

# Dispersion of Capillary Waves in Various Liquids during the Coalescence of a Falling Drop in the Impact Mode

S. K. Khairbekov, A. Yu. Ilinykh

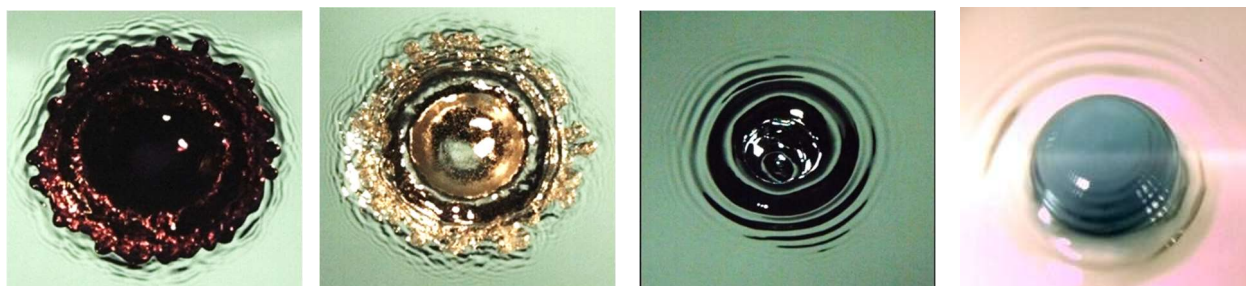
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,  
Moscow, 119526, Russia*

msturistt09@gmail.com, ilynykh@ipmnet.ru

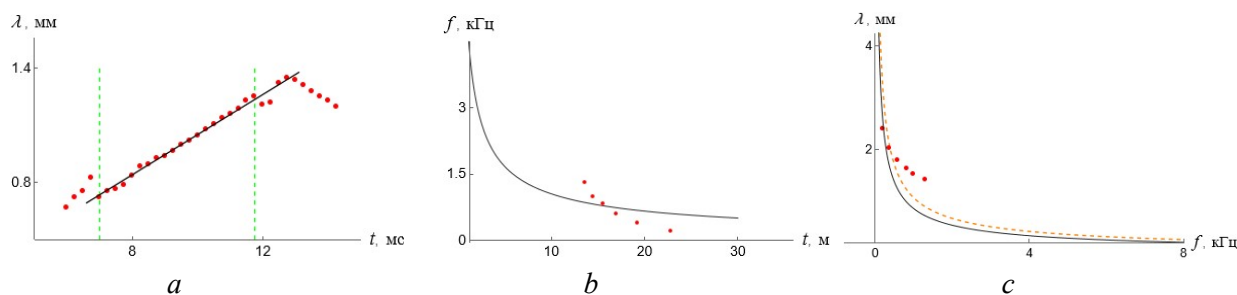
## Abstract

In a series of experiments with a high-speed camera, the evolution of capillary waves excited by the fall of a water drop onto the surface of a molten metal at room and high temperatures was investigated. Based on images obtained in experiments with a high-speed camera, a dispersion relation is constructed for capillary waves on the surface of molten metal and water induced by the merging of a falling drop with the surface of the target liquid. Using spectral analysis and direct measurement methods, approximations of the dependence of the wavelength and frequency of capillary waves on time are first constructed using power functions. Then, the "frequency-wavelength" points are extracted from these dependencies, which are also approximated by a power function. The quality of the selected power dependence is assessed by the degree of closeness of the approximating curve to the theoretical one, as well as by the magnitude of the relative deviation of the experimental power factor from the theoretical one. A qualitative and quantitative comparison of experiments with water and molten metal is performed.

Keywords: capillary waves, drop impact, experiment, wave dispersion



The development of a capillary wave structure when a drop merges with a target liquid of different composition and temperature



(a), (b) – Dependence of the frequency and wavelength of capillary waves on the surface of molten metal on time; (c) – Capillary wave dispersion on a molten metal surface. The dots are experimental data. Lines represent approximations and theoretical curve

УДК 532.5

# Дисперсия капиллярных волн в различных жидкостях при слиянии падающей капли в импактном режиме

Ш. Х. Хайирбеков, А. Ю. Ильиных

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
Россия, Москва, 119526, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1  
msturistt09@gmail.com, ilynykh@ipmnet.ru*

## Аннотация

В рамках серии экспериментов со скоростной камерой исследована эволюция капиллярных волн, возбуждаемых падением капли воды на поверхность расплава металла при комнатной и высокой температурах. На основе полученных в экспериментах изображений построено дисперсионное соотношение для капиллярных волн на поверхности расплава металла и воды. Используя методы спектрального анализа и прямых измерений, с помощью степенных функций сначала строятся аппроксимации зависимости длины волны и частоты капиллярных волн от времени. Затем из этих зависимостей извлекаются точки «частота-длина волны», которые также аппроксимируются степенной функцией. Качество подобранной степенной зависимости оценивается по степени близости аппроксимирующей кривой к теоретической, а также по величине относительного отклонения экспериментального степенного множителя от предсказанного теорией. Выполнено качественное и количественное сравнение опытов с водой и расплавленным металлом.

Ключевые слова: капиллярные волны, импакт капли, эксперимент, дисперсия волн.

## 1. Введение

Капиллярные волны на поверхности жидкости активно исследуются теоретически [1, 2], экспериментально [3, 4], а в последние десятилетия в связи с бурным развитием вычислительной техники – численно [5, 6].

Капиллярные волны имеют широкий спектр приложений в медицинской, нефтехимической, энергетической и других отраслях промышленности. Так, известно, что высокочастотные акустические сигналы могут возбуждать капиллярные волны на поверхности жидкости [7] и капель [8]. И наоборот: наличие коротких возмущений на поверхности жидкости может влиять на распространение звуковых волн. Важное практическое значение капиллярные волны имеют в экологии, где с помощью спутникового зондирования обнаруживают нефтяные пятна и разливы нефти [9]. В последние годы было показано, что капиллярные волны могут вносить значительный вклад в генерацию больших ветровых волн на поверхности морей и океанов [10]. Капиллярные волны, образующиеся в результате схлопывания газовых пузырьков, также составляют почву для исследований [11].

Также в последние десятилетия исследования коротких капиллярных приобретают большую значимость в разработке новых методов доставки лекарств фармакологии [12]. В контексте биомедицинских технологий капиллярно-волновые поля миллиметрового и субмиллиметрового масштаба предлагается использовать для контроля движения микрочастиц в объеме жидкости [13]. Это может иметь решающее значение в таких активно развивающихся отраслях, как 3D-биопечать, электроника, где монослои частиц могут обеспечивать защитные или функциональные покрытия с заданными химическими и электрическими свойствами.

## 2. Параметризация

Физические параметры (индексы обозначают принадлежность параметра:  $a$  – воздуха;  $d$  – капли;  $l$  – принимающей жидкости) включают в себя: плотности  $\rho_{a,l,d}$ ; кинематическую  $\nu_{a,l,d}$  и динамическую вязкости  $\mu_{a,l,d}$ ; полный  $\sigma_l^a, \sigma_d^a, \sigma_l^d$  и нормированный на плотность жидкости  $\gamma_l^a, \gamma_d^a, \gamma_l^d$  коэффициент поверхностного натяжения.

Энергетика импакта капли напрямую влияет на интенсивность и характер образования капиллярных волн. Потенциальная поверхностная энергия (ППЭ) определяется через площадь  $S_d$  капли:  $En_{\sigma,d} = \sigma_d^a S_d$ . Кинетическая – через массу  $M_d$  и скорость капли в момент контакта с принимающей жидкостью  $U$ :  $En_{k,d} = M_d U^2 / 2$ . Соотношение энергий  $R_{En}^{k,\sigma}$  определяет режим слияния капли: при  $En_{k,d} > En_{\sigma,d}$  однозначно устанавливается импактный характер слияния.

Дисперсия волн для линейных систем определяется как зависимость фазовой скорости гармонических волн от частоты (длины волны). Как следствие, изменяются формы произвольных (негармонических) волновых возмущений в процессе их распространения: на больших расстояниях происходит характерное распыливание волновых пакетов.

Традиционное описание дисперсии волн основано на представлении произвольного волнового возмущения в линейных однородных системах в виде совокупности гармонических нормальных волн (1)

$$A = A_0 \exp(i\mathbf{k}x - i\omega t) \quad (1)$$

Циклические частоты  $\omega$  и волновые векторы  $\mathbf{k}$  нормальных волн связаны дисперсионным уравнением  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ ; в изотропных средах  $\omega = \omega(k)$ , где  $k = |\mathbf{k}|$  – волновое число. Дисперсия волн имеет место, если это дисперсионное уравнение не сводится к линейному и однородному. Ключевыми понятиями при анализе дисперсии волн являются фазовые  $v_{ph}$  и групповые  $v_{gr}$  скорости (скорость переноса энергии), которые совпадают лишь при отсутствии дисперсии.

Как правило, энергия коротких волн, обусловленных преимущественно действием поверхностного натяжения, локализована в тонком слое жидкости порядка нескольких  $\lambda$ , поэтому их можно классифицировать как волны на глубокой воде [14]. Более того, принимая жидкость однородной и несжимаемой (что эквивалентно бесконечной скорости звука  $c_s$ ), дисперсионное соотношение для гравитационно-капиллярных волн примет вид [15]

$$\omega^2 = k \left( R_\rho g + \frac{\sigma_l^a}{\rho_l + \rho_a} k^2 \right), \quad (2)$$

где  $R_\rho = \frac{\rho_l - \rho_a}{\rho_l + \rho_a}$  – число Атвуда.

Для коротких волн (больших  $k$ ) первым слагаемым в выражении (2) можно пренебречь. В качестве количественного критериального параметра обычно рассматривают критическую длину волны (3) такую, что фазовая скорость гравитационно-капиллярных волн как функция длины волны (или волнового числа) имеет минимум [15]

$$\lambda_{cr} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma_l^a}{(\rho_l - \rho_a)g}} \quad (3)$$

Значение этой длины волны  $\lambda_{cr}$  для воды составляет 1.714 см при минимальной фазовой скорости  $v_{ph}$  волны 23.14 см/с; для галинстана – 2.038 см при скорости 25.2 см/с. Средние длины волн, получаемых в опыте, примерно на порядок меньше указанных критических значений. Таким образом можно сделать вывод, что для наблюдаемых в эксперименте капиллярных волн преобладают силы поверхностного натяжения.

Окончательно пренебрегая плотностью воздуха и представляя выражение (2) как зависимость длины волны от частоты  $f$

$$\lambda = \left( \frac{2\pi\sigma}{\rho} \frac{1}{f^2} \right)^{1/3} \quad (4)$$

Исследование дисперсионных свойств капиллярных волн на поверхности принимающей жидкости, возбуждаемых импактом капли, будут проводиться на основе выражения (4).

### 3. Экспериментальная установка

Опыты выполнены на доработанном стенде для изучения тонкой структуры быстропротекающих процессов (ТСТ), входящем в состав Уникальной исследовательской установки УИУ «ГФК ИПМех РАН» [16]. Картины слияния капли с принимающей жидкостью и последующего волнообразования регистрировались скоростной видеокамерой Optronis CR 300  $\times$  2 или фотоаппаратом Canon EOS 350D. Наблюдение свободной поверхности осуществлялось под углом  $\vartheta = 70^\circ$ . Длительность экспозиции составляла 200 мкс, скорость съемки – 4000 к/с.

В опытах использовался сплав галлия, индия и олова – «Галинстан» с коэффициентом поверхностного натяжения на границе с воздухом  $\sigma_l^a = 670 \text{ г/с}^2$  [17] и плотностью  $\rho_l = 6.492 \text{ г/см}^3$ , а также дегазированная водопроводная вода, для которой приняты стандартные характеристики коэффициента поверхностного натяжения и плотности при  $20^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 73 \text{ г/с}^2$ ,  $\rho_l = 1.0 \text{ г/см}^3$ ). Принимающая жидкость находится в кювете  $10 \times 10 \times 8 \text{ см}^3$ . Вещество капли первых двух серий опытов представляет собой водный раствор чернил в соотношении 1:1000.

Первые две серии опытов посвящены качественному анализу динамики капиллярных волн на поверхности металлического расплава. Волны инициируются падением одиночной водяной капли, а эксперименты проводятся при двух температурах расплава  $T = 20^\circ\text{C}$  и  $T = 110^\circ\text{C}$  (температура плавления галинстана составляет  $19^\circ\text{C}$ ).

Дисперсия капиллярных волн исследовалась в третьей и четвертой сериях опытов, где капля и принимающая жидкость состоят из одних и тех же веществ (расплава металла и воды соответственно) при  $T = 20^\circ\text{C}$

Отношение характерной длины волны  $\lambda$  к глубине жидкости  $H$  в эксперименте составляет  $\sim 10^{-2}$ . Данное значение является достаточным основанием для того, чтобы рассматривать наблюдаемые волны как капиллярные волны на глубокой воде.

Ко всем представленным в работе фотографиям применена коррекция яркости и контрастности с их увеличением, за исключением специально оговоренных случаев.

### 4. Основные результаты

#### 4.1. Качественный анализ эволюции капиллярных волн и распределения вещества капли при ее падении на поверхность расплава металла различной температуры

На рис. 1 представлена эволюция распределения вещества водяной капли, представляющая собой 1 % раствор перманганата калия ( $KMnO_4$ ) после падения в расплав галинстана ( $InGaSn$ ) при температуре  $T = 20^\circ\text{C}$  с высоты  $H = 60 \text{ см}$ .

Капля в момент первичного контакта все еще сохраняет округлую форму, ее диаметр  $D$  составляет 4.8 мм.

При первом касании капли поверхности расплава за счет быстрой конверсии потенциальной поверхностной энергии (ППЭ) образуется игольчатая осесимметричная структура (рис. 1, а) с характерной толщиной  $0.15 \div 0.25 \text{ мм}$ . На более ранних кадрах структура имеет значительно меньшую толщину, значение которой меньше пространственного разрешения фотоматрицы (калибровка изображения составляет 0.05 мм на 1 пиксель).



К моменту времени  $t = 0.75$  мс (рис. 1, *b*) и далее в результате действия сил поверхностного натяжения «иглы» начинают сглаживаться, образуя сначала тонкие выступы или шипы (рис. 1, *c*), а затем и широкие петли (рис. 1, *d-g*). От границы контакта капли с поверхностью расплава выбрасывается тонкий стример (рис. 1, *b*), толщина которого  $\sim 0.1$  мм; к моменту времени  $t = 1.25$  мс стример достигает верхней границы кадра (рис. 1, *c*).

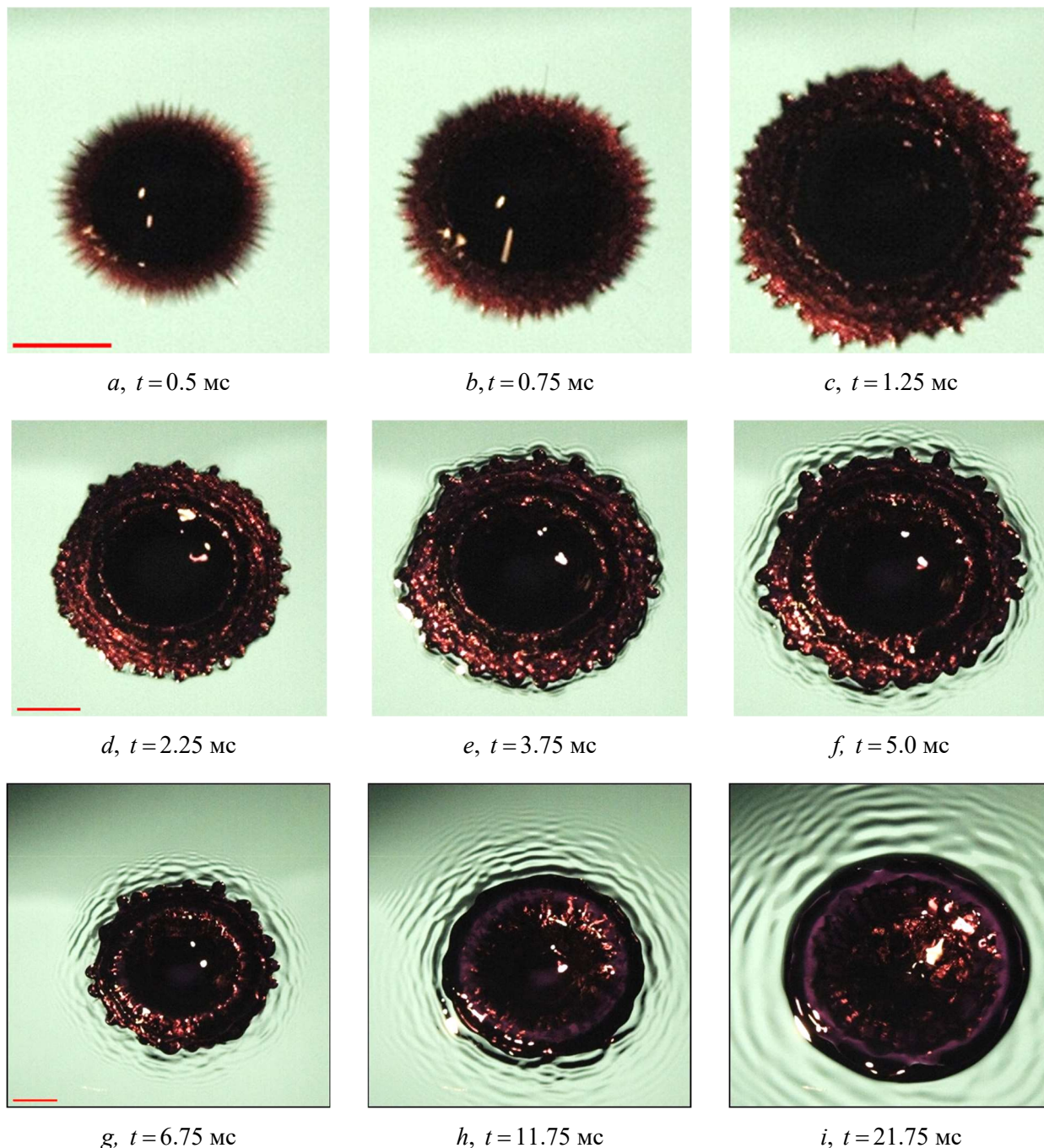


Рис. 1. Формирование капиллярных волн на различных этапах растекания капли раствора перманганата калия после ее падения в расплав галинстана при комнатной температуре.

Длина маркера – 4 мм. Диаметр капли  $D = 4.8$  мм, контактная скорость  $U = 343$  см/с. Угол визирования –  $70^\circ$ .  $En_{\sigma,d} = 5.284$  мкДж;  $En_{k,d} = 340.83$  мкДж;  $R_{En}^{k,\sigma} = 64.5$

Первые капиллярные волны начинают образовываться вокруг некоторых выступов уже к  $t = 2.25$  мс (рис. 1, *d*). К моменту времени  $t = 5.0$  мс (рис. 1, *f*) капиллярные волны начинают наблюдаться по всему периметру вокруг венца и на удалении от него, образуя подобие коль-

цевых капиллярных волн с характерной длиной волны  $\lambda = 0.4 \div 0.6$  мм. Однако ввиду того, что их источником являются неравномерно расположенные выступы, цуг волн имеет также ярко выраженную аксиально несимметричную структуру.

Форму, близкой к кольцевой, цуг капиллярных волн приобретает лишь на поздних временах при  $t > 20$  мс, когда венец полностью сглаживается (рис. 1, *i*).

Таким образом, аксиальная симметрия, наблюдаемая на начальной стадии импакта, с течением времени нарушается, формируя неоднородную картину распределения вещества. Приближенная симметрия восстанавливается лишь на поздних стадиях процесса при  $t > 10$  мс. Аналогичную динамику демонстрирует и цуг капиллярных волн, генерируемый растущей каверной.

Абсциссы максимумов спектра, построенного на основе данных вариации освещенности при  $t = 1$  мс (рис. 2, *c*), составляют 0.392, 0.502, 0.632, 0.711 мм. При  $t = 2.25$  мс (рис. 2, *f*) имеются 3 выраженных пика, соответствующие характерным ширинам выступов 0.599, 0.776 и 0.913 мм. Максимальные амплитуды на спектре на рис. 2, *i* соответствуют абсциссам 0.815, 0.908, 1.119 и 1.267 мм. Указанные значения согласуются со значениями ширины петель, полученных посредством прямых измерений с осреднением.

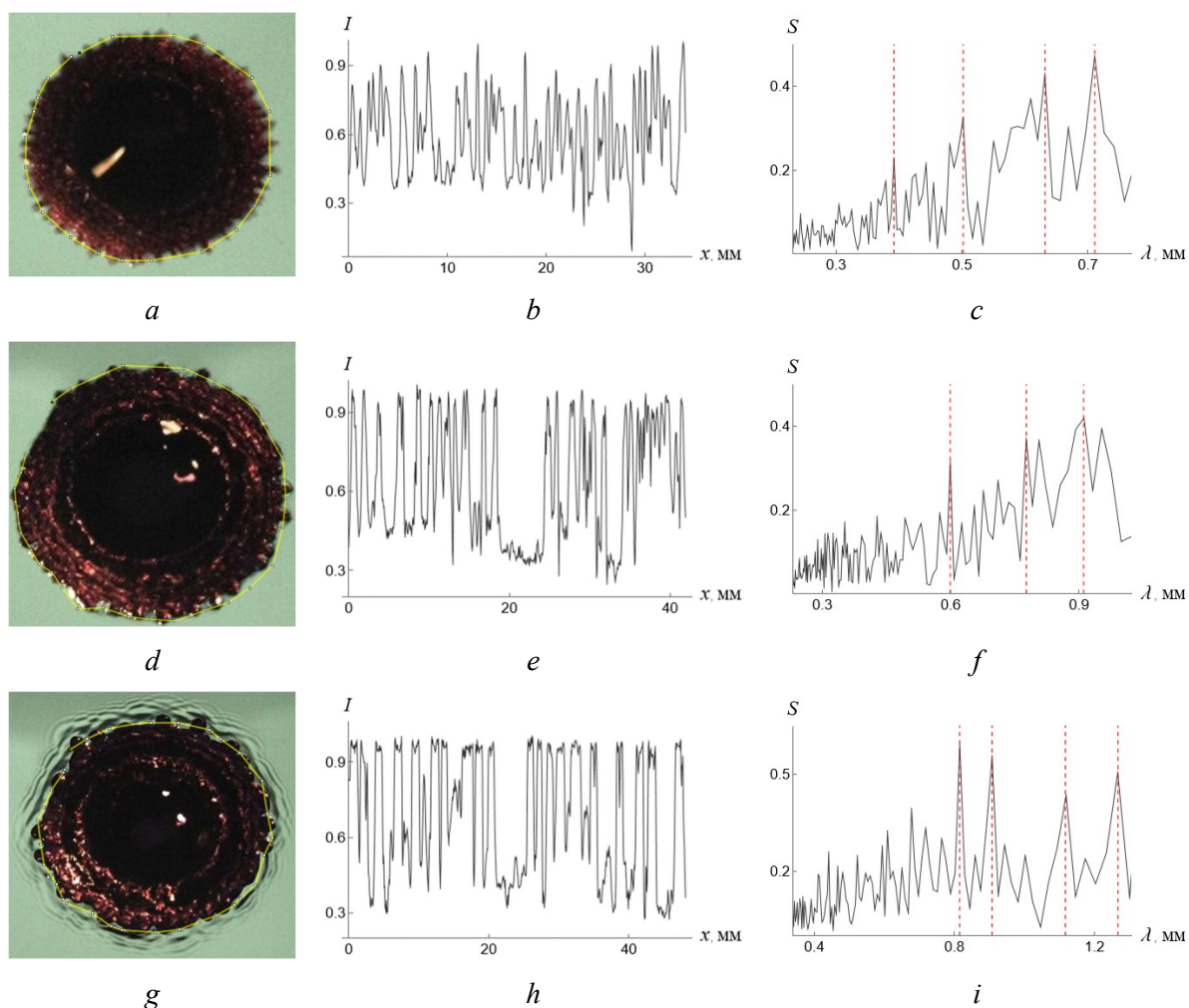


Рис. 2. *a, d, g* – распределение вещества чернильной капли при  $t = 1.0$ ,  $t = 2.25$  и  $t = 5.0$  мс с ломаными для замера освещенности; *b, e, h* – распределение относительной освещенности; *c, f, i* – пространственный спектр. Штриховыми линиями показаны длины волн, соответствующими максимальным значениям спектра (контрастность и яркость – без изменений)

Из рис. 2, *c, f, i* видно, что со временем (на более поздних стадиях импакта) значительная часть энергии спектра смещается в область больших значений аргумента спектра, что соответствует наблюдаемому увеличению средней ширины выступов.



На рис. 3 представлена эволюция распределения вещества капли диаметром  $D = 4.8$  мм, свободно падающая с высоты  $H = 60$  см в расплав галинстана ( $InGaSn$ ) при температуре  $T = 110^\circ\text{C}$ .

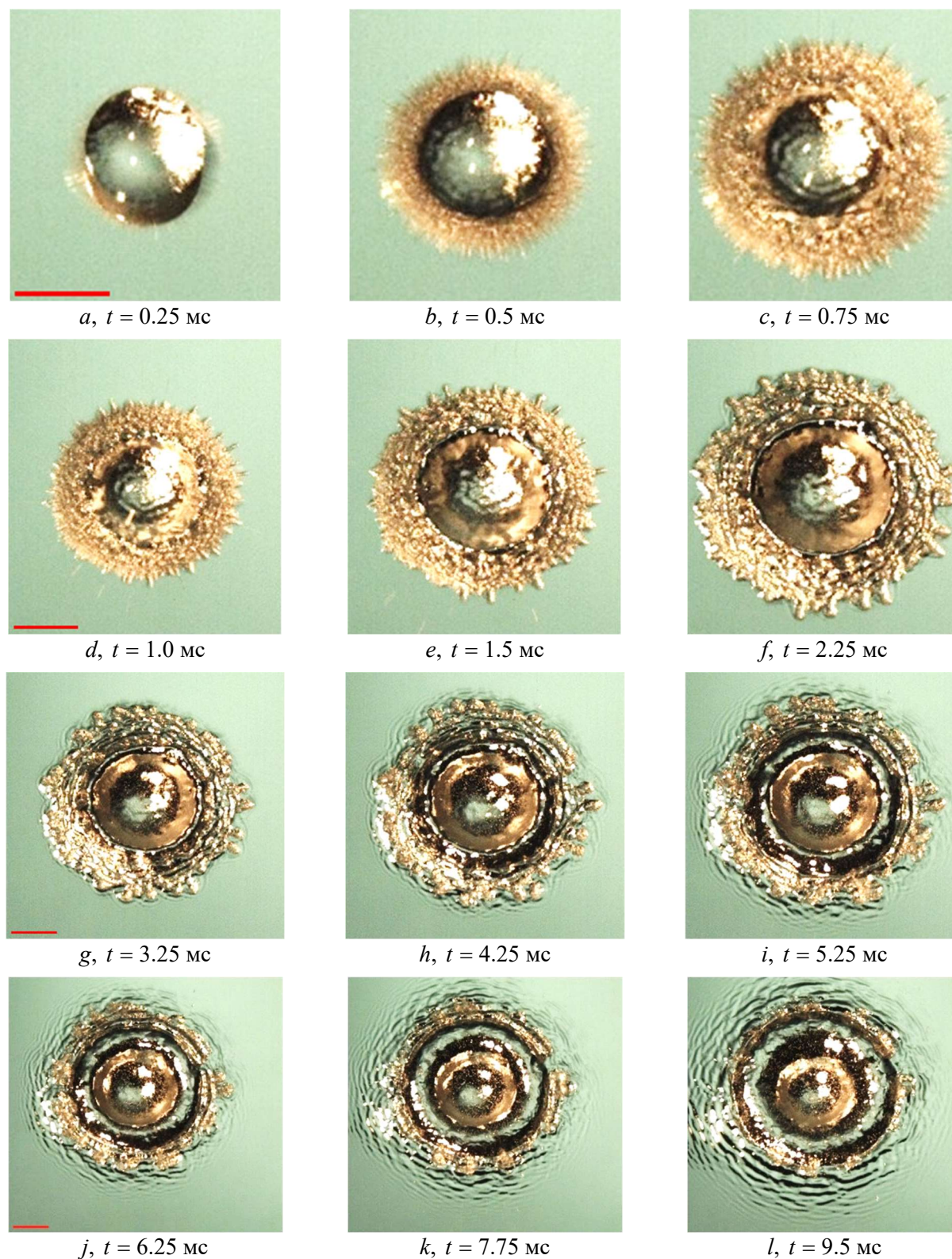


Рис. 3. Формирование капиллярных волн на различных этапах растекания чернильной капли, свободно падающей в нагретый до высокой температуры расплав галинстана. Длина маркера – 4 мм. Диаметр капли  $D = 4.8$  мм, контактная скорость  $U = 343$  см/с. Угол визирования –  $70^\circ$ .  $En_{\sigma,d} = 5.284$  мкДж;  $En_{k,d} = 340.83$  мкДж;  $R_{En}^{k,\sigma} = 64.5$

На начальной стадии растекания капли по поверхности высокотемпературного расплава (рис. 3, *a-f*) наблюдаются те же компоненты течений, что и представлены на рис. 1. Морфометрия выступов и петель демонстрирует сопоставимые с рис. 1 значения. Временные параметры генерации коротких капиллярных волн вблизи выступов и более длинных волн по периметру венца соответствуют параметрам, зафиксированным для холодного расплава.

Однако высокая температура расплава приводит к нарушению пространственной однородности распределения чернил в радиальном направлении уже при  $t \sim 5$  мс. Вдоль периметра венца фиксируются устойчивые неоднородности, а капиллярные волны сохраняют асимметричную в окружном направлении структуру даже при  $t > 10$  мс.

#### 4.2. Анализ волновых возмущений поверхности расплава металла

Серия фотографий, иллюстрирующих эволюцию поверхности расплава галинстана вследствие падения капли показана на рис. 4. В данной работе на всех изображениях настройки яркости и контрастности отредактированы в сторону увеличения. Для измерений и обработки полученные с видекамеры цветные фотографии (рис. 5, *a*) конвертированы в 8-битные (рис. 5, *b*) содержащие всего 256 уровней серого, где 0 самый темный, а 255 – самый яркий пиксель (конвертация выполнена с равными весами для красного, синего и зеленого оттенков). Замер освещенности производится перпендикулярно фронту волновых возмущений (наклонный отрезок на рис. 5, *b*). В связи с движением границы каверны и ростом волнового пакета длина измерительного отрезка  $L$  варьируется.

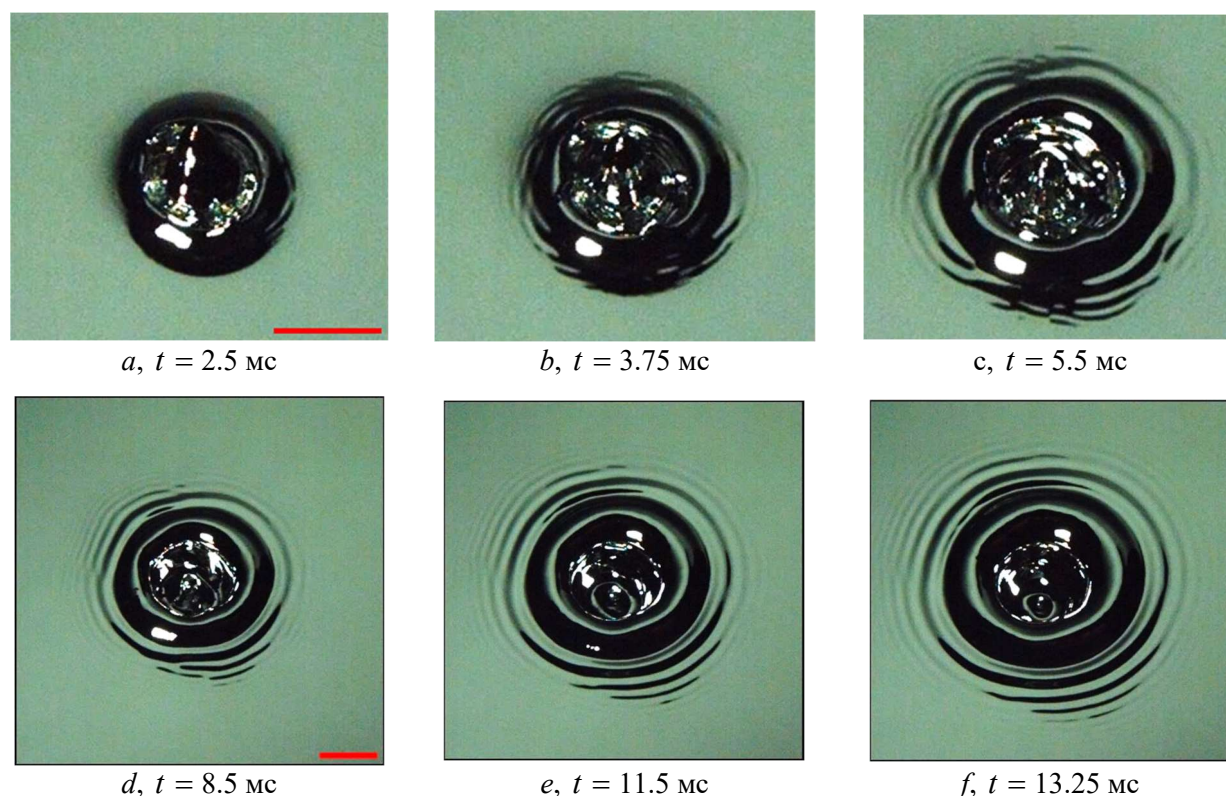


Рис. 4. Серия фотографий, иллюстрирующая эволюцию капиллярных волн на поверхности расплава металла после падения металлической капли. Длина маркера – 5 мм. Диаметр капли  $D = 4.0$  мм,  $H = 5$  см контактная скорость  $U = 99$  см/с. Угол визирования -  $60^\circ$ ;  $En_{\sigma,d} = 33.68$  мкДж;  $En_{k,d} = 106.71$  мкДж;  $R_{En}^{k,\sigma} = 3.17$

С изображений также удален шум. Для подбора подходящего фильтра выполнено измерение освещенности вдоль горизонтальной линии на рис. 5, *b*, проанализирована его природа с оценкой отношения «сигнал-шум» [18].



В эксперименте исследуется распространение цуга капиллярных волн, формирующегося за венцом каверны и состоящего из 6–8 волн. На ранних этапах импакта и роста каверны наблюдается ярко выраженная аксиальная неоднородность ее границы. Вследствие этого, капиллярные волны приобретают вид «классических» кольцевых коротких волн лишь на поздних стадиях импакта (после  $t \sim 10$  мс).

Для построения дисперсионного соотношения на основе данных эксперимента необходимо определить, как меняется длина волны (волновое число) и частота (период) основной моды волнового пакета по времени.

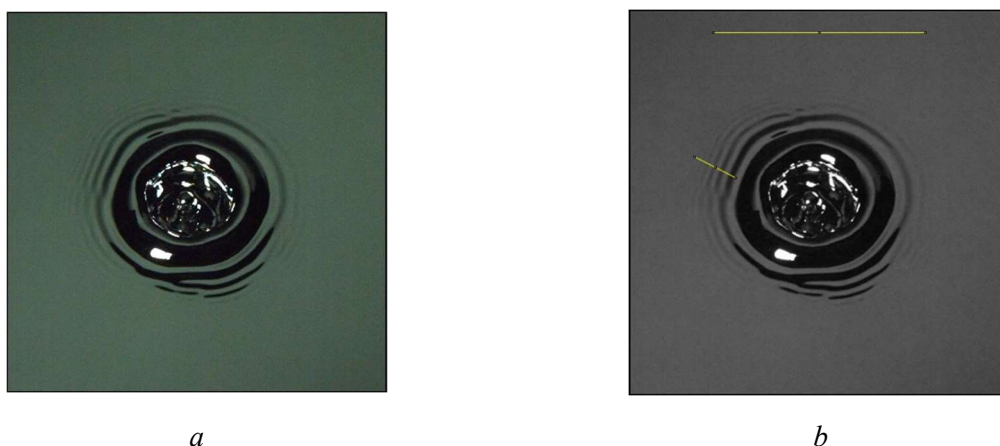


Рис. 5. Фотография расплава галлистана после импакта капли с образованием капиллярных волн. *a* – исходное цветное изображение, *b* – его 8-битная версия с линиями для замера уровней серого. Яркость и контрастность – без изменений

Длина волны определяется на основе спектра дискретного преобразования Фурье, половина которого (в силу эрмитовой симметрии) показана на рис. 6, *c, f* для двух моментов времени. Для корректной оценки спектральных характеристик из графика освещенности (рис. 6, *a, d*) удален тренд (в качестве аппроксимирующей кривой выбран полином второго порядка).

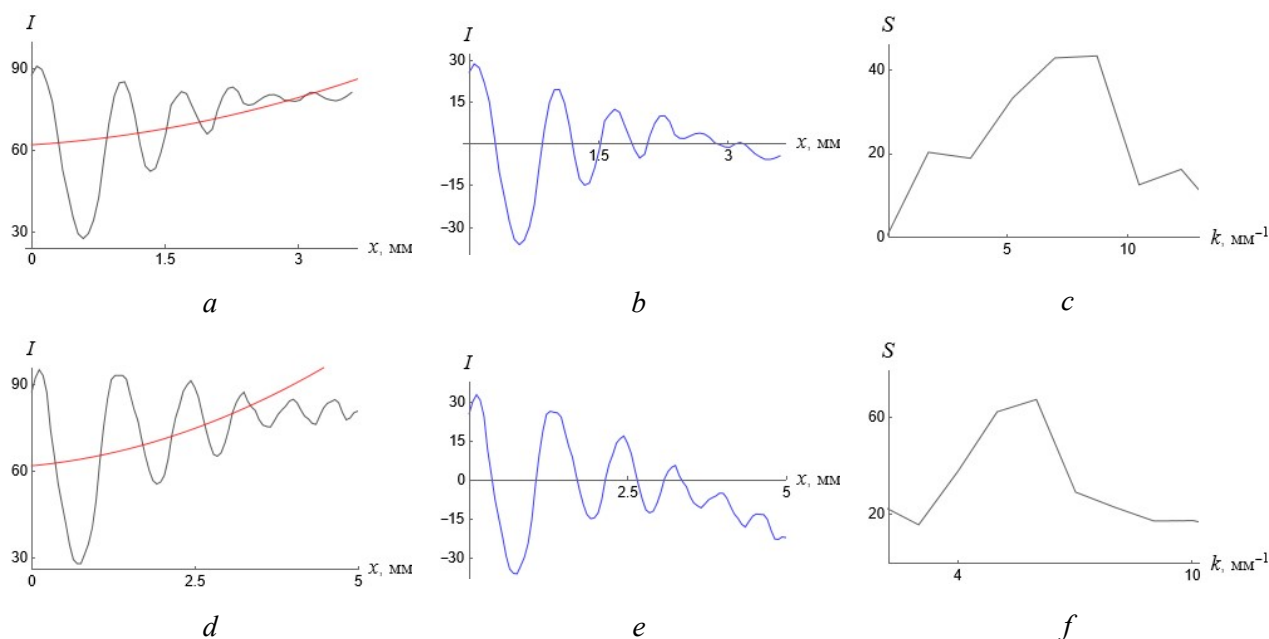


Рис. 6. *a* – распределение относительной освещенности  $I$  (черная линия) с квадратичным трендом (красная линия) при  $t = 7$  мс; *b* – график вариации освещенности с удаленным трендом; *c* – его пространственный спектр  $S$  по волновым числам; *d, e, f* – то же для  $t = 11.75$  мс

Отложив абсциссу максимального значения спектра для всех моментов времени в исследуемом интервале, можно получить временную зависимость длины волны (рис. 7). Видно, что она имеет явно линейный характер, поэтому экспериментальные точки аппроксимированы линейной функцией  $\lambda = 0.1051 \cdot t$ . Измеренные длины волн лежат в диапазоне  $0.72 \div 1.253$  мм.

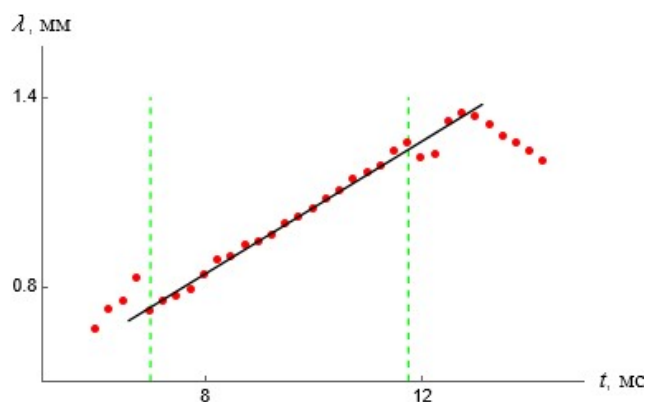


Рис. 7. Зависимость длины волны основной гармоники капиллярных волн на поверхности расплава металла от времени (точки) и ее аппроксимация (черная линия); штриховыми линиями показан промежуток времени, по которому строится аппроксимация

Далее анализируется изменение освещенности в точке свободной поверхности галinstана, через которую проходит волновой пакет (рис. 8). Красными точками показаны локальные минимумы (соответствуют гребням волн) кривой, для сглаживания которой использовался квадратичный интерполяционный многочлен. Изменение частоты основной моды волнового пакета определяется для моментов времени, находящихся в серединах отрезков между пунктирными линиями и перпендикулярные им; для нахождения самих частот длины соответствующих отрезков возведены в минус первую степень.

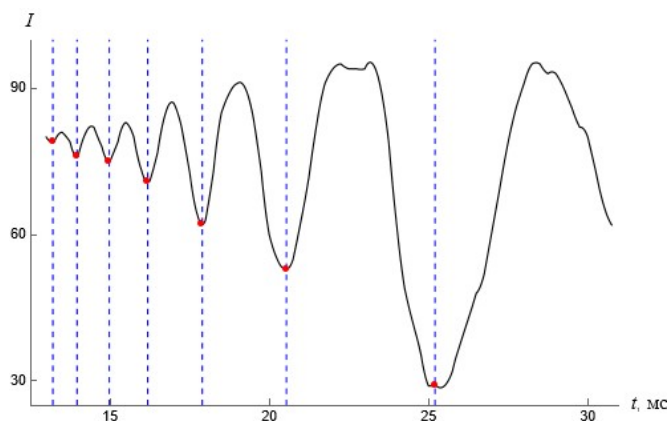


Рис. 8. Зависимость от времени вариаций освещенности в точке свободной поверхности расплава металла после прохождения цуга волн (точками показаны локальные минимумы)

График изменения частоты осцилляций освещенности по времени представлен на рис. 9. Красными точками показаны экспериментальные данные, а сплошной линией — аппроксимирующая функция  $f = 4.896 \cdot t^{-2/3}$ . Найденные частотные точки находятся в диапазоне  $0.215 \div 1.315$  кГц.

Так как в результате импакта капли волновой пакет получается относительно узким, время его наблюдения достаточно мало, вследствие чего количество частотных точек также невелико. Однако нелинейный спад частоты по времени на рис. 8 и 9 налицо.

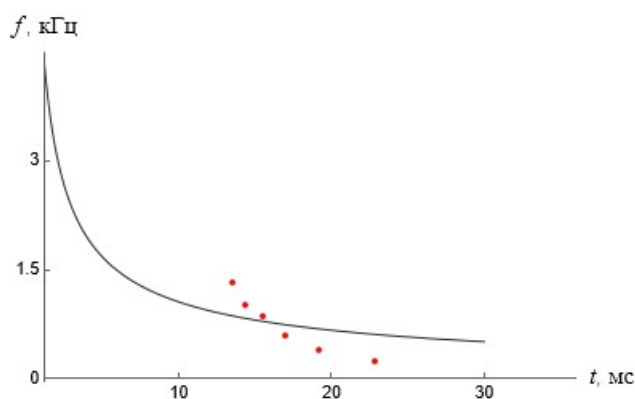


Рис. 9. Зависимость от времени частоты основной моды цуга капиллярных волн на поверхности расплава металла

График аппроксимации дисперсионного соотношения представлен на рис. 10. Для его построения на плоскость « $f - \lambda$ » нанесены точки, представляющие собой пары значений «частота-длина волны»: соответствующие времена из частотных точек « $f - t$ » (рис. 9) подставлялись в аппроксимацию для изменения длины волны. Полученные точки аппроксимированы функцией  $\lambda = 1.074 \cdot f^{-2/3}$ . Теоретическое дисперсионное соотношение (6) после подстановки значений коэффициента поверхностного натяжения и плотности для галинстана (с переводом соответствующих размерностей в мм и мс) выглядит следующим образом:  $\lambda = 0.866 f^{-2/3}$ . Сравнение множителей в правой части двух последних выражений дает относительную погрешность 24 %, при этом аппроксимирующая и теоретическая кривые достаточно близки. Наиболее удаленные от теоретической кривой точки на графике имеют меньшую длину волны и могут находиться в промежуточной зоне еще не установившегося волнового пакета (зоне Френеля).

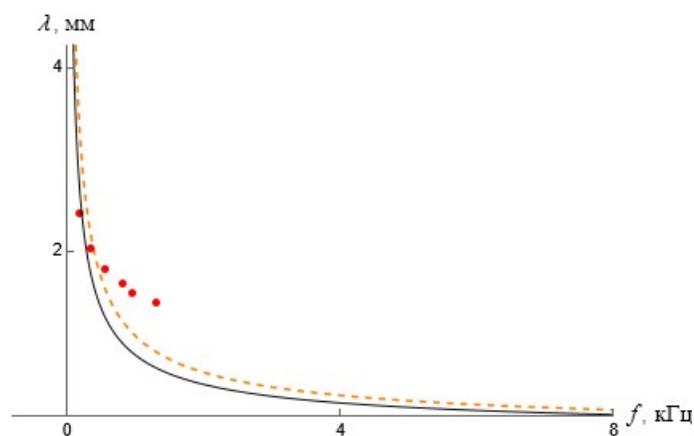


Рис. 10. Дисперсия капиллярных волн на поверхности расплава металла. Точки – пары «частота-длина волны», полученные из эксперимента. Штриховая кривая – аппроксимация. Черная сплошная линия – теоретическая кривая

#### 4.3. Анализ волновых возмущений поверхности воды

На рис. 11 показаны характерные фазы распространения волнового пакета вследствие падения капли воды  $D = 4.3$  мм в воду с высоты  $H = 1$  см. Капиллярные волны на рис. 11 начиная с самых первых кадров имеют характерную осесимметричную структуру на всей длительности наблюдения. Это обстоятельство качественно отличает их от волн на поверхности расплава металла.



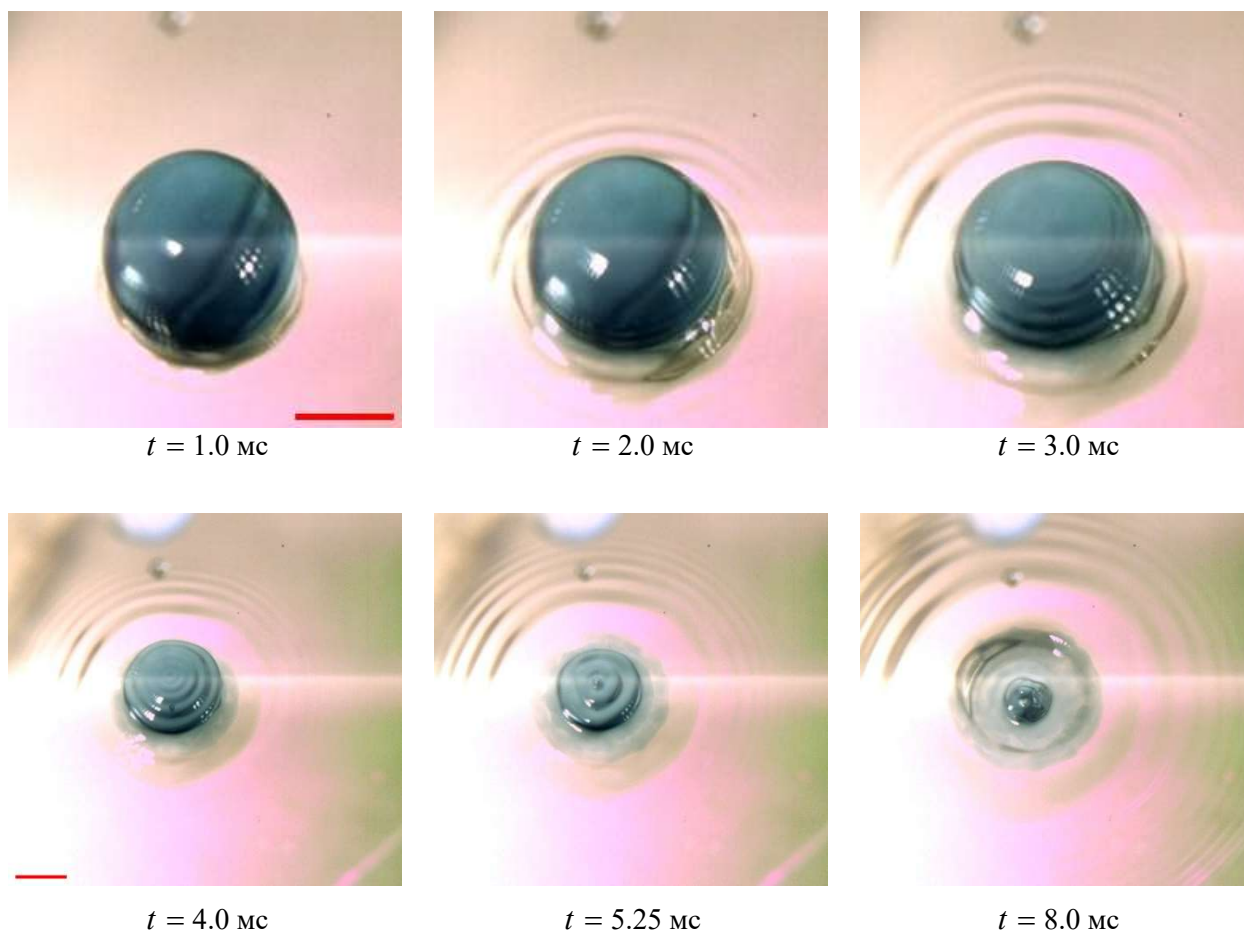


Рис. 11. Эволюция пакета капиллярных волн после слияния капельки чернил с дистиллированной водой. Яркость и контрастность – без изменений. Диаметр капли  $D = 4.3$  мм,  $H = 1$  см контактная скорость  $U = 44.3$  см/с. Угол визирования –  $65^\circ$ ;  $En_{\sigma,d} = 4.24$  мкДж;  $En_{k,d} = 4.084$  мкДж;  $R_{En}^{k,\sigma} = 0.963$ ; Маркер – 2 мм

Далее проведен анализ, аналогично разделу 4.2.

Зависимость длины волны от времени, показанная на рис. 12, имеет вид  $\lambda = 0.1466 \cdot t$ . Измеренные длины волн лежат в диапазоне  $0.523 \div 0.968$  мм. Видно, что на одних и тех же временах после импакта характерная длина волны на поверхности воды в  $\sim 1.5$  раза больше, чем на поверхности галинстана.

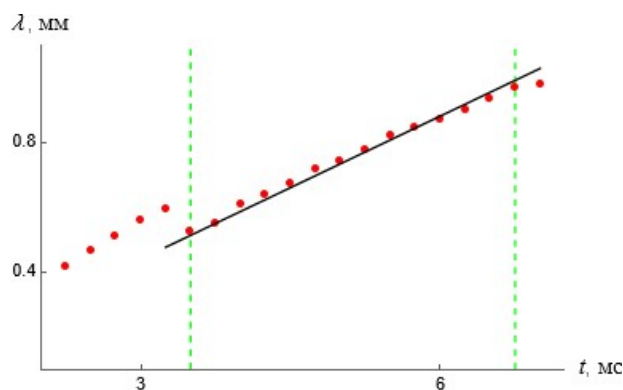


Рис. 12. Зависимость длины волны основной гармоники капиллярных волн на поверхности воды от времени (точки) и ее аппроксимация (черная линия); штриховыми линиями показан промежуток времени, по которому строится аппроксимация

Изменение освещенности в точке свободной поверхности воды, через которую проходит волновой пакет, показано на рис. 13, *a*. При этом зависимость частоты осцилляций от времени имеет вид  $f = 4.558 \cdot t^{-2/3}$  (рис. 13, *b*). Найденные частотные точки находятся в диапазоне  $0.17 \div 2.0$  кГц.

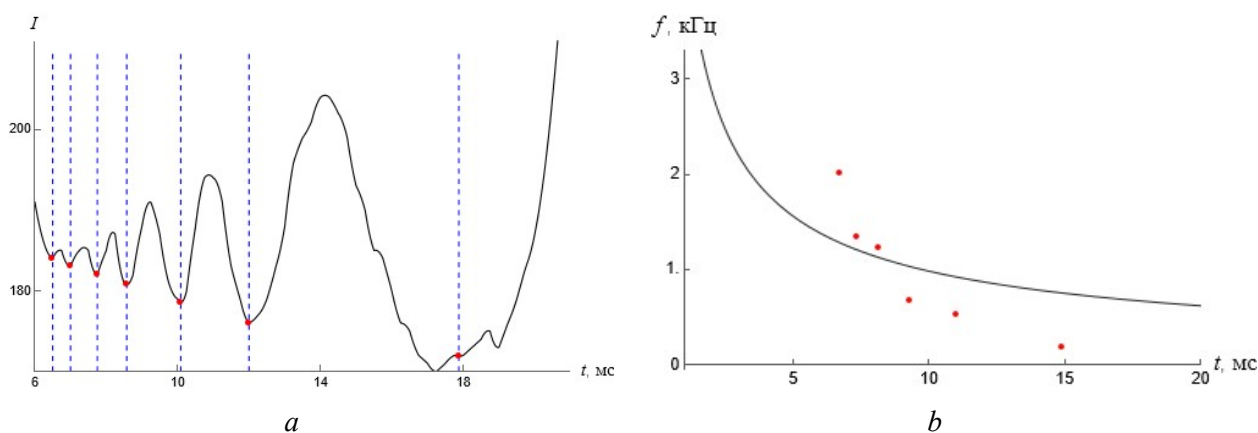


Рис. 13. *a* – зависимость от времени вариаций освещенности в точке свободной поверхности воды после прохождения цуга волн (точками показаны локальные минимумы); *b* – зависимость от времени частоты основной моды цуга капиллярных волн

График аппроксимации дисперсионного соотношения представлен на рис. 14. Полученные точки аппроксимированы функцией  $\lambda = 0.845 \cdot f^{-2/3}$ . Теоретическое дисперсионное соотношение (6) после подстановки значений коэффициента поверхностного натяжения и плотности для воды имеет вид:  $\lambda = 0.771 f^{-2/3}$ . Сравнение множителей в правой части двух последних выражений дает относительную погрешность 9.6 %.

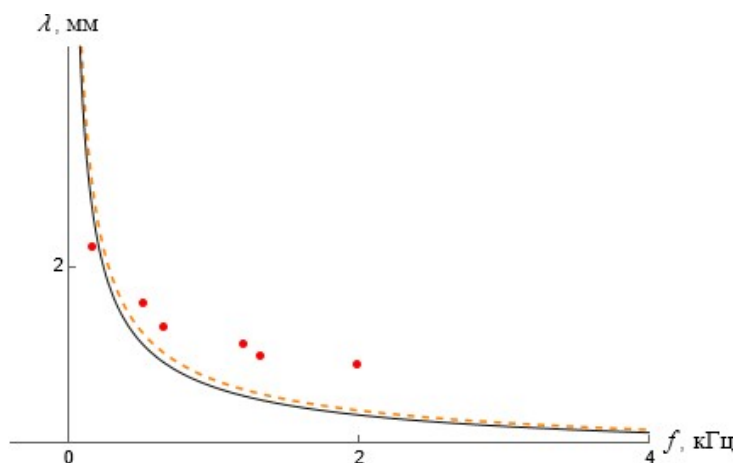


Рис. 14. Дисперсия капиллярных волн на поверхности воды. Точки – пары «частота-длина волны», полученные из эксперимента. Штриховая кривая – аппроксимация. Черная сплошная линия – теоретическая кривая

## 5. Обсуждение результатов

Погрешность спектрального метода на ранних и поздних временах и, как следствие, выбор относительно узкого интервала длин волн для построения аппроксимации можно обосновать следующим образом.

При использовании дискретного преобразования Фурье длина волны  $\lambda \sim L/j$ , где  $L$  – длина отрезка, вдоль которой производится замер освещенности,  $j$  – номер отсчета (пикселя).

К моменту времени  $t \sim 13$  мс (см. рис. 1, *f*) пуг волн достигает границы кадра, что приводит к заметному искажению длины волны ввиду сокращения длины линии  $L$ .

В эксперименте фактически наблюдаются волны, близкие к цилиндрическим, которые в дальней зоне (при  $kr \gg 1$ ) удовлетворяют функциям Ханкеля  $u(r, t) \sim \frac{A}{\sqrt{r}} \exp[i(\omega t - kr)]$ , а не выражению (1). В промежуточной области  $kr \sim 1$  (зона Френеля) нельзя однозначно выделить амплитуду и фазу волны. В этой зоне даже в среде без дисперсии происходит сильная деформация волнового пакета ввиду прихода волновых возмущений от разных источников вдоль границы каверны. Так, в момент времени  $t \sim 6$  мс (см. рис. 1, *b, c*), характерная длина волны  $\lambda \sim 0.6$  мм при длине измерительного отрезка  $L \sim 2.2$  мм (начальная точка измерительного отрезка примерно совпадает с границей венца), что всего в 3.6 раз больше длины волны.

При  $t \sim 12$  мс (см. рис. 1, *e, f*), когда волновой пакет уже практически полностью сформирован, отношение  $L/\lambda \sim 10$  и погрешность измерения значительно снижена. Здесь волны сильнее «напоминают» кольцевые капиллярные волны, возникающие вокруг возмущения. На этих и более поздних временах можно утверждать, что волны находятся в дальней зоне и могут рассматриваться как плоские.

Погрешность измерения на ранних временах связана с тем, что цилиндрические волны нестационарны в принципе: удаляясь от границы каверны (венца), они оставляют за собой «шлейф», который можно интерпретировать как результат прихода волновых возмущений к точке наблюдения от все более и более удаленных источников на границе растущей каверны.

Функции Бесселя (Ханкеля) являются каноническими решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{r^2 d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{r d\varphi}{dr} + (r^2 - \alpha^2) \varphi = 0,$$

где  $\alpha$  – порядок уравнения.

Функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка обозначается как  $J_0(r)$ .

На рис. 15, *a* изображен дискретный Фурье-спектр  $J_0(r)$ , на рис. 15, *b* – спектр функции  $\cos(r)$ . Показана лишь половина спектра в виду эрмитовой симметрии преобразования.

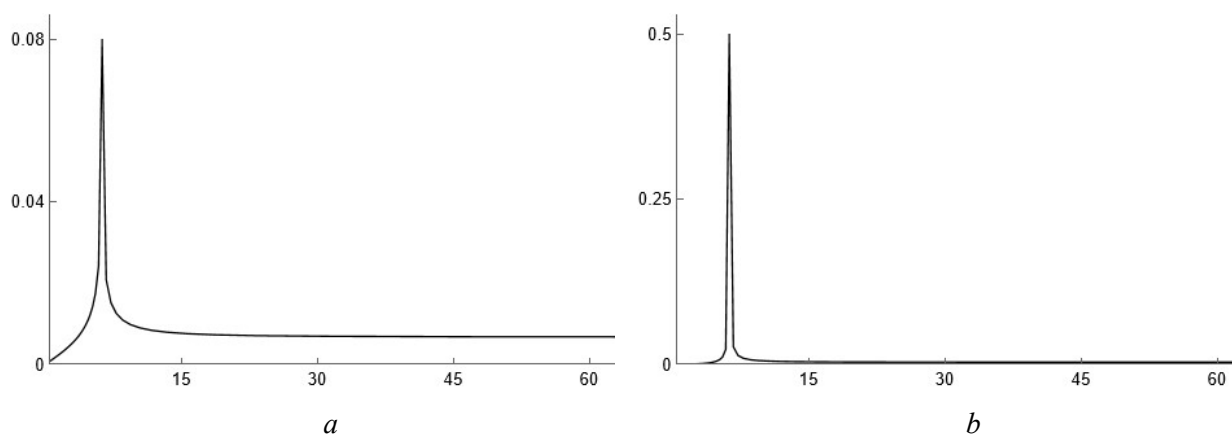


Рис. 15. *a* – спектр функции  $J_0(r)$ ; *b* – спектр косинусоиды  $\cos(r)$

Из рис. 15 видно, что спектр функции Бесселя демонстрирует широкополосное плавное распределение по частотам и имеет длинный медленно спадающий «хвост», в отличие от чистой косинусоиды, спектр которой сводится к четко выраженной спектральной линии. Это отражает сложную нестационарную природу цилиндрической волны, в формировании которой участвуют волны, приходящие с разных направлений (ввиду радиальной симметрии), что приводит к интерференции и «размытию» спектра.



Можно обратить внимание и на фундаментальное ограничение спектрального метода, обусловленное несоответствием теоретических предпосылок и реальных данных распределения освещенности. В теоретическом случае, при бесконечной частоте дискретизации и неограниченной длине выборки  $L \rightarrow \infty$ , дискретное преобразование Фурье для сигнала в виде чистой гармоник вырождается в дельта-функцию. Однако на практике, особенно в областях с максимальными градиентами, распределение яркости волнового фронта описывается сложными функциями, существенно отличающимися от гармонических.

## 6. Заключение

Проведен качественный и количественный анализ роста шипообразных структур и сопутствующих капиллярных волн, возбуждаемых падением капли водного раствора чернил на поверхность расплава металла при комнатной и высокой температурах. Установлено, что высокая температура приводит к сохранению на больших временах неоднородной структуры распределения вещества капли в радиальном направлении и к асимметричной картине кольцевых капиллярных волн в окружном направлении.

Для двух опытов с различными жидкостями было выполнено сравнение дисперсионного соотношения, получаемого в эксперименте, с теоретическим. Полученные результаты говорят об удовлетворительной согласованности эксперимента и теории капиллярных волн идеальной жидкости. Были проанализированы наблюдаемые явления и погрешности примененной методики.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

## Литература

1. Chashechkin Yu. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. Vol. 10. No. 4. P. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
2. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
3. Wout M. Goesaert, Paul S. W. M. Logman. Easy method to establish the dispersion relation of capillary waves on water jets // *Am. J. Phys.* 2024. Vol. 92, Iss. 2. Pp. 93–99. <https://doi.org/10.1119/5.0144849>
4. Чашечкин Ю. Д., Прохоров В. Е. Гидродинамика удара капли: короткие волны на поверхности венца // *Докл. РАН*. 2013. Т. 451. № 1 С. 41–45. <https://doi.org/10.7868/s0869565213190109>
5. Иванцов А. О., Любимова Т. П., Воробьев А. М. Численное моделирование эволюции гравитационных и капиллярных волн в системе двух слабосмешивающихся жидкостей // *Материалы международного симпозиума «Неравновесные процессы в сплошных средах»*. 2017. Т. 1, С. 194–197. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32178104>
6. Van der Eijk M., & Wellens P. R. A compressible two-phase flow model for pressure oscillations in air entrapments following green water impact events on ships // *International Shipbuilding Progress*. 2020. Vol. 66, Issue 4. Pp. 315–343. DOI: 10.3233/isp-200278
7. Tan M. K., Friend J. R., Matar O. K., Yeo L. Y. Capillary wave motion excited by high frequency surface acoustic waves // *Physics of Fluids*, 2010. Vol. 22. Issue 11 (112112). DOI: 10.1063/1.3505044
8. Zhang S, Orosco J, Friend J. Onset of Visible Capillary Waves from High-Frequency Acoustic Excitation // *Langmuir*. 2023. Vol. 39. No. 10. Pp. 3699–3709. DOI: 10.1021/acs.langmuir.2c03403. Epub (2023) Mar 1. PMID: 36857201; PMCID: PMC10018762.

9. Brekke C. and Solberg A. Oil Spill Detection by Satellite Remote Sensing // Remote Sensing of Environment, 2005. Vol. 95, Issue 1. Pp. 1–13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.rse.2004.11.015>
10. Naeser H. The Capillary Waves' Contribution to Wind-Wave Generation // Fluids. 2022. Vol. 7. Iss. 2. 73. <https://doi.org/10.3390/fluids7020073>
11. Yang Z., Ji B., Ault J.T., et al. Enhanced singular jet formation in oil-coated bubble bursting // Nat. Phys. 2023. Vol. 19. Pp. 884–890. <https://doi.org/10.1038/s41567-023-01958-z>
12. Alvarez M., Friend J., & Yeo L. Y. Rapid generation of protein aerosols and nanoparticles via surface acoustic wave atomization // Nanotechnology. 2008. Vol. 19. No. 45. 455103. DOI: 10.1088/0957-4484/19/45/455103
13. Orme B., Torun H., Unthank M., et al. Capillary wave tweezer // Sci. Rep. 2024. Vol. 14. 12448. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63154-0>
14. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 621 с.
15. Лэмб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
16. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>
17. Handschuh-Wang S, Chen Y, Zhu L, Zhou X. Analysis and transformations of room-temperature liquid metal interfaces – A closer look through interfacial tension // ChemPhysChem. 2018. Vol. 19, Issue 13. Pp. 1584–1592. DOI: 10.1002/cphc.201800129. Epub 2018 Apr 17. PMID: 29539243.
18. Хайирбеков Ш. Х. Подавление шумов и фильтрация при обработке изображений капельных и волновых течений // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2024. Т. 25, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-2/articles/1095/>

## References

1. Chashechkin Yu. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*. 2021, vol. 10, no. 4, 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
2. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A., Lapshina K. Yu., Surface Waves Along the Interface of Stably Stratified Liquids, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, issue 6 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
3. Wout M. Goesaert, Paul S. W. M. Logman, Easy method to establish the dispersion relation of capillary waves on water jets, *Am. J. Phys.*, 2024, vol. 92, issue 2, pp. 93–99. <https://doi.org/10.1119/5.0144849>
4. Chashechkin Yu. D., & Prokhorov V. E., Drop-impact hydrodynamics: Short waves on a surface of the crown, *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 7, pp. 296–300. DOI:10.1134/s1028335813070021
5. Ivantsov A. O., Lyubimova T. P., Vorobyov A. M., Numerical modeling of the evolution of gravity and capillary waves in a system of two weakly miscible fluids, *Proceedings of the international symposium "Nonequilibrium processes in continuous media"*, 2017, vol. 1, pp. 194–197 [in Russian]. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32178104>
6. Van der Eijk M., & Wellens P. R., A compressible two-phase flow model for pressure oscillations in air entrapments following green water impact events on ships, *International Shipbuilding Progress*, 2020, vol. 66, issue 4, pp. 315–343. DOI: 10.3233/isp-200278
7. Tan M. K., Friend J. R., Matar O. K., & Yeo L. Y. (2010). Capillary wave motion excited by high frequency surface acoustic waves, *Physics of Fluids*, 2010, vol. 22, issue 11, 112112. DOI: 10.1063/1.3505044
8. Zhang S, Orosco J, Friend J., Onset of Visible Capillary Waves from High-Frequency Acoustic Excitation, *Langmuir*, 2023 vol. 39, issue 10, pp. 3699–3709. DOI: 10.1021/acs.langmuir.2c03403.
9. Brekke C. and Solberg A., Oil Spill Detection by Satellite Remote Sensing, *Remote Sensing of Environment*, 2005, vol. 95, issue 1, pp. 1–13. <http://dx.doi.org/10.1016/j.rse.2004.11.015>

10. Naeser H., The Capillary Waves' Contribution to Wind-Wave Generation, *Fluid*, 2022, vol. 7, iss. 2, 73. <https://doi.org/10.3390/fluids7020073>
11. Yang Z., Ji B., Ault J. T., et al., Enhanced singular jet formation in oil-coated bubble bursting, *Nat. Phys.*, 2023, vol. 19, pp. 884–890. <https://doi.org/10.1038/s41567-023-01958-z>
12. Alvarez M., Friend J., & Yeo L. Y., Rapid generation of protein aerosols and nanoparticles via surface acoustic wave atomization, *Nanotechnology*, 2008, vol. 19, issue 45, 455103. DOI: 10.1088/0957-4484/19/45/455103
13. Orme B., Torun H., Unthank M., et al., Capillary wave tweezer, *Sci. Rep.*, 2024, vol. 14, 12448. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-63154-0>
14. Whitham G. B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and Sons, 1974.
15. Lamb H., *Hydrodynamics*, New York: Cambridge Univ. Press, 1932.
16. Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment and their impact on underwater technical objects, as well as the distribution of impurities in the ocean and atmosphere, Institute for Problems in Mechanics RAS. Available online: <http://ipmnet.ru/uniquequip/gfk> (accessed on 15 June 2023) [in Russian].
17. Handschuh-Wang S, Chen Y, Zhu L, Zhou X., Analysis and transformations of room-temperature liquid metal interfaces – A closer look through interfacial tension, *ChemPhysChem*, 2018, vol. 19, issue 13, pp. 1584–1592. DOI: 10.1002/cphc.201800129. Epub 2018 Apr 17. PMID: 29539243
18. Khairbekov S., Noise suppression and filtering when processing images of drop and wave flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2024, vol. 25, issue 2 [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2024-25-2/articles/1095/>

Статья поступила в редакцию 7 ноября 2025 г.