velocity about 10 km/s, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, no. 4. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.4.1015>
14. Surzhikov S.T., Non-Equilibrium Supersonic Flow Past a Blunt Plate at High Angle of Attack, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 113–127. <https://doi.org/10.1134/S0015462822700033>
15. Arsenyev I. V., Sharipov A. S., Lukhovitsky B. I., Refinement of the vibrational nonequilibrium model using single-trajectory molecular dynamics calculations as applied to the ignition of synthesis gas behind a shock wave, *Aircraft Engines*, 2021, no. 2(11), pp. 61–69. [https://doi.org/10.54349/26586061\\_2021\\_2\\_61](https://doi.org/10.54349/26586061_2021_2_61)
16. Sharipov A. S., Loukhovitski B. I., Energy disposal into the vibrational degrees of freedom of bimolecular reaction products: Key factors and simple model, *Chemical Physics*, 2021, vol. 544, pp. 111098. <https://doi.org/10.1016/j.chemphys.2021.111098>
17. Surzhikov S. T., Thermogasdynamics of a Model Ethylene-Fueled Combustion Chamber in Supersonic Flow, *Fluid Dynamics*, 2022, vol. 57, pp. 351–370. <https://doi.org/10.1134/S0015462822030144>
18. Seleznev R. K., On the Method for Estimating the Integral Characteristics of a Generic Scramjet with an Integrated Propulsion System, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, pp. 1584–1593. <https://doi.org/10.1134/S0015462823602607>
19. Frolov S. M., Shamshin I. O., Byrdin K. A., et al., Shock Wave Amplification in a Two-Phase Mixture of Superheated Water Vapor and Liquid Triethylaluminum, *Combustion and Explosion*, 2024, vol. 17, no. 2, pp. 80–91. <https://doi.org/10.30826/CE24170208>
20. Shamshin I. O., Ivanov V. S., Akseyonov V. S., Gusev P. A., Avdeev K. A., Frolov S. M., Flame Propagation and Transition from Combustion to Detonation in a Semi-Restricted Flat Slotted Combustion Chamber with Separate Supply of Ethylene and Oxygen, *Combustion and Explosion*, 2023, vol. 16, no. 4, pp. 38–65. <https://doi.org/10.30826/CE23160405>
21. Shamshin I.O., Akseyonov V.S., Kazachenko M.V., Gusev P.A., Frolov S.M., Rapid transition of combustion to detonation in spiral tubes, *Combustion and Explosion*, 2023, vol. 16, no. 3, pp. 29–50. <https://doi.org/10.30826/CE23160304>
22. Oran E. S., Gardner J. H., Chemical-acoustic interactions in combustion systems, *Progress in Energy and Combustion Science*, 1985, vol. 11, no. 4, pp. 253–276. [https://doi.org/10.1016/0360-1285\(85\)90003-6](https://doi.org/10.1016/0360-1285(85)90003-6)
23. Kogan E. Y., Molevich N. E., Sound waves in a nonequilibrium molecular gas, *Soviet Physics Journal*, 1986, vol. 29, pp. 547–551. <https://doi.org/10.1007/BF00895501>
24. Osipov A. I., Uvarov A. V., Stability problems in a nonequilibrium gas, *Physics Uspekhi*, 1996, vol. 39, no. 6, pp. 597–608. <https://doi.org/10.1070/PU1996v039n06ABEH000150>
25. Molevich N. E., Sound velocity dispersion and second viscosity in media with nonequilibrium chemical reactions, *Acoustical Physics*, 2003, vol. 49, no. 2, pp. 189–192. <https://doi.org/10.1134/1.1560381>
26. Zavershinskiy D., Molevich N., Belov S., Riashchikov D., Over stability of acoustic waves in heat-releasing gaseous media, *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2304, issue 1, article id. 020028. <https://doi.org/10.1063/5.0034849>
27. Khrapov S. S., Ivanchenko G. S., Radchenko V. P., Makoveev I. S., Dynamics of Small Perturbations in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 83–105. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.7>

28. Khrapov S. S., Gas-dynamic instabilities in a nonequilibrium chemically active medium, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 26–44.  
<https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2024.1.3>
29. Shchelkin K. I., *Theory of combustion and detonation // Mechanics in the USSR for 50 years*. Moscow: Nauka, 1970, vol. 2, pp. 343–422 [in Russian].
30. Zeldovich Ya. B., Barenblatt G. I., Librovich V. B., Makhviladze G. M., *Mathematical theory of combustion and explosion*. Moscow: Nauka, 1980. 479 p. [in Russian].
31. Millikan R. C., White D. R., Systematics of vibrational relaxation, *The Journal of Chemical Physics*, 1963, vol. 39, no. 12, pp. 3209–3213. <https://doi.org/10.1063/1.1734182>
32. Gordiets B. F., Osipov A. I., Stupochenko E. V., Shelepin L. A., Vibrational relaxation in gases and molecular lasers, *Soviet Physics Uspekhi*, 1973, vol. 15, pp. 759–785.  
<https://doi.org/10.1070/PU1973v015n06ABEH005065>
33. Alemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P., Khudyakov V. A., Kostin V. N., *Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products*, Moscow.: VINITI, USSR Academy of Sciences, 1980, vol. 10, no. 1. [in Russian].
34. Park C., *Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics*, J. Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
35. Kosareva A. A., Nagnibeda E. A., Dissociation and vibrational relaxation in a spatially homogeneous mixture CO<sub>2</sub>/CO/O, *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, no 3, pp. 468–480 [in Russian]. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.315>
36. Kustova E., Oblapenko G., Sharafutdinov I., Vibrational relaxation models for non-equilibrium multi-temperature flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2015, vol. 16, no. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/536/>
37. van Leer B., Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov’s Method, *Journal of Computational Physics*, 1979, vol. 32, no. 1, pp. 101–136.  
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
38. Khoperskov S. A., Vasiliev E. O., Sobolev A. M., Khoperskov A. V., The simulation of molecular clouds formation in the Milky Way, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 428, no. 3, pp. 2311–2320. <https://doi.org/10.1093/mnras/sts195>
39. Harten A., High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no.3, pp. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
40. Harten A., Lax P., van Leer B., On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM review*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35–61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
41. Toro E. F., Spruce M., Speares W., Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver, *Shock Waves*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 25–34. <https://doi.org/10.1007/BF01414629>
42. Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu., *Mathematical issues of numerical solution of hyperbolic systems of equations*. Moscow: FIZMATLIT, 2001. 608 p. [in Russian].
43. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Theoretical Physics: Hydrodynamics*. Moscow: Nauka, 1986, vol. VI. 736 p. [in Russian].
44. Zeldovich Ya. B., Raizer Yu. P., *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. Moscow: Nauka, 1966. 688 p. [in Russian].
45. Galkin V., Losev S. Equations of relaxation gasdynamics, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2008, vol. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-6/articles/288/>
46. Radchenko V., Khrapov S. and Khoperskov V., CAD Model of an Experimental Setup for Studying Acoustic Instability in a Nonequilibrium Chemically Active Medium: Optimization of the Cooling System, 2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2024, pp. 533–538.  
<https://doi.org/10.1109/SUMMA64428.2024.10803831>



47. Khrapov S., Radchenko V. and Khoperskov A., Control of the Spectrum of Unstable Acoustic Waves in a Supersonic Channel of Experimental Setup, 2024 6th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA), Lipetsk, Russian Federation, 2024, pp. 988–992. <https://doi.org/10.1109/SUMMA64428.2024.10803889>

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2024 г.