

# A Packet of Short Ring-Shape Perturbations around a Crown at the Initial Stage of Merging of a Freely Falling Drop with a Still Fluid in the Impact Mode

S. K. Khairbekov, Yu. D. Chashechkin

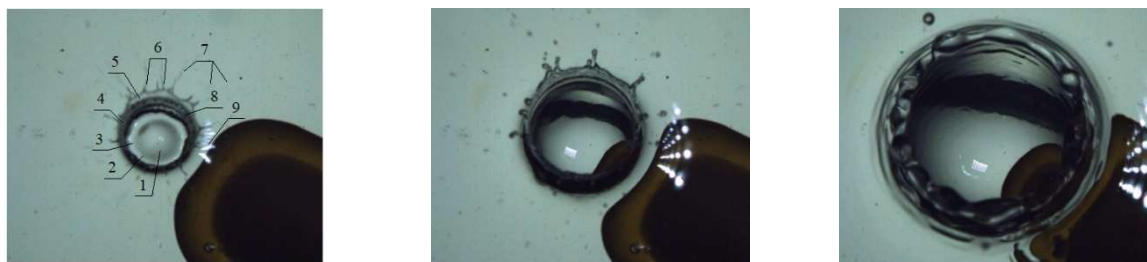
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences  
Moscow, 119526, Russia*

chakin@ipmnet.ru, msturist09@mail.ru

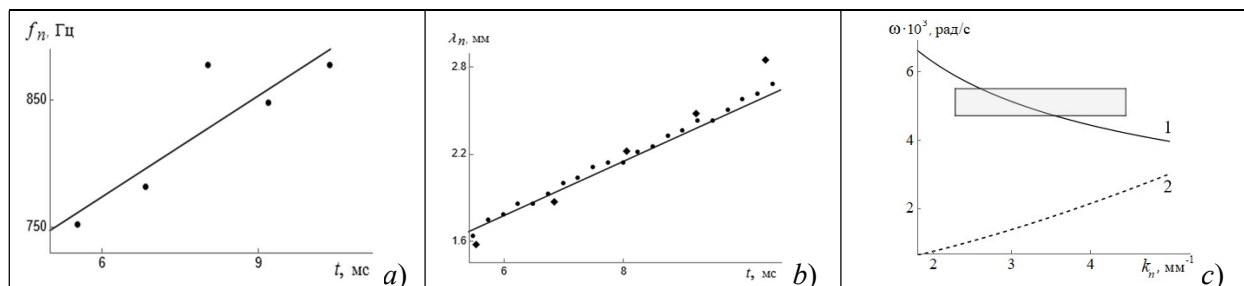
## Abstract

The paper presents video samples illustrating the rapid evolution of the fine structure of the flow during the merging of a water drop freely falling into a laboratory pool with tap water. At the initial stage of merging in the impact mode, a packet of running periodic annular perturbations was visualized for the first time around the growing crown. The motion of the packet consisting of five to seven rings was tracked by the movement of a group of glares reflected from inclined sections of the liquid surface. The radial distances between the crests of perturbations (analogs of wavelengths) in the packet monotonically increase with distance from the source. The time dependences of the lengths of individual components and the entire packet of annular perturbations, the velocities of its leading and trailing edges, and the frequency of disturbances at selected points were defined. The dependences of the component sizes on the frequency, as well as the cyclic frequency on the wave number of perturbations, were calculated. Over time, traditional ring capillary waves of greater length, which are formed with some delay, catch up with and absorb the package of primary non-stationary disturbances.

Keywords: drop impact, experiment, capillary waves, periodic perturbations, dispersion relations



Evolution of the flow pattern when a drop falls into a pool of water



Dependence of the frequency of non-stationary perturbations – (a) and wavelength – (b) on time, dispersion relation for a group of running non-stationary perturbations – (c): 1 – analogue of dispersion curve for experimental data; 2 – dispersion curve for capillary waves

УДК 532.5

# Пакет коротких кольцевых возмущений вокруг венца на начальном этапе слияния свободно падающей капли с покоящейся жидкостью в импактном режиме

Ш. Х. Хайирбеков, Ю. Д. Чашечкин

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
Россия, Москва, 119526, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1  
chakin@ipmnet.ru, msturistt09@gmail.com*

## Аннотация

Приводятся выборки из видеofilьма, иллюстрирующие быструю эволюцию тонкой структуры течения при слиянии капли воды, свободно падающей в лабораторный бассейн с водопроводной водой. На начальном этапе слияния в импактном режиме вокруг растущего венца впервые визуализирован пакет бегущих периодических кольцевых возмущений. Движение пакета, состоящего из пяти - семи колец, отслеживалось по перемещению группы бликов, отраженных от наклонных участков поверхности жидкости. Радиальные расстояния между гребнями возмущений (аналоги длин волн) в пакете монотонно растут с удалением от источника. Построены зависимости от времени длины отдельных составляющих компонентов и всего пакета кольцевых возмущений, скоростей движения его передней и задней кромок, частоты возмущений в выбранных точках. Рассчитаны зависимости размеров компонентов от частоты, а также циклической частоты от волнового числа возмущений. Со временем традиционные кольцевые капиллярные волны бóльшей длины, которые образуются с некоторым запаздыванием, догоняют и поглощают пакет первичных нестационарных возмущений.

Ключевые слова: удар капли, эксперимент, капиллярные волны, периодические возмущения, дисперсионные соотношения

## 1. Введение

Короткие волны, обладающие аномальной дисперсией – ростом фазовой скорости с уменьшением длины волны, впервые были выделены в отдельную группу «капиллярных волн» или волн «третьего порядка» в обзоре с анализом наблюдений взволнованной поверхности в водоемах и каналах, опубликованном в середине XIX века [1]. Анализ дисперсионного уравнения линейных плоских волн на поверхности идеальной жидкости [2] показал равенство минимальных скоростей ветра, возбуждающего волны [1], и распространения поверхностных волн, разделяющих ветви нормальных гравитационных и аномальных капиллярных волны с различными законами дисперсии. Высокая точность выполнения дисперсионного соотношения для плоских гравитационно-капиллярных волн, которая неоднократно проверялась в опытах, составила основу лабораторных оптических методов определения коэффициента поверхностного натяжения и его зависимости от температуры по наблюдениям дифракции [3] и интерференции [4] лазерного излучения.

Современный волнограф, основанный на видеорегистрации рассеянного лазерного излучения, позволяет проводить измерения профилей взволнованной поверхности и в лабораторных, и в морских условиях с временной синхронизацией порядка  $\sim 10^{-4}$  с [5]. Влияние тонкой

вязкоупругой пленки, которая естественно образуется на поверхности воды при оседании пыли или искусственно создается добавлением несмешивающейся жидкости, экспериментально изучалось в [6].

Практически одновременно с анализом плоских капиллярных волн в конце XIX века начали изучаться распространенные в природе кольцевые капиллярные волны. Описание первых наблюдений кольцевых капиллярных волн, распространяющихся вверх по поверхности падающей струи от области контакта с плоской поверхностью, Рэлей дополнил выводом дисперсионного соотношения, полученного на основе уравнений Эйлера. Соотношение Рэрея содержит функции Бесселя нулевого и первого порядка [7]. В одной из его последующих работ введением экспоненциального множителя, характеризующего затухание волн, было учтено влияние вязкости [8]. Результаты наблюдений Рассела, расчетов Кельвина и Рэрея [1, 2, 6], вошедшие с минимальной коррекцией в трактат [9], инициировали большое число теоретических исследований капиллярных волн, результаты которых включаются в современные монографии и учебники по гидродинамике и теории волн.

Численными методами установлено существование интересной формы потенциальных уединенных гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся с фазовой скоростью  $c_{ph} = 0.9267\sqrt[4]{g\gamma}$  [10]. Здесь и далее  $g$  – ускорение свободного падения,  $\gamma = \sigma/\rho$  – нормированный на плотность  $\rho$  коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ . Форма таких уединенных волн – впадин, которые создавались на поверхности жидкости в бассейне равномерно движущейся тонкой вертикальной струйкой воздуха [11], согласуется с рассчитанной в [10].

Сравнения геометрии поверхности и скоростей распространения коротких капиллярных волн, бегущих по круглой струе чистой воды и с добавлением детергента, падающей в бассейн волн с водопроводной водой, а также более длинных волн на струе эллиптического сечения, проведены в [12]. Уточненное решение задачи распространения капиллярных волн по круглой струе с учетом эффектов нелинейности и вязкой диссипации приведено для стоячих волн с линеаризованными граничными условиями в [13] и для бегущих волн в [14].

Публикации зарисовок картин слияния свободно падающей капли с покоящейся жидкостью [15], а позднее, с созданием инструментов для регистрации изображений [16] – и четких фотографий каверны, венца, всплеска, коротких волн в картине слияния капли [17], стимулировали развитие теории кольцевых капиллярных волн – одного из универсальных компонентов быстро эволюционирующего капельного течения. В середине прошлого века методы научной фотографии были стали сменяться все более информативной высокоскоростной кино съемкой на пленку [18], а в конце века – видеорегистрацией, позволяющей записывать более миллиона кадров в секунду [19]. Дополнение техники эксперимента микрофонами и гидрофонами показало, что при контакте капли с жидкостью, наряду с капиллярными волнами, образуются высокочастотные звуковые пакеты, изучению которых посвящены отдельные серии работ. Вторичная группа более низкочастотных акустических волновых пакетов образуется с некоторой задержкой [20].

Анализ асимптотических решений линеаризованных уравнений генерации волн начальным возмущением показал, что при слиянии капли преимущественно образуются гравитационно-капиллярные волны в диапазоне минимальной скорости распространения  $c_{\min} = \sqrt[4]{4g\gamma}$ . Вблизи источника выражены более короткие капиллярные волны, на больших удалениях – длинные гравитационно-капиллярные волны [21].

Оригинальный метод определения форм и амплитуд кольцевых капиллярных волн по измерениям искажений формы вертикальной линии в ее зеркальном отражении от поверхности жидкости, которое регистрируется высокоскоростной видеокамерой, реализован в [22]. Методика опыта позволяла регистрировать волны с задержкой около  $\Delta t = 0.8$  с после первичного контакта капли с принимающей жидкостью. Измерялись профили волн, возникающих в результате падения в пресную и соленую воду капель диаметром  $D = 2.2$  и  $2.8$  мм. Выделенные

волны характеризуются стабильным значением волнового вектора ( $k \sim 0.2 \text{ мм}^{-1}$ ) и малой амплитудой (менее  $A_w < 0.1 \text{ мм}$  на расстоянии  $R = 13 \text{ см}$  от центра области слияния). Приведенные оценки показывают, что в энергию волн конвертируется не более 1 % кинетической энергии  $E_k$  падающей капли.

Данные измерений длины, скорости распространения и амплитуды кольцевых волн в пакете, выполненные в открытом водоеме на больших удалениях от области падения капли [23], подтвердили основные выводы [21]. В дальнем поле длина несущих волн лежит в диапазоне наиболее медленных волн  $\lambda \sim 3.3 \text{ см}$ , волновой пакет распространяется с постоянной скоростью и медленно расплывается. Формирование капиллярных волн при падении группы мелких капель («капельного кластера») прослежено в [24], где также приведена оценка влияния волн на процесс слияние отдельных капелек.

Применение нескольких источников света, обеспечивающих более равномерную засветку области течения, высокоразрешающей фото- и видеоаппаратуры позволило зарегистрировать короткие капиллярные волны не только вне, но и внутри венца [25]. Пакеты волн также образуются на тыльной стороне сливающейся капли при ударе мелких капелек, вылетающих с вершин шипов венца, [26]; на поверхности венца с началом его оседания [27]; около вершины всплеска при отрыве вторичной капли [28].

Интерес к изучению капиллярных волн в капельных течениях поддерживается необходимостью уточнения механизмов их генерации, определения свойств волновых пакетов в окрестности каверны и венца, оценки влияния капиллярных волн на гашение морского волнения [29,30] и разгон волн при усилении ветра [31]. Капиллярные волны влияют на рассеяние коротких электромагнитных волн, использующихся при дистанционной (авиационной и спутниковой) диагностике состояния поверхности океана [32]. Большое внимание уделяется регистрации капиллярных волн при изучении взаимодействии акустических пучков со свободной поверхностью [33, 34].

Наряду с экспериментальными исследованиями в последние годы активно развивается теория капиллярных волн. Учет эффектов стратификации, нелинейности и диссипации привел к расширению классического дисперсионного соотношения, полученного для капиллярных волн в идеальной жидкости [9, 35], и выделению лигаментов – специального класса периодических течений, формирующих тонкую структуру неоднородной среды [36, 37]. Развитию теории способствуют новые экспериментальные результаты изучения периодических форм в различных течениях. В данной работе на начальном этапе процесса слияния капли вокруг венца впервые визуализирован пакет бегущих нестационарных кольцевых возмущений и прослежена его эволюция вплоть до поглощения группой капиллярных волн большей длины.

## 2. Методика эксперимента

Опыты выполнены на стенде ЭСП, входящем в состав Уникальной исследовательской установки «ГФК ИПМех РАН» [38]. Основные элементы стенда – бассейн размером  $1.5 \times 0.4 \times 0.6 \text{ м}^3$  с оптическими иллюминаторами, осветитель – многоэлементный светодиодный прожектор с эквивалентным световым потоком 1000 лм, видеокамера Optronis CR3000×2 (скорость видеосъемки до 20000 к/с, размер ПЗС матрицы в пикселях  $256 \times 256$ ), гидрофон ГИ54. В данных опытах деформация изображения гидрофона, погруженного на глубину около 5 см, служила индикатором изменения формы свободной поверхности. Изучались возмущения, сопровождающие слияние свободно падающей капли воды в бассейне, заполненном частично дегазированной водопроводной водой.

Капля выбранного диаметра в диапазоне  $0.2 < D < 0.7 \text{ см}$  падала в воду из дозатора, установленного на высоте  $6 < H < 94 \text{ см}$  относительно невозмущенной поверхности принимающей жидкости. Для автоматического определения размеров изучаемых объектов регистрировался калиброванный маркер.

Бассейн и дозатор капель заполнялись частично дегазированной водопроводной водой для которой были приняты табличные значения коэффициента поверхностного натяжения и плотности при  $20^\circ\text{C}$  ( $\sigma = 73 \text{ г/с}^2$ ,  $\rho = 1.0 \text{ г/см}^3$ , кинематическая вязкость  $\nu = 0.01 \text{ см}^2/\text{с}$ ). В опытах падающая со скоростью  $U$  капля диаметром  $D$  прерывала световой луч фотозатвора, сигнал которого с регулируемой задержкой запускал интерфейс и компьютер, осуществляющие записи сигналов. Полученные данные обрабатывались по специализированным математическим программам.

В данных опытах особенно тщательно проводилась установка осветителей, обеспечивающих наблюдение тонких возмущений свободной прозрачной жидкости в бассейне. С большим различием значений коэффициента оптического преломления сред (для воздуха  $n_a = 1.00027$ , для воды  $n_w = 1.33$ ) связаны эффекты полного внутреннего отражения и затенения, затрудняющие наблюдения тонких деталей оптических образов течений. Как показывает анализ публикаций, гладкие изображения свободной поверхности в капельных течениях существенно отличаются от ее реальной геометрии. В частности, в некоторых работах не визуализировались капиллярные волны на венце и падающей капле, тонкая структура вершины всплеска, приведенные в [25–28].

Условия опытов с каплями традиционно характеризуются набором безразмерных параметров, включающим следующие числа: Рейнольдса  $Re = UD/\nu$ , Фруда  $Fr = U^2/gD$ , Бонда  $Bo = gD^2/\gamma$ , Онезорге  $Oh = \nu/\sqrt{\gamma D}$ , Вебера  $We = DU^2/\gamma$ . В число определяющих параметров также входят экстенсивная кинетическая энергия  $En_k = MU^2/2$  и потенциальная поверхностная энергия (ППЭ)  $En_\sigma = \sigma_a^2 S_\sigma$ , которую формируют анизотропные атомно-молекулярные взаимодействия в окрестности поверхности капли.

ППЭ сосредоточена в тонком приповерхностном слое толщиной порядка размера молекулярного кластера  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см и характеризуется высокой плотностью  $W_d^\sigma = En_\sigma/V_\sigma$  в отличие от кинетической энергии, которая распределена по всему объему капли с плотностью  $W_d^k = En_k/V_d$ .

Отношения компонентов полной энергии капли – кинетической к поверхностной потенциальной энергии  $R_{En}^{k,\sigma} = En_k/En_\sigma$  в данных опытах могут быть и больше, и меньше единицы. В то же время отношения плотностей кинетической и ППЭ капли всегда малые, будучи пропорциональными отношению толщины приповерхностного молекулярного кластера  $\delta_\sigma \sim 10^{-6}$  см к диаметру капли  $R_w = W_d^k/W_d^\sigma \sim \delta_\sigma/D \ll 1$ .

Отношения компонентов энергии характеризуют режим капельного течения. При малой контактной скорости капли, в интрузивном режиме при  $R_{En}^{k,\sigma} < 1$ , капля плавно втекает в толщу жидкости, где формирует линзообразную интрузию, трансформирующуюся в кольцевой вихрь. Быстро падающая капля в импактном режиме при  $R_{En}^{k,\sigma} > 1$  распадается на тонкие струйки [39]. Часть струек растекается по поверхности жидкости и стенкам венца, часть перфорировывает дно каверны и формирует промежуточный слой под дном каверны с собственным значением плотности. Далее будет рассматриваться картина течения на начальном этапе слияния капли в импактном режиме.

### 3. Основные результаты

Эволюцию картины капиллярных волн на свободной поверхности на начальном этапе слияния капли диаметром  $D = 0.6$  см, свободно падающей со скоростью  $U = 4.2$  м/с ( $En_k = 997.52$  мкДж,  $En_\sigma = 8.256$  мкДж,  $R_{En}^{k,\sigma} = 120.8$ ) иллюстрируют выборки из видеопленки, приведенные на рис. 1. Подлетающая капля 1, сферический оголовок гидрофона 2 и отраженный от невозмущенной поверхности блик 3, иллюстрирующий положение луча света относительно границ кадра отмечены на рис. 1, а.

Основные компоненты течения, успевающие сформироваться в течение  $\Delta t = 1$  мс с момента первичного контакта, представлены на рис. 1, б. В их число входят: остаток погружаю-

щейся капли 1; движущаяся граница области слияния жидкостей 2 на дне каверны 3, которой соответствует светлое кольцо; стенка венца 4; тонкая пелена 5, на вершинах зубцов которой располагаются тонкие струйки – шипы 6. С вершин струек вылетают мелкие капельки – брызги 7. Также отмечаются неоднородности стенки венца 8. Группа светлых пятнышек 9 около тени гидрофона на рис. 1, *b* – блики, являющимися участками зеркального отражения света источника от боковых поверхностей системы кольцевых возмущений. Раньше они не визуализировались в силу краткосрочности существования и близости к венцу.

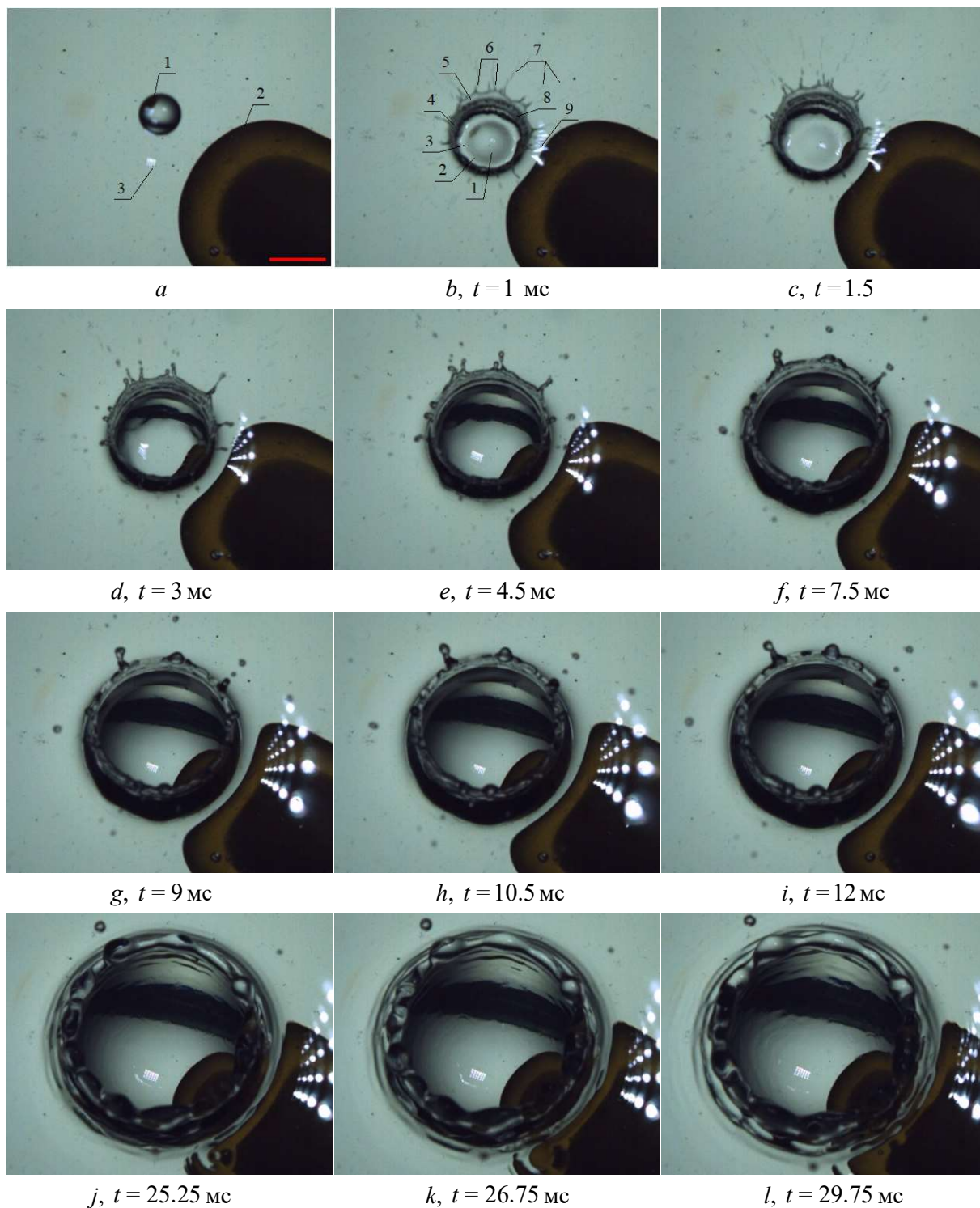


Рис. 1. Эволюция картины течения при слиянии капли воды с водой в бассейне ( $U = 420$  см/с,  $D_n = 0.6$  см,  $Re = 25200$ ,  $Fr = 300$ ,  $We = 1450$ ,  $Bo = 4.84$ ,  $Oh = 0.00151$ ,  $En_k = 997.52$  мкДж,  $En_\sigma = 8.256$  мкДж,  $R_{En}^{k,\sigma} = 120.8$ , длина маркера 8 мм)

Деформация передней кромки изображения гидрофона свидетельствует о появлении опережающей депрессии поверхности – кольцевой впадины, охватывающей область расположения традиционно изучаемых элементов картины течений – каверны и окружающего венца. Длина радиального смещения изображения переднего края тени на рис. 1, *a* и 1, *b* составляет  $\Delta r = 1.5$  мм. Визуально скорость продвижения переднего края депрессии на начальном этапе течения близка к скорости смещения передней кромки области бликов.

Все отмеченные компоненты течения с некоторыми изменениями сохраняются на рис. 1, *c* и далее. В частности, со временем увеличивается длина бликов  $\lambda_n$  и ширина кольцевой области  $\delta$ , включающей пакет первичных возмущений  $L_n$ . Около стенки каверны под бликами начинает появляться тень кромки гидрофона. Размер тени в каверне далее монотонно растет. На кадре, представленном на рис. 1, *c* группа бликов заметно отрывается от стенки каверны. При этом положение центра каверны и края тени гидрофона внутри нее (рис. 1, *d-l*) остается практически неподвижным.

Брызги синхронно выбрасываются с вершин шипов. Две ближайшие к венцу группы капелек лежат в окрестности дуг окружностей, разделенных пустым промежутком. Размеры капелек растут со временем, что хорошо видно из сравнения рис. 1, *d-f*. По мере роста каверны число шипов уменьшается, зубцы сглаживаются, пакет первичных кольцевых возмущений удаляется от источника.

По мере дальнейшего роста диаметра каверны внешняя часть тени гидрофона сдвигается все дальше и одновременно растет размер его изображения внутри каверны на рис. 1, *g*. Новые бугры, отмечающие распространение спадающих капиллярных волн на стенках венца, визуализированных в [27], появляются в нижней части каверны при  $t = 10.5$  мс (рис. 1, *h*). Далее в течение  $\Delta t = 14$  мс элементы картины течения плавно эволюционируют – растут размеры каверны, венца, длины области нестационарных кольцевых возмущений и отдельных составляющих внутри пакета.

Новые компоненты – кольцевые капиллярные волны, гребни которых визуализируют тонкие линии вокруг венца [3, 23, 25] и на его внутренней поверхности [27], появляются в поле наблюдения при  $t = 25.25$  мс. Волнистость линий отражает аксиальную неоднородность формы источника наружной поверхности венца, в котором выражены отдельные гребни и впадины. По мере удаления от венца форма гребней внешних кольцевых волн выравнивается и приближается к круговой (рис. 1, *k*). Более длинные кольцевые волны, порождаемые растущим венцом, постепенно догоняют и искажают форму коротких нестационарных возмущений на рис. 1, *l*, приближающихся к границе поля зрения.

Выборки из видеofilма, иллюстрирующие дальнейшую эволюцию основной группы более длинных капиллярных волн приведены на рис. 2. Кольцевые капиллярные волны вокруг каверны начинают наблюдаться только через  $\Delta \tau \sim 16$  мс после начала слияния капли (рис. 2, *a*). Первые три гребня внешних волн выделяются при  $t = 31.25$  мс в правой части рис. 2, *b*. Группа сбегаящих капиллярных волн на внутренней стенке венца [27] здесь переходит со стенок на дно каверны. На данной выборке кадров также можно видеть, что капиллярные волны распространяются и вокруг растущей каверны (рис. 2, *b-f*), и внутри нее (рис. 2, *c*). Своя система мелких возмущений формируется на вершине растущего всплеска (рис. 2, *d, e*) [28]). Аксиальную неоднородность внутренних капиллярных волн визуализируют выступы и впадины на изображении передней кромки тени гидрофона на рис. 2, *c*.

Со временем растут внешний диаметр оседающего венца, длина и амплитуда волн внешней группы. Интенсификация степени изрезанности внешней кромки тени гидрофона свидетельствует о появлении выраженных мелкомасштабных неоднородностей на поверхности дна каверны, которая выглядит в целом гладкой при данной технике визуализации. На поверхности венца и на дне каверны появляются тонкие блики, образующих кольцевые группы. Некоторые из бликов, попадающие на кромку тени, позволяют считать их зеркальным отражением от наклонных участков на гребнях аксиально промодулированных кольцевых волн (рис. 2, *d*). Еще более мелкомасштабные неоднородности, которые наблюдаются на вершине растущего в центре каверны всплеска, ранее визуализированы в [28].

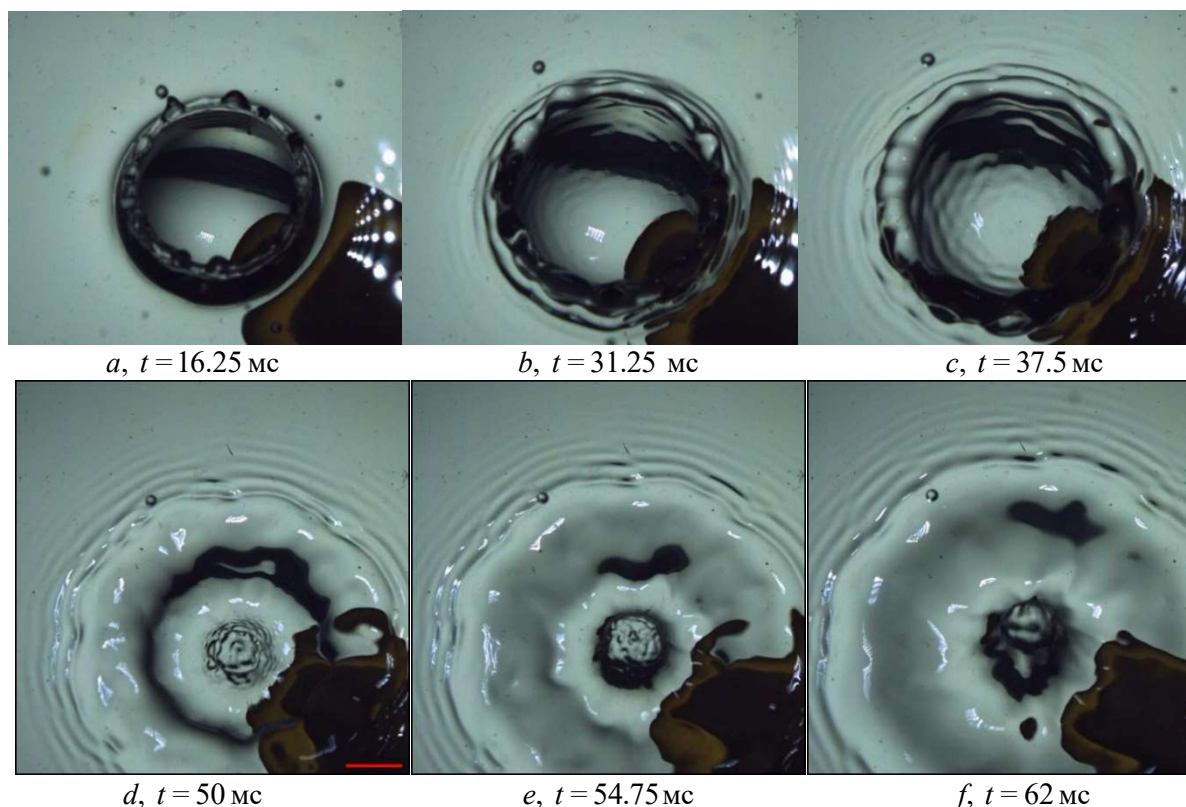


Рис. 2. Эволюция группы бегущих кольцевых капиллярных волн вокруг и внутри каверны (значения параметров приведены на рис. 1, длина маркера – 8 мм)

По мере роста всплеска и расплывания венца поверхность жидкости постепенно сглаживается, блики сохраняются только в окрестности экстремальных линий на гребне венца и в центре кольцевой впадины на дне каверны, разделяющей основание всплеска и внутреннюю кромку остатка венца. Новые капиллярные внешние волны продолжают формироваться на внешней границе расплывающегося венца (рис. 2, *e, f*).

График изменения диаметра каверны  $D_c$  мм в течение первых  $\Delta t = 30$  мс после начала импакта капли показан на рис. 3. Синими точками обозначены экспериментальные данные, которые аппроксимируются степенной функцией  $D_c = at^n$  с искомыми параметрами  $a$  и  $n$ ; сплошной линией – аппроксимирующая функция  $D_c = 8.96t^{0.31}$  мм (здесь и далее расстояния измеряются в миллиметрах, время – в миллисекундах).

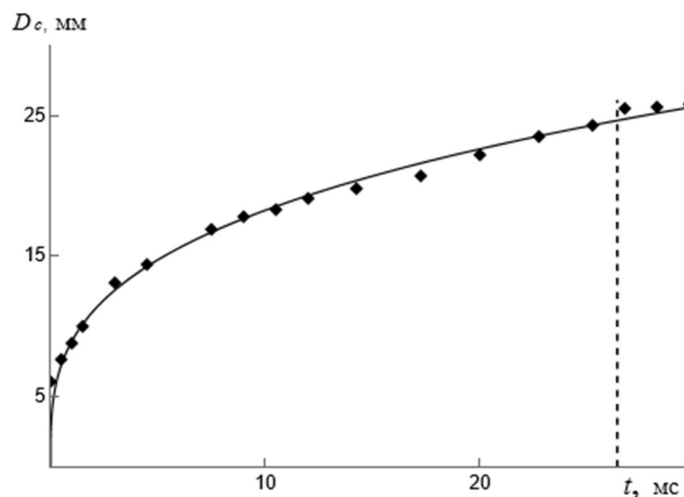


Рис. 3. Зависимость диаметра каверны  $D_c$  от времени



Темп расширения каверны резко падает и диаметр устанавливается на уровне  $D_c = 25.6$  мм при  $t = 26$  мс, отмеченном штриховой линией. Соответственно, зависимости скорости  $u = 2.77t^{-0.69}$  м/с и ускорения  $a = -1.91t^{-1.69}$  м/с<sup>2</sup> изменения диаметра каверны от времени также имеют степенной вид. В начальной фазе роста диаметра каверны на поверхности принимающей жидкости при  $t = 1.5$  мс после касания капли ускорение составляет заметную долю ускорения свободного падения  $a \sim 0.1g$

Зависимости скоростей продвижения переднего и заднего фронтов группы нестационарных возмущений волн от времени показаны на рис. 4. Скорости вычислялись в каждом кадре через отношение приращения расстояния от центра каверны до движущейся передней границы блика  $\Delta l$  к интервалу между кадрами  $\Delta t = 0.25$  мс. Полученные ряды значений, приведенные на графике (рис. 4), аппроксимируемые степенными функциями ( $u_p^f = 2.96 t^{-0.44}$  м/с для скорости переднего фронта и  $u_p^b = 4.2/t$  м/с для скорости заднего фронта) показывают, что пакет замедляется и растягивается по мере продвижения.

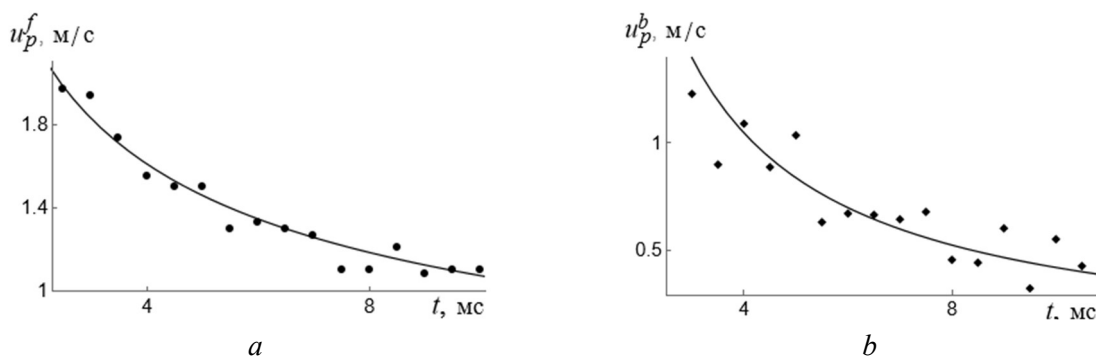


Рис. 4. Зависимости от времени скорости распространения фронтов пакета:  $a$  – переднего,  $b$  – заднего

График, иллюстрирующий изменение ширины пакета первой группы нестационарных возмущений  $\Delta r$  со временем, приведенный на рис. 5, имеет характерный линейный тренд  $\Delta r(t) = 0.609t + 1.471$  мм. Сохраняющаяся периодичность картины распределения бликов по мере распространения позволяет по данным измерений приписать расстояниям значения длины волны (волнового числа) и определить ее изменение с удалением от источника. Одновременно, регистрация вариаций яркости в выбранной точке позволяет определить частоту (период) основной моды возмущений и проследить изменение последней во времени.

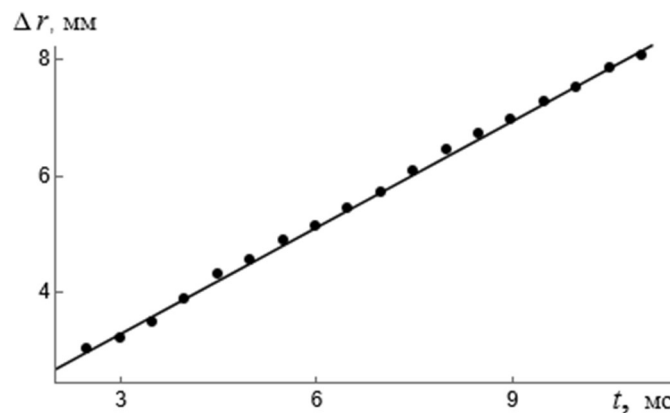


Рис. 5. Радиальное расплывание пакета периодических возмущений  $\Delta r$ : точки – эксперимент, сплошная линия – аппроксимация

Для проведения измерений исходные цветные фотографии на рис. 1 были конвертированы в 8-битные черно-белые, содержащее 256 уровней серого, где 0 самый темный, а 255 –

самый яркий пиксель (конвертация была выполнена с равными весами для красного, синего и зеленого цветов). Замер освещенности производился перпендикулярно фронту нестационарных кольцевых возмущений. Эффективная длина волны определялась двумя способами: спектральным и по данным прямых измерений времени и смещения.

Прямое измерение длины волны осуществлялось посредством вычисления расстояния между серединами двух наиболее близко расположенных к правому краю изображения положивших участков графика освещенности (рис. 6, *a*, штрихпунктирные линии). Сами середины определялись как половины расстояний между абсциссами наибольшей кривизны (рис. 6, штриховые линии), для чего исходные данные освещенности были интерполированы полиномом четвертой степени, а затем дважды продифференцированы.

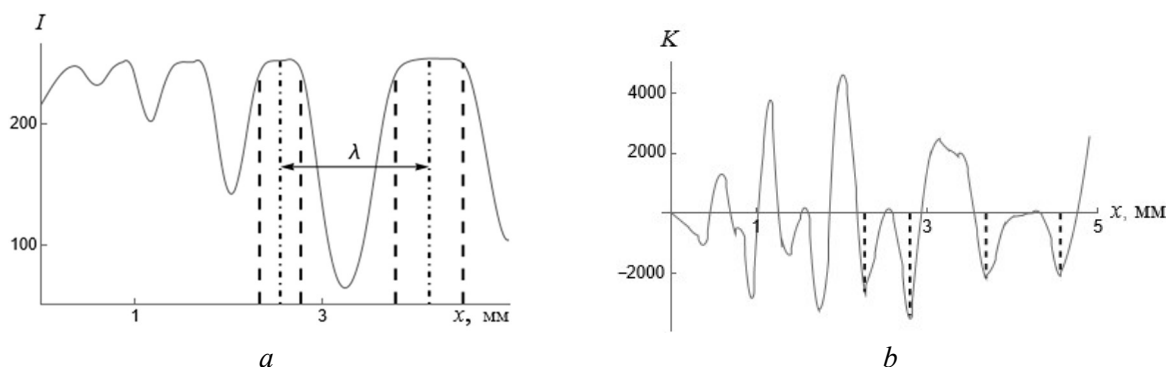


Рис. 6. Распределение относительной освещенности в пакете с кольцевыми возмущениями при  $t = 5.5$  мс – (*a*) и ее второй производной – (*b*). Штрихпунктирными линиями показаны вершины гребней волн

Спектральный метод состоит в построении дискретного Фурье-спектра распределения относительной освещенности – исходной на рис. 7, *a* и с удаленным трендом на рис. 7, *b*. Для корректной оценки спектральных характеристик из графика освещенности был удален тренд (рис. 7, *a*, штриховая линия). Результаты вычислений показаны на рис. 7, *b*. Половина спектра (в силу эрмитовой симметрии) показана на рис. 7, *c* при  $t = 11.75$  мс. В качестве аппроксимирующей кривой был выбран полином второго порядка. Максимальные значения спектра для всех моментов времени в интервале  $4 < t < 12$  мс, определяют временную изменчивость аналога длины волны.

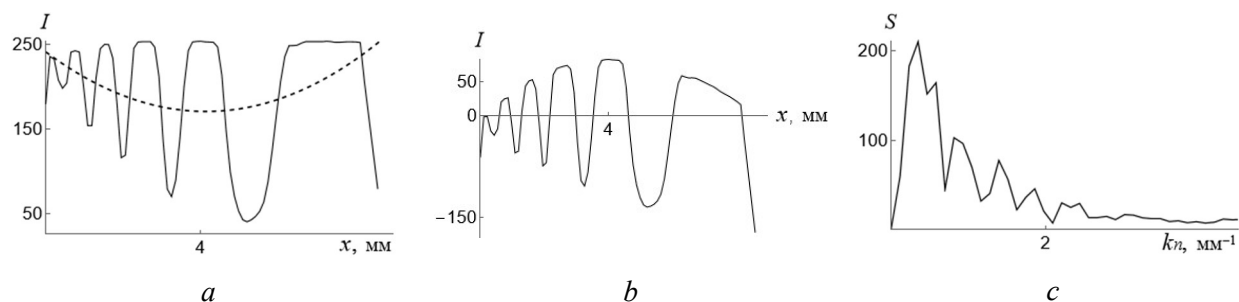


Рис. 7. Исходное распределение относительной освещенности с квадратичным трендом, отмеченным штриховой линией при  $t = 11.75$  мс – (*a*); распределение с удаленным трендом – (*b*); его пространственный спектр – (*c*)

Схожим образом было проанализировано изменение освещенности в точке свободной поверхности воды, через которую проходит горизонтальный ряд бликов (рис. 8, *a*). Точками показаны локальные максимумы кривой, для сглаживания которой использовался квадратичный интерполяционный многочлен. Изменение частоты основной моды волнового пакета определялись для моментов времени, находящиеся в середине отрезков между пунктирными

линиями. Далее считается, что основные частотные характеристики бегущих бликов соответствуют локальным частотам нестационарных периодических возмущений. График изменения частоты осцилляций освещенности по времени представлен на рис. 8, *b*. Точками показаны рассчитанные значения, сплошной линией – аппроксимирующая функция  $f_n(t) = 615 + 26.5t$  Гц. Найденные частотные точки находятся в диапазоне  $752 < f < 877$  Гц.

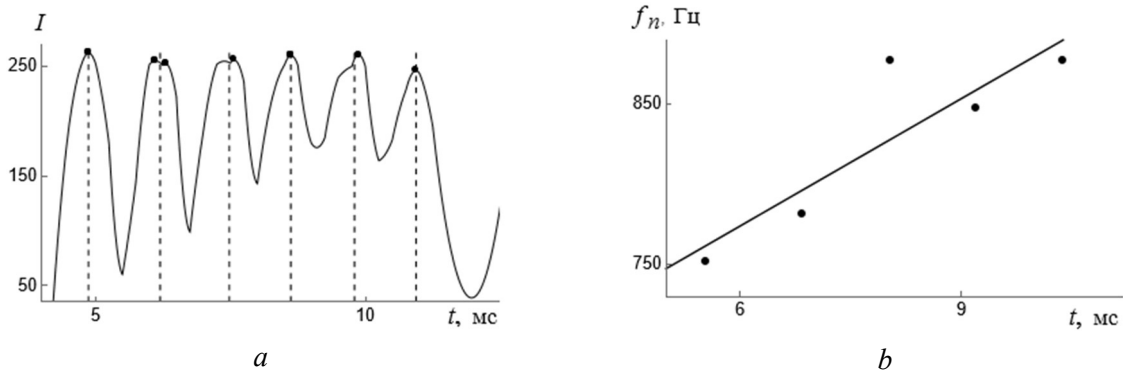


Рис. 8. Зависимость от времени вариаций освещенности в точке прохождения группы бликов – *a* и частоты основной моды нестационарных возмущений – *b*

Графики независимого определения зависимости длины волны от времени в бегущем периодическом возмущении, представленные на рис. 9 в целом согласуются, что свидетельствует об эквивалентности двух реализованных методов ее определения. Результаты прямых измерений длин волн  $\lambda_n$ , для получения которых выбирались кадры, соответствовали частотным точкам на рис. 8, *b*. Измеренные длины аналогов волн, которые лежат в диапазоне  $1.413 < \lambda_p < 2.753$  мм, аппроксимирована линейной функцией  $\lambda_n(t) = 0.65 + 0.188t$  мм. В дальнейших построениях использовались результаты спектрального метода.

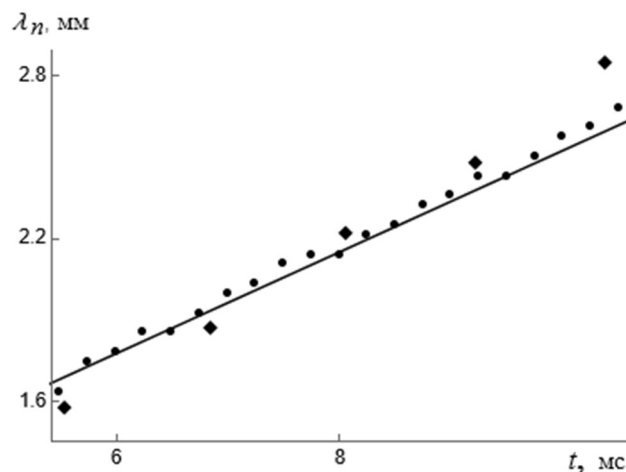


Рис. 9. Зависимость длины волны основной гармоники от времени: точки получены спектральным методом, ромбы – прямые измерения, линия – аппроксимация спектральных данных

Регулярность аксиально симметричной картины возмущений, сохранение структуры перемещающейся группы бликов, позволяют предположить волновую природу наблюдаемого явления и построить аналог дисперсионного соотношения [36] – связь между частотой, определенной по вариациям освещенности в выбранной точке и волновым числом или длиной волны в ее окрестности. Для построения на плоскость « $f - \lambda$ » были нанесены точки, представляющие собой пары значений «частота-длина волны»: соответствующие времена из частотных точек « $f - t$ » (рис. 8, *b*) подставлялись в аппроксимацию для изменения длины волны (рис. 9).

Приведенные результаты аппроксимируются степенной функцией  $\lambda_n = 3.135 \times 10^{-6} f_n^2$  мм, приведенной на рис. 10, *a*. В традиционной форме «волновое число-циклическая частота» аналог дисперсионного соотношения принимает вид  $\omega^2 = 79.1 \times 10^6 / k$ , существенно отличающийся от дисперсионного соотношения для коротких капиллярных волн  $\omega^2 = \sigma k^3 / g = 0.073 \times 10^6 k^3$  для условий опытов (дисперсионные соотношения получены в размерностях основных единиц: время – «с», длина – «мм»).

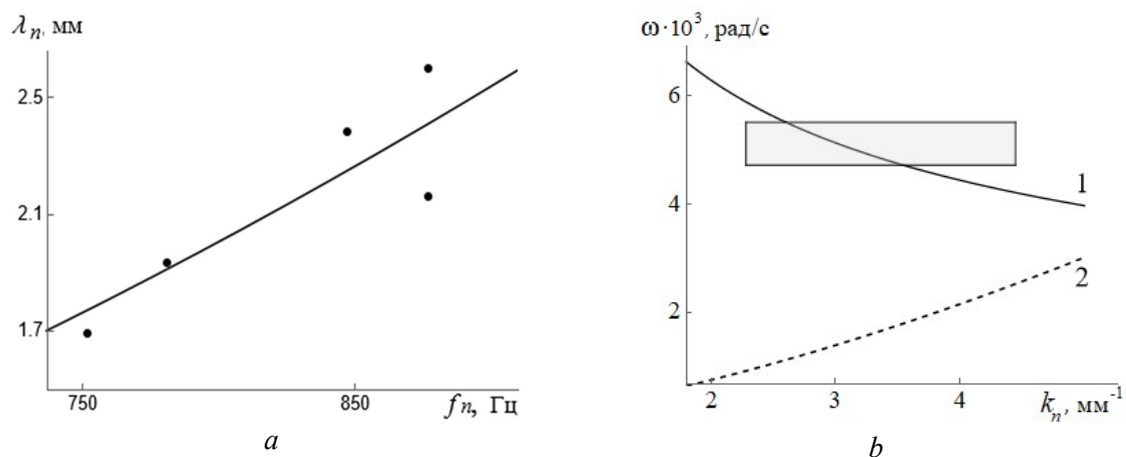


Рис. 10. Аналог дисперсионного соотношения для группы бегущих нестационарных возмущений: *a*) – на плоскости  $f_n - \lambda_n$  (точки – эксперимент, кривая – аппроксимация); *b*) – на плоскости  $k_n - \omega$ , кривая 1 – эксперимент, кривая 2 – дисперсионное соотношение для капиллярных волн; прямоугольник – область параметров в опытах

Скорость радиального перемещения нестационарных возмущений  $u_n$ , которую можно получить перемножением пар значений аналогов длины волны  $\lambda_n$  и частоты  $f_n$ , или делением круговой частоты  $\omega$  на волновое число  $k_n$  лежит в диапазоне  $1.27 < u_n < 2.28$  м/с. Указанные значения скорости хорошо согласуются с вычисленной при помощи прямых измерений скорости переднего фронта нестационарных волн  $1.264 < u_p^f < 1.964$  (см. рис. 4, *a*), измеренной в промежутке  $2.5 < t < 10.5$  мс.

В окрестности временных точек  $t = 6, 7.5$  и  $10$  мс возникают по паре локальных максимумов (на рис. 8, *a* показана одна такая пара), временной интервал между которыми  $\Delta t = 0.18$  мс. Двойные максимумы в графике освещенности могут возникать вследствие прохождения через выбранную точку «складок» на фазовой поверхности.

На рис. 11 представлены фотографии свободной поверхности в различных увеличениях с хорошо наблюдаемыми складками при падении капли воды в воду. Характерная толщина складок при прямом измерении  $\delta \sim 0.2$  мм, что близко к временному интервалу между двойными максимумами на рис. 8*a*.

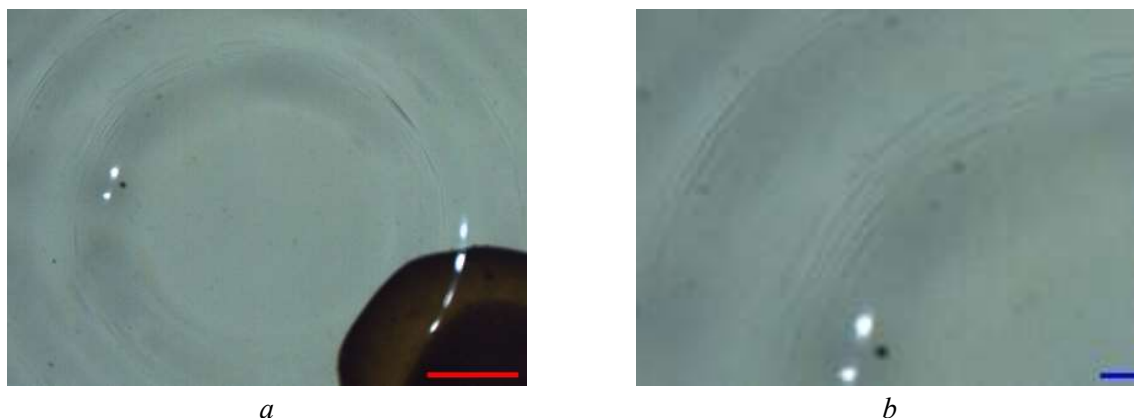


Рис. 11. Фотография свободной поверхности воды со «складками» на гребнях капиллярных волн в различных масштабах: *a, b*) – длина маркера 8 и 2 мм

Физическая природа появления складок и их влияние на структуру и динамику течений нуждается в дальнейшем изучении.

#### 4. Обсуждение результатов.

Проведенная визуализация картины начальной стадии течения при регистрации сверху картины слияния свободно падающей капли воды с применением падающего наклонного светового пучка и погруженного темного тела в поле зрения, искажение формы которого позволяет регистрировать тонкие детали геометрии первоначально горизонтальной невозмущенной поверхности принимающей жидкости, позволяют выделить новые регулярные структурные компоненты в сложной картине эволюции течения. В импактном режиме слияния, когда кинетическая энергия капли превышает ее потенциальную поверхностную энергию, внутренняя область, включающая каверну с остатком сливающейся капли и растущим венцом, оказывается окруженной кольцевой впадиной – депрессией. Расширяющаяся с ростом венца депрессия обеспечивает разрыв изображения темного тела в картине течения.

На внутренней стенке депрессии наблюдается группа бегущих нестационарных кольцевых возмущений. Группа включает пять – семь кольцевых гребней и впадин, равномерно расширяющихся с удалением от источника. Наибольшую длину имеют первые элементы группы. У капиллярных волн такого же размера дисперсия обратная – внешние волны наиболее короткие, с приближением к источнику длина волн растет. Появление регулярных кольцевых возмущений связано с нестационарностью движения границы области слияния капли с принимающей жидкостью и осцилляциями контактной линии, визуализированными при растекании капли в тонком слое жидкости [40]. Образовавшаяся группа кольцевых возмущений захватывается радиальным поверхностным течением и переносится с сохранением кольцевых структурных особенностей, плавно деформирующихся с удалением от источника.

#### 5. Заключение

Высокоразрешающая регистрация картины слияния свободно падающей капли воды с частично дегазированной водой в лабораторном бассейне позволила выделить группу коротких кольцевых возмущений вокруг венца на границе области опережающей депрессии. Ширина пакета линейно растет со временем, скорости переднего и заднего фронта убывают. Со временем группа начальных возмущений поглощается более крупными кольцевыми капиллярными волнами.

Результаты детального изучения выделенных короткоживущих компонентов могут быть полезными при изучении рассеяния коротких электромагнитных волн на взволнованной поверхности жидкости в лабораторных и природных условиях.

#### Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в Лаборатории механики жидкостей ИПМех РАН при поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания, номер госрегистрации: 124012500442-3.

Авторы выражают благодарность В.Е. Прохорову за помощь в проведении экспериментов.

#### Литература

1. Russell S. Report on Waves (British Association, York, 1844). In: Reports of the Fourteens Meeting of the British Association for the Advancements of Science // London: John Murray. 1845. Pp. 311–390.
2. Thomson W. Hydrokinetic solutions and observations // Phil. Mag. 1871. Vol. 42. Pp. 362–377. DOI:10.1017/cbo9780511694523.031
3. Zhu F., Miao R., Xu C., Cao Z. Measurement of the dispersion relation of capillary waves by laser diffraction // Am. J. Phys. 2007. Vol. 75. No. 10. Pp. 896–898. DOI:10.1119/1.2750379

4. Behroozi F.; Lambert B., Buhrow B. Direct measurement of the attenuation of capillary waves by laser interferometry: Noncontact determination of viscosity // *Appl. Phys. Letters*. 2006. Vol. 78. No. 16. Pp. 2399–2402. DOI:10.1063/1.1365413
5. Стерлядкин В. В., Куликовский К. В. Измерение капиллярных волн лазерным волнографом // *Russ. Technol. J.* 2022. Т.10. № 5. С. 100–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-5-100-110>
6. Vines R. G. The damping of water waves by surface films // *Australian Journal of Physics*. 1960. Vol. 13. Pp. 43–51.
7. Rayleigh L. On the capillary phenomena of jets // *Proc. R. Soc. Lond.* 1879. Vol.29. Pp. 71–97.
8. Rayleigh L. On the stability of a cylinder of viscous liquid under capillary force // *Philos. Mag.* 1892. Vol. 34. Pp. 145–154.
9. Лэмб Г. Гидродинамика. ОГИЗ-ГИТТЛ М., Л-д. 1947. 928 с.
10. Longuet-Higgins M. S. Capillary-gravity waves of solitary type on deep water // *J. Fluid Mech.* 1989. Vol. 200. Pp. 451–470. DOI:10.1017/S002211208900073X
11. Longuet-Higgins M. S., Zhang X. Experiments on capillary-gravity waves of solitary type on deep water // *Phys Fluids*. 1997. Vol. 9. Pp. 1963–1968. <https://doi.org/10.1063/1.869315>
12. Sklavenites D. Wave patterns on a water column // *Am. J. Phys.* 1997. Vol. 65. No. 3. Pp. 225–230. DOI: 10.1119/1.18533
13. Awati K. M., Howes T. Standing waves on cylindrical fluid jets // in *12th Australasian Fluid Mechanics Conference*, edited by R. W. Bilger (University of Sydney, 1995), pp. 883–886. [https://www.afms.org.au/proceedings/12/Awati\\_and\\_Howes\\_1995.pdf](https://www.afms.org.au/proceedings/12/Awati_and_Howes_1995.pdf)
14. Awati K. M., Howes T. Stationary waves on cylindrical fluid jets // *Am. J. Phys.* 1996. Vol. 64. No. 6. Pp. 808–811. <https://doi.org/10.1119/1.18180>
15. Worthington A.M. On impact with a liquid surface, *Proc. R. Soc. London* 1883. Vol. 34. P. 217.
16. Rayleigh L. Some applications of photography // *Nature*. 1891. Vol. 44. Pp. 249–254. <https://doi.org/10.1038/044249e0>
17. Worthington A. M. *A Study of Splashes*. London: Longmans, Green and Co, 1908.
18. Edgerton H. E., Killian J. R. Jr. *Flash*. Boston: Hale, Cushman and Flint, 1939.
19. Thoroddsen S., Etoh T.G., Takehara K. High-Speed Imaging of Drops and Bubbles // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 40. No. 1. Pp. 257–285. DOI:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215
20. Prosperetti A., Ogūz H.N. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1993. Vol. 25. Pp. 577–602. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.25.010193.003045>
21. Le Méhauté B. Gravity–capillary rings generated by water drops // *J. Fluid Mech.* 1988. Vol.197. Pp. 415–427. DOI:10.1017/S0022112088003301
22. Craeye C., Sobieski P.W., Bliven L.F., Guissard A. Ring-waves generated by water drops impacting on watersurfaces at rest // *J. Oceanic Engineering*. 1999. Vol. 24. No. 3. Pp. 323–332.
23. Zhu G.Z., Li Z.H., Fu D.Y. Experiments on ring wave packet generated by water drop // *Chin. Sci. Bul.* 2008. Vol. 53. No. 11. Pp. 1634–1638. <https://doi.org/10.1007/s11434-008-0246-0>
24. Федорец А. А., Марчук И. В., Кабов О. А. О роли капиллярных волн в механизме коалесценции капельного кластера // *Письма в ЖЭТФ*. 2014. Т. 99, № 5. С. 307–310.
25. Чашечкин Ю. Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2021. № 1(94). С. 73–92. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-73-92>
26. Ильиных А. Ю., Чашечкин Ю. Д. Гидродинамика контакта падающей капли со свободной поверхностью жидкости // *Изв. РАН. Мех. жидк. и газа*. 2016. № 2. С. 3–12. DOI: 10.7868/S0568528116020092
27. Чашечкин Ю. Д., Прохоров В. Е. Гидродинамика удара капли: короткие волны на поверхности венца // *Докл. РАН*. 2013. Т. 451, № 1, С. 41–45.

28. Чашечкин Ю. Д. Визуализация тонкой структуры возмущений поверхности жидкости течениями, вызванными упавшей каплей // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83. № 3. С. 403–412. DOI: 10.1134/S0032823519030032
29. Reynolds O. On the action of rain to calm the sea // Proc. Lit. Phil. Soc. Manchester. 1874. Vol. 14, Session 1874–1875.
30. Peirson W. L., Beyá J. F., Banner M. L., Peral J. S., Azarmsa S. A. Rain-induced attenuation of deep-water waves // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 724. No. 1. Pp. 5–35. DOI:10.1017/jfm.2013.87
31. Naeser H. The capillary waves contribution to wind-wave generation // Fluids. 2022. Vol. 7. No. 73. <https://doi.org/10.3390/fluids7020073>
32. Райзер В. Ю., Черный И. В. Микроволновая диагностика поверхностного слоя океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1994. 231 с.
33. Прохоров В. Е., Чашечкин Ю. Д. Генерация гравитационно-капиллярных волн подводным источником звука // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45. № 4. С. 531–538.
34. Zhang S, Orosco J, Friend J. Onset of visible capillary waves from high-frequency acoustic excitation // Langmuir. 2023. Vol. 39, issue 10. Pp. 3699–3709. DOI:10.1021/acs.langmuir.2c03403
35. Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М.: Мир. 1977. 621 с.
36. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. Vol. 10, no. 4, 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
37. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // Axioms. 2022. Vol. 11. No. 8. P. 402. DOI: 10.3390/axioms11080402
38. УИУ “ГФК ИПМех РАН”: Гидрофизический комплекс для моделирования гидродинамических процессов в окружающей среде и их воздействия на подводные технические объекты, а также распространения примесей в океане и атмосфере. Сайт: <http://www.ipmnet.ru/uniquequip/gfk/#equip>
39. Chashechkin Yu. D., Ilinykh A. Y. Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest // Axioms. 2023. Vol. 12, Iss. 4. P. 374. <https://doi.org/10.3390/axioms12040374>
40. Li E. Q, Thoraval M.-J., Marston J. O., Thoroddsen S. T. Early azimuthal instability during drop impact // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 848. Pp. 821–835. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.383>

## References

1. Russell S., *Report on Waves* (British Association, York, 1844). In: Reports of the Fourteens Meeting of the British Association for the Advancements of Science. London: John Murray, 1845, pp. 311–390.
2. Thomson W., Hydrokinetic solutions and observations, *Phil. Mag.*, 1871, vol. 42, pp. 362–377. DOI:10.1017/cbo9780511694523.031.
3. Zhu F., Miao R., Xu C., Cao Z., Measurement of the dispersion relation of capillary waves by laser diffraction, *Am. J. Phys.*, 2007, vol. 75, no. 10, pp. 896–898. DOI:10.1119/1.2750379
4. Behroozi F., Lambert B., Buhrow B., Direct measurement of the attenuation of capillary waves by laser interferometry: Noncontact determination of viscosity, *Appl. Phys. Lett.*, 2006, vol. 78, no. 16, pp. 2399–2402. DOI:10.1063/1.1365413
5. Sterlyadkin V. V., Kulikovskiy K. V., Measurement of capillary waves with a laser wave recorder, *Russ. Technol. J.*, 2022, vol. 10, no. 5, pp. 100–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-5-100-110>
6. Vines R. G., The Damping of Water Waves by Surface Films, *Austr. J. Phys.*, 1960, vol. 13, pp. 43–51.
7. Rayleigh L., On the capillary phenomena of jets, *Proc. R. Soc. Lond.*, 1879, vol. 29, pp. 71–97.
8. Rayleigh L., On the stability of a cylinder of viscous liquid under capillary force, *Philos. Mag.*, 1892, vol. 34, pp. 145–154.
9. Lamb H., *Hydrodynamics*, New York: Cambridge Univ. Press, 1932.
10. Longuet-Higgins M. S., Capillary-gravity waves of solitary type on deep water, *J. Fluid Mech.*, 1989, vol. 200, pp. 451–470. DOI:10.1017/S002211208900073X

11. Longuet-Higgins M. S., Zhang X., Experiments on capillary-gravity waves of solitary type on deep water, *Phys. Fluids*, 1997, vol. 9, pp. 1963–1968. <https://doi.org/10.1063/1.869315>
12. Sklavenites D. Wave patterns on a water column, *Am. J. Phys.*, 1997, vol. 65, no. 3, pp. 225–230. DOI: 10.1119/1.18533
13. Awati K. M., Howes T., Standing waves on cylindrical fluid jets. In *12th Australasian Fluid Mechanics Conference*, edited by R. W. Bilger (University of Sydney, 1995), pp. 883–886. [https://www.afms.org.au/proceedings/12/Awati\\_and\\_Howes\\_1995.pdf](https://www.afms.org.au/proceedings/12/Awati_and_Howes_1995.pdf)
14. Awati K. M., Howes T., Stationary waves on cylindrical fluid jets, *Am. J. Phys.*, 1996, vol. 64, no. 6, pp. 808–811. <https://doi.org/10.1119/1.18180>
15. Worthington A. M., On impact with a liquid surface, *Proc. R. Soc. London*, 1883, vol. 34, issue 220–223.
16. Rayleigh L., Some applications of photography, *Nature*, 1891, vol. 44, pp. 249–254. <https://doi.org/10.1038/044249e0>
17. Worthington A. M., *A Study of Splashes*, London: Longmans, Green and Co, 1908.
18. Edgerton H. E., Killian J. R. Jr., *Flash*, Boston: Hale, Cushman and Flint, 1939.
19. Thoroddsen S., Etoh T. G., Takehara K., High-Speed Imaging of Drops and Bubbles, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 40, no. 1, pp. 257–285. DOI:10.1146/annurev.fluid.40.111406.102215
20. Prosperetti A., Ogūz H. N., The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1993, vol. 25, pp. 577–602. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.25.010193.003045>
21. Le Méhauté B., Gravity–capillary rings generated by water drops, *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, vol. 197, pp. 415–427. DOI:10.1017/S0022112088003301
22. Craeye C., Sobieski P. W., Bliven L. F., Guissard A., Ring-waves generated by water drops impacting on watersurfaces at rest, *J. Oceanic Engineering*, 1999, vol. 24, no. 3, pp. 323–332.
23. Zhu G. Z., Li Z. H., Fu D. Y., Experiments on ring wave packet generated by water drop, *Chin. Sci. Bul.*, 2008, vol. 53, no. 11, pp. 1634–1638. <https://doi.org/10.1007/s11434-008-0246-0>
24. Fedorets A. A., Marchuk I. V., & Kabov O. A., On the role of capillary waves in the mechanism of coalescence of a droplet cluster, *JETP Letters*, 2014, vol. 99, no. 5, pp. 266–269. doi:10.1134/s0021364014050087
25. Chashechkin Yu. D., Packets of capillary and acoustic waves of drop impact, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, vol. 1, no. 94, pp. 73–92 [in Russian]. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-1-73-91>
26. Il'inykh A. Y., Chashechkin Yu. D., Hydrodynamics of contact of a falling drop with a liquid free surface, *Fluid Dynamics*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 127–135. DOI 10.1134/S0015462816020010
27. Chashechkin Yu. D., & Prokhorov V. E., Drop-impact hydrodynamics: Short waves on a surface of the crown, *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 7, pp. 296–300. DOI:10.1134/s1028335813070021
28. Chashechkin Yu. D., Visualization of the Fine Perturbation Structure of a Liquid Surface by Flows Induced by a Drop Impact, *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, no. 7, pp. 919–926. DOI 10.1134/S0015462819070036
29. Reynolds O., On the action of rain to calm the sea, *Proc. Lit. Phil. Soc. Manchester*, 1874, vol. 14, Session 1874–1875.
30. Peirson W. L., Beyá J. F., Banner M. L., Peral J. S., Azarmsa S. A., Rain-induced attenuation of deep-water waves, *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 724, no. 1, pp. 5–35. DOI:10.1017/jfm.2013.87
31. Naeser H., The capillary waves contribution to wind-wave generation, *Fluids*, 2022, vol. 7, no. 73. <https://doi.org/10.3390/fluids7020073>
32. Raiser B. Yu., Cherny I. V., *Microvawe diagnostics of the ocean surface layer*, Sankt-Petersburg, Hydrometeoizdat, 1994. 231 pp. [in Russian].
33. Prokhorov V. E., Chashechkin Yu. D., Modeling the generation and gravity-capillary waves using an underwater sound source, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2009, vol. 45, no. 4, pp. 495–502. DOI 10.1134/S0001433809040094



34. Zhang S, Orosco J, Friend J., Onset of visible capillary waves from high-frequency acoustic excitation, *Langmuir*, 2023, vol. 39, issue 10, pp. 3699–3709. DOI: 10.1021/acs.langmuir.2c03403
35. Whitham G. B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and Sons, 1974.
36. Chashechkin Yu. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 4, p. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
37. Chashechkin Yu. D., Ochirov A. A., Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field, *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 8, p. 402. DOI: 10.3390/axioms11080402
38. Hydrophysical complex for modeling hydrodynamic processes in the environment and their impact on underwater technical objects, as well as the distribution of impurities in the ocean and atmosphere, Institute for Problems in Mechanics RAS. Available online: <http://ipmnet.ru/uniquequip/gfk> (accessed on 15 June 2023) [in Russian].
39. Chashechkin Yu. D., Ilinykh A. Y., Intrusive and impact modes of a falling drop coalescence with a target fluid at rest, *Axioms*, 2023, vol. 12, Issue 4, p. 374. <https://doi.org/10.3390/axioms12040374>
40. Li E. Q, Thoraval M.-J., Marston J. O., Thoroddsen S. T., Early azimuthal instability during drop impact, *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 848, pp. 821–835. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.383>

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2024 г.