Dynamics of Electrical and Gas Dynamic Characteristics of a Spark Discharge in a Sub-centimeter Gap with an External RLC-Circuit

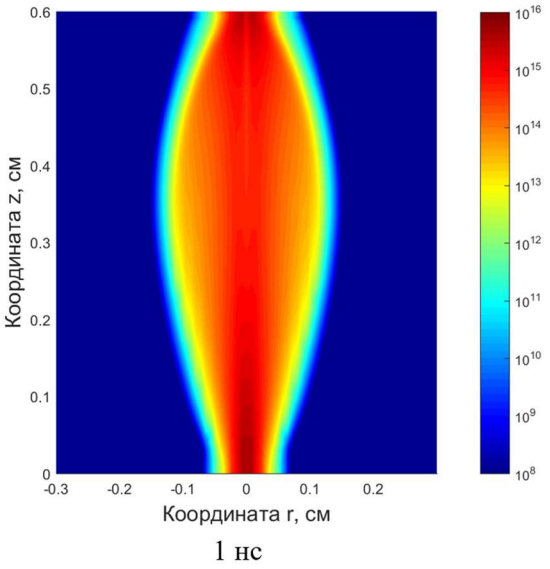
E. A. Ermakov, I. E. Ivanov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia
eg.ermakov2013@yandex.ru

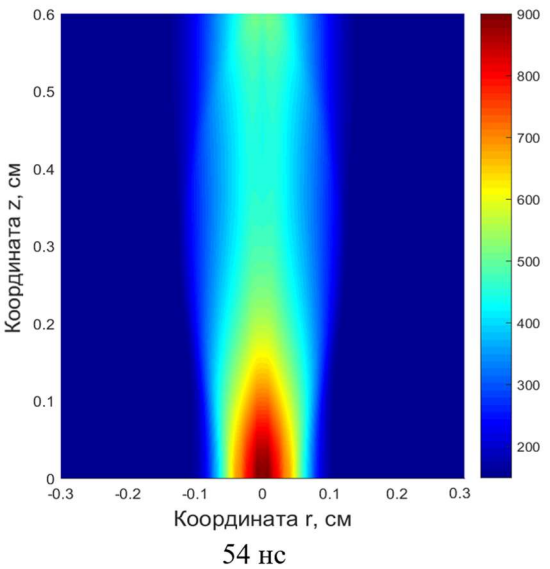
Abstract

In this paper, the process of streamer development is numerically studied with its subsequent closure on the electrodes and the formation of spark channel at an initial temperature of 300 K and a pressure of 150 Torr in an *RLC*-circuit. The algorithm is based on a drift-diffusion model for gas discharge and an Euler system of equations for describing the dynamics of an ideal gas. The external part of the electrical circuit is taken into account by solving a system of ordinary differential equations for the time dependencies of the potential at the anode, the voltage at the capacitor and the current. The discharge is initiated by a 0.1 nF capacitor initially charged to a voltage of 25 kV, which is discharged through an inductor with inductance of 0.5 μH, a 100 Ω resistor and a gas discharge gap. The paper presents the dynamics of electron density (before and after the closure of the discharge gap by the streamer), and also shows its relationship with electric field strength and current density. The fields of pressure, density, and temperature at the stage of heat input to the spark channel are studied.

Keywords: numerical simulation, spark channel, drift-diffusion model, *RLC*-circuit, energy input.



$n_e(z,r)$ distribution after streamer's closure on the electrodes ($t = 1$ ns)



$p(z,r)$ distribution for neutral gas after active phase of heat input ($t = 54$ ns)

УДК: 533.95; 537.311.6; 537.52

Динамика электрических и газодинамических характеристик искрового разряда в субсантиметровом промежутке с внешней RLC-цепью

Е. А. Ермаков, И. Э. Иванов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, д.1, стр. 2
eg.ermakov2013@yandex.ru

Аннотация

В данной работе численно исследуется динамика процесса развития стримера с его последующим замыканием на электродах и образованием искрового канала при начальной температуре 300 K и давлении 150 Торр в *RLC*-контуре. В основе алгоритма лежит диффузионно-дрейфовая модель электрического разряда в газе и система уравнений Эйлера для описания динамики идеального газа. Учет внешней части электрической цепи осуществляется посредством решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для временных зависимостей потенциала на аноде, напряжения на конденсаторе и силы тока. Разряд инициирует изначально заряженный до напряжения 25 кВ конденсатор емкостью 0.1 нФ, разряжающийся через катушку индуктивности 0.5 мкГн, резистор 100 Ом и газоразрядный промежуток. В работе представлена динамика плотности электронов (до замыкания межэлектродного зазора стримером и после), а также исследована ее связь с напряженностью электрического поля и плотностью тока. Изучены поля давления, плотности и температуры на этапе подвода тепла в искровой канал.

Ключевые слова: численное моделирование, искровой канал, диффузионно-дрейфовая модель, RLC-контур, энерговклад.

1. Введение

Исследование импульсного наносекундного газового разряда в рамках лабораторного эксперимента тесно связано с получением данных об электрическом токе в контуре (экспериментаторами снимаются осциллограммы силы тока в цепи и напряжения на ее различных участках). Помимо этого, параллельно исследуются газодинамические структуры (ударные волны и контактные разрывы) и тепловые процессы в газоразрядном промежутке, поскольку инициирование разрядов с высокой силой тока напрямую связано с импульсным энерговкладом в исследуемую область. Время протекания тока между электродами в физическом эксперименте, как правило, имеет разброс от единиц до нескольких сотен наносекунд [1–6], что на несколько порядков меньше времени развития газодинамических процессов, имеющего порядок микросекунд [4, 7,8].

Помимо лабораторных исследований сильноточных разрядов в последние несколько десятилетий активно ведутся работы по численному моделированию данных процессов. Так, например, в работах [9, 10] приводятся результаты моделирования газоразрядных процессов в субсантиметровых зазорах в покоящемся воздухе при атмосферном давлении с различной начальной температуре (300 K и 1000 K). Авторами исследуется эволюция газодинамических

характеристик на разных временных масштабах: как на этапе приложения импульса напряжения между электродами протяженностью до 10 нс, так и на этапе распространения цилиндрической ударной волны от плазменного канала вследствие выделения тепловой энергии и быстрого расширения разогретого искрового канала на временных промежутках до 10 мкс. В обоих случаях наблюдаются неоднородные поля температуры (вблизи электродов ярко выражены области с повышенным значением температуры). Авторами варьируется доля энергии, направленная на нагрев газа внутри искрового канала (в диапазоне от 15% до 60%), а также исследуется роль процесса предионизации в формировании и распространении разряда между точечными электродами [10]. В работах [11, 12] численно изучается процесс перехода разряда типа «стример-искра». Приводятся результаты квазиодномерного моделирования разряда после его замыкания на электродах, в котором источником тока выступает заряженный конденсатор. Путем варьирования тока в цепи достигается диаметр плазменного канала около 0.1 мм (нетермическая плазменная нить с температурой газа внутри $2 \div 3$ кК).

Немаловажную роль в динамике разряда и, следовательно, в динамике газодинамических характеристик играет внешняя электрическая цепь, подключаемая к газоразрядному промежутку, поскольку она сильно влияет на эволюцию силы тока в контуре. Данному вопросу посвящены работы [13–15], в которых исследуется радиальная эволюция газодинамических параметров после замыкания разряда на электродах. Коррекция силы тока обеспечивается с помощью решения уравнения баланса напряжений в контуре. Численный алгоритм включает в себя решение уравнений химической кинетики, системы газодинамических уравнений, а также вычисление переменного во времени сопротивления искрового канала. Результаты расчетов демонстрируют распространение от оси симметрии расходящейся цилиндрической ударной волны. Временная зависимость введенной в разрядную область тепловой энергии [14] отражает плавное уменьшение мощности тепловыделения со временем и, следовательно, выход на насыщение, при котором значимый подвод тепла прекращается.

В ряде лабораторных исследований [16–18] разряд инициируется изначально заряженным до высокого напряжения ($20 \div 30$ кВ) конденсатором (или же системой конденсаторов). Источник подсоединяется к газоразрядному промежутку посредством резисторов и соединительных проводов (имеющих как омическое сопротивление, так и индуктивность), что позволяет рассматривать лабораторную установку как *RLC*-контур. Целью данной работы является исследование электрических и тепловых процессов в *RLC*-контуре на этапе после формирования искрового канала между электродами с учетом характеристик внешней электрической цепи.

2. Математическая модель

Реализованный в данной работе численный алгоритм, описывающий динамику разряда, основывается на двух приближениях. Первым является широко распространенная диффузионно-дрейфовая модель для трехкомпонентной плазмы молекулярного азота (сплошной среды, состоящей из газа положительно заряженных ионов и электронов, а также нейтрального газа), описываемая следующей системой уравнений для заряженных частиц [19–24]:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{e}} = S_i - L_{ep}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{p}} = S_i - L_{ep}, \tag{2}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0}\left(n_p - n_e\right), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{\Gamma_e} = -\mu_e n_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \tag{4}$$

$$\mathbf{\Gamma_p} = \mu_p n_p \mathbf{E} - D_p \nabla n_p + n_p \mathbf{v}, \tag{5}$$

$$S_i = \alpha \mu_e |\mathbf{E}| n_e, \tag{6}$$

$$L_{ep} = \beta n_e n_p, \tag{7}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \tag{8}$$

Здесь n_e – плотность электронов; $\mathbf{\Gamma_e}$ – вектор плотности потока электронов; μ_e – подвижность электронов; $D_e = \mu_e T_e$ – коэффициент диффузии электронов; T_e – температура электронов (аналогичным образом введены обозначения с индексом «p» для положительно заряженных ионов); $\mathbf{v}$ – скорость потока нейтрального газа; S_i – скорость столкновительной ионизации; L_{ep} – скорость электрон-ионной рекомбинации; α – коэффициент ударной ионизации; β – константа скорости рекомбинации; φ, $\mathbf{E}$ – потенциал и напряженность электрического поля. Константы: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд; $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-14}$ Ф/см – электрическая постоянная.

Система (1)–(3) состоит из двух уравнений непрерывности для электронов (1) и положительных ионов (2), описывающих их динамику, а также уравнения Пуассона (3), с помощью которого определяется потенциал локального электрического поля. Вектора плотности потоков (4) и (5) состоят из дрейфового и диффузионного слагаемых (для положительно заряженных ионов присутствует дополнительное третье слагаемое, связанное с переносом положительных ионов с нейтральным газом со скоростью нейтрального газа).

Совместно с диффузионно-дрейфовой моделью используется система уравнений Эйлера для нейтрального идеального газа (невязкого и нетеплопроводящего)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \mathbf{v} = -\nabla p, \tag{10}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}[(p + \rho E)\mathbf{v}] = \eta (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}), \tag{11}$$

где

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}, \tag{12}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \tag{13}$$

Здесь $\rho, p, \mathbf{v}$ – плотность, давление и скорость нейтрального газа; E – полная объемная энергия нейтрального газа; γ – показатель адиабаты; $\mathbf{j} = \mathbf{\Gamma} e = (\mathbf{\Gamma_p} - \mathbf{\Gamma_e}) e$ – плотность тока; C_p, C_V – изобарная и изохорная теплоемкости газа; η – доля джоулева тепла, направленная на энерговклад в разрядном промежутке.

Поскольку в данной работе рабочим является двухатомный газ (молекулярный N_2), то для него используется показатель адиабаты $\gamma = 1.4$, который на протяжении всего вычислительного эксперимента остается величиной постоянной. В рамках численного моделирования в искровом канале реализуется доля джоулева тепла $\eta = 0.05 \div 0.1$, что соотносится с работами [14, 19, 25].

Решение задачи рассматривается в цилиндрической области, торцами которой выступают плоские электроды (межэлектродное расстояние составляет $l_z = 0.6$ см, радиус электродов – $l_r = 0.6$ см), в осесимметричной постановке. Начало системы координат вводится в центре катода, причем ось Oz направлена вдоль оси симметрии к аноду, а ось Or – параллельно плоскости катода от оси симметрии (рис. 1).

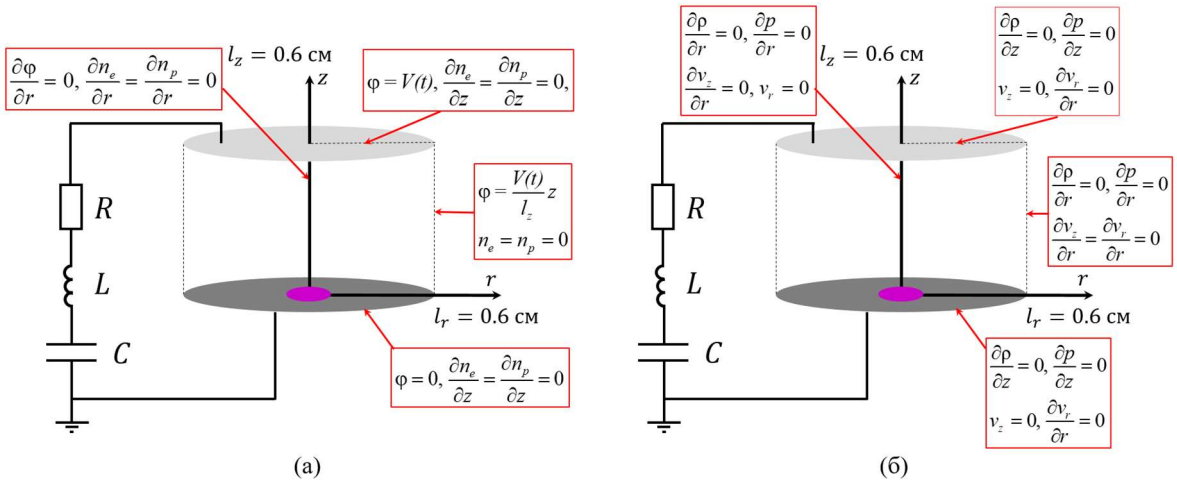


Рис. 1. Схема лабораторной установки в вычислительном эксперименте с граничными условиями: (а) для диффузионно-дрейфовой модели, (б) для системы уравнений Эйлера

Граничные условия для каждой модели представлены на рис. 1. Для диффузионно-дрейфовой модели на катоде выставляется нулевое значение потенциала электрического поля (электрод заземлен), а на аноде – меняющийся со временем потенциал $V(t)$, соответствующий падению напряжения в газоразрядном промежутке. Поскольку анодный потенциал напрямую зависит от характеристик внешней части электрической цепи и, следовательно, играет важную роль в динамике развития разряда, то требуется его коррекция (данный вопрос будет рассмотрен в разделе «Коррекция анодного потенциала в газоразрядном промежутке»). Радиальный размер области подбирается таким образом, чтобы в течение времени расчета вблизи боковых стенок расчетной области отсутствовали электроны и положительно заряженные ионы, а электрическое поле было невозмущенным.

Для газодинамической части в силу осесимметричной постановки задачи ставится нулевое значение радиальной компоненты скорости на оси симметрии, а на электродах – нулевое значение осевой компоненты скорости (отсутствует протекание газа через стенки).

В начальный момент времени в газоразрядном промежутке рассматривается покоящийся газ при температуре 300 K и давлении 150 Торр (аналогично лабораторным экспериментам в [16–18]). На ранней стадии моделируется распространение только анодонаправленного стримера, для чего в начальный момент времени около поверхности катода задается «затравочное» пятно квазинейтральной плазмы с профилем

$$n_e\big|_{t=0} = n_p\big|_{t=0} = 10^9 \cdot \exp\left(-\frac{z^2+r^2}{\sigma^2}\right) \text{см}^{-3}, \qquad (14)$$

где $\sigma = 10^{-2}$ см.

3. Характеристики плазмы и элементов внешней элнетрической цепи

Как отмечалось в предыдущем разделе, в данной работе в континуальном приближении рассматривается трехкомпонентная плазма молекулярного азота, состоящая из газа электронов, газа положительно заряженных ионов и нейтрального газа. Уравнения диффузионно-дрейфовой модели, записанные для электронов и положительно заряженных ионов (нейтра-

лы учитываются в конвективном слагаемом уравнения для ионов), содержат в себе транспортные параметры [19, 26, 27], представленные в табл. 1.

Таблица 1

Транспортные параметры в диффузионно-дрейфовой модели

Параметр	Значение
T_e, эВ	2
T_p, эВ	2.58×10^{-2}
μ_e, см^2 В$^{-1}$ с$^{-1}$	$\dfrac{4.5\times10^5}{p^*}$
μ_p, см^2 В$^{-1}$ с$^{-1}$	$\dfrac{1.45\times10^3}{p^*}$
$\dfrac{\alpha}{p^*}$, см$^{-1}$ Торр$^{-1}$	$12\cdot\exp\left(-342\left(\dfrac{\lvert\mathbf{E}\rvert}{p^*}\right)^{-1}\right)$
β, см$^{-3}$ с	2×10^{-7}
p^*, Торр	$p\dfrac{293}{T}$

Плазма является низкотемпературной и неравновесной. Подвижности заряженных частиц μ_e, μ_p, а также их коэффициенты диффузии D_e, D_p являются функциями эффективного давления p^*, пропорционального плотности газа. Коэффициент ударной ионизации α является функцией приведенного поля $|\mathbf{E}|/p^*$, которое в свою очередь также зависит от эффективного давления.

Как было показано на рис. 1, в данной работе рассматривается замкнутый линейный электрический контур. Однако реальные лабораторные установки, как правило, имеют намного более сложные схемы соединения внешней части электрического контура (они содержат наборы конденсаторов для начальной зарядки и дальнейшей перезарядки, множество резисторов и иных элементов). Для проведения вычислительного эксперимента можно ограничиться использованием упрощенного варианта линейного соединения эквивалентных элементов. Авторами выбраны величины параметров, имеющие такой же порядок значений, как и в лабораторной установке, с помощью которой проводились исследования [16–18]. Так, например, электроемкость конденсатора берется равной $C = 0.1$ нФ (с его помощью инициируется электрический разряд – в начальный момент конденсатор заряжен до напряжения 25 кВ). Катушка индуктивность в рассматриваемой цепи является элементом, эквивалентным суммарной индуктивности соединительных проводов. Полагая, что кабель является медным и имеет длину несколько метров с сечение несколько единиц мм^2, величина индуктивности считается равной $L = 0.5$ мкГн. Балластное сопротивление внешней цепи составляет $R = 100$ Ом. Оценки емкости и индуктивности разрядного промежутка показали, что они имеют на несколько порядков меньшее значение по сравнению с емкостью конденсатора внешней цепи и индуктивностью катушки индуктивности, что позволяет ими пренебречь.

4. Коррекция анодного потенциала в газоразрядном промежутке

Во многих лабораторных экспериментах на динамику газового разряда в межэлектродном зазоре сильно влияет ток в цепи, который является переменным как по направлению, так

и по величине. При этом проводимость участка цепи, совпадающего с межэлектродным зазором, меняется во времени. В этих условиях потенциал электрического поля на аноде не является величиной постоянной, в связи с чем требуется дополнительно с уравнениями диффузионно-дрейфовой модели решать уравнения для коррекции тока во всем контуре и напряжений на каждом элементе цепи.

Вопросу коррекции потенциала на аноде как граничного условия при моделировании разрядов посвящены работы [19, 28]. В [28] рассматривается замкнутый линейный электрический контур, состоящий из батареи с постоянным значением ЭДС ε, балластного сопротивления R_0 и газоразрядного промежутка с падением напряжения на нем $V(t)$. Авторами получено дифференциальное уравнение для величины заряда на аноде $q(t)$, содержащее $V(t)$ и учитывающее накопление заряда на электродах. В монографии [19] предложена модернизация модели из [28], при этом дифференциальное уравнение для $q(t)$ выведено путем интегрирования уравнения для циркуляции магнитного поля из системы уравнений Максвелла. В целом, модель доработана с целью повышения устойчивости счета всего алгоритма.

Еще один вариант математической модели задания нестационарного значения падения напряжения на промежутке для электрической цепи, аналогичной в работе [28], предложен в [19] и представляет собой равенство суммы всех падений напряжений на участках цепи в каждый момент времени постоянному значению ЭДС источника ε

$$I(t)R_0 + V(t) = \varepsilon\,, \tag{15}$$

где R_0 – сопротивление внешней цепи; $I(t)$ – сила тока в цепи; $V(t)$ – падение напряжения на разрядном промежутке; ε – ЭДС источника в электрической цепи.

Авторами в [29] на основе [19, 22, 30] предложен вариант математической модели задания граничного условия для потенциала поля на аноде в виде системы обыкновенных дифференциальных и функциональных уравнений для моделирования газового разряда в промежутке с внешним *RLC*-контуром (внешняя цепь содержит конденсатор электроемкостью *C*, резистор с сопротивлением *R* и катушку индуктивности *L*). Вывод соотношений опирался на преобразование уравнений диффузионно-дрейфовой модели разряда (использовались уравнение сохранения заряда, теорема Гаусса – уравнение Пуассона для электрического поля, где последнее уравнение дифференцировалось по времени, а полученные соотношения затем интегрировались по всей расчетной области).

В результате получена система уравнений для коррекции напряжений и тока в *RLC*-контуре

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2e}{\varepsilon_0 l_r^2}\displaystyle\int_0^{l_r}\int_0^{l_z}\Gamma_z(z,r,t)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \dfrac{l_z}{\varepsilon_0\pi l_r^2}I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{I(t)}{C}, \\ \dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{U(t) - I(t)R - V(t)}{L}, \\ I(t)R + V(t) - U(t) = \varepsilon_{is}(t), \end{cases} \tag{16}$$

где $\Gamma_z(z,r,t)$ – осевая компонента плотности потока заряженных частиц; $U(t)$ – напряжение на обкладках конденсатора во внешней цепи; $\varepsilon_{is}(t) = -L\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$ – ЭДС самоиндукции на катушке индуктивности.

5. Численные методы решения задачи

Решение задачи производится на декартовой равномерной разностной сетке размера 101×101 в цилиндрической системе координат.

Поскольку система уравнений газодинамики Эйлера, а также уравнения для электронов и положительно заряженных ионов диффузионно-дрейфовой модели имеют гиперболический вид, то для их решения применяется квазимонтонная консервативная схема в виде метода С.К. Годунова [31, 32] (в данной работе рассматривается его явный вариант второго порядка точности). Данный метод допускает наличие большого числа разрывов в течении, а также областей с сильными градиентами. В рамках решения газодинамической части задачи применяется приблизительный метод решения HLL (Harten, Lax, van Leer), основанный на определении потоков через боковые грани контрольного объема [33]. При решении уравнений для электронов и положительно заряженных ионов метод Годунова эквивалентен применению противопоточных схем (для вычисления дрейфового и конвективного переноса). Так как гиперболические уравнения предполагают перенос физических величин с конечной скоростью, то на шаг по времени τ накладывается ограничение, определяемое критерием Куранта – Фридрихса – Леви (использовалось значение $\tau = 10^{-13}$ с).

Уравнение Пуассона, которое дополнительно включается в диффузионно-дрейфовую модель, имеет эллиптический тип и дает распространение возмущений с неограниченной скоростью. При его аппроксимации на разностной сетке с помощью схемы «крест» образуется СЛАУ. Существует большое количество метод решения подобных систем, однако для ускорения сходимости итерационного процесса к точному решению в данной работе применяется один из наиболее эффективных методов – метод Гаусса-Зейделя с верхней релаксацией [34]. Он предполагает введение дополнительных слагаемых в СЛАУ, содержащих параметр ω. Данный параметр подбирается таким образом, чтобы скорость сходимости к точному решения была наиболее высокой (параметр подбирается индивидуально в зависимости от размера сетки). В данной работе $\omega = 1.947$.

На рис. 2 представлена последовательность работы вычислительного алгоритма.

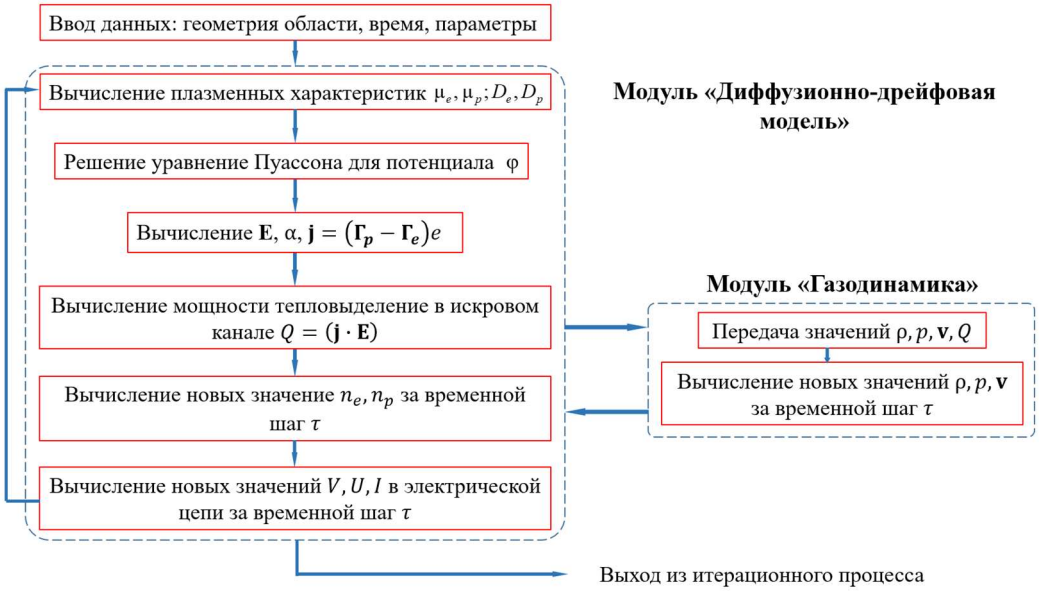
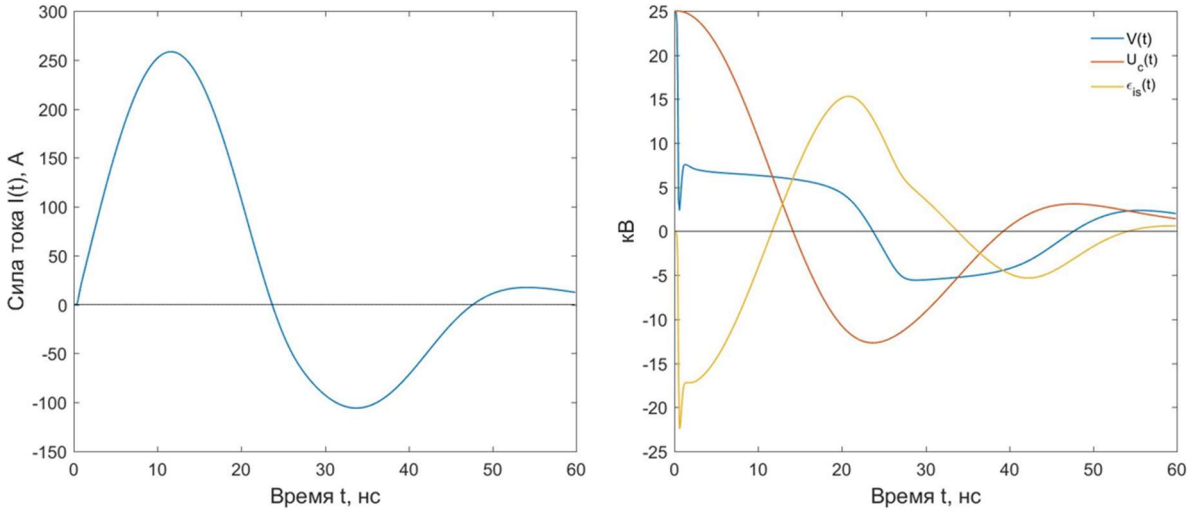


Рис. 2. Схема алгоритма решения задачи

6. Динамика силы тока в электрическом контуре

Численное моделирование процесса развития отрицательного стримера в лабораторной установке (рис. 1) в более ранних исследованиях [20, 21] показало, что время замыкания разрядом межэлектродного зазора при атмосферном давлении составляет около 21 нс. Также было установлено, что при пониженном давлении время замыкания межэлектродного зазора искровым каналом уменьшается почти на порядок (при уменьшении фонового давления в два раза) [21]. Расчет коэффициента ударной ионизации Таунсенда на основе формулы из табл. 1 дает следующие результаты: при давлении 760 Торр $\alpha = 17.8$ см$^{-1}$; при давлении 150 Торр – $\alpha = 525.5$ см$^{-1}$ (напряженность в обоих случаях берется одинаковой и равной значению в начальный момент времени $|\mathbf{E}| = 41.6$ кВ/см). Таким образом, скорость ионизации путем соударений разогнанных электронов с нейтральными молекулами во втором случае выше почти в 30 раз, что приводит к большей плотности электронов вблизи головки стримера. В следствие этого искровой канал формируется за значительно меньшее время – около 0.5 нс. В расчетах величина приведенного поля составляла $|\mathbf{E}|/p^* = 278$ В/(см×Торр), что соответствует диапазону применимости эмпирической формулы для коэффициента ионизации Таунсенда [26, 35].

На рис. 3, а представлена временная зависимость силы тока в цепи с разрядным промежутком, конденсатором, катушкой индуктивности и балластным сопротивлением. Эта зависимость демонстрирует колебательный процесс в электрическом контуре: меняется как направление протекания тока, так и его величина. Временной профиль имеет два максимума и один минимум, что свидетельствует о наличии свободных затухающих колебаний в *RLC*-контуре. Первый максимум достигается к моменту $t = 12$ нс с момента замыкания цепи (величина тока составляет 258 А). Затем наблюдается этап спада с прохождением величины тока через ноль ($t = 24$ нс): в этот момент потенциал на аноде также обращается в ноль (рис. 3, б), после чего меняется полярность электродов и ток начинает протекать в противоположном направлении.



(а) (б)

Рис. 3. (а) – зависимость силы тока $I(t)$; (б) – рависимости потенциала на аноде $V(t)$, напряжения на конденсаторе $U(t)$ и ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{is}(t)$

В момент времени $t = 34$ нс достигается минимум силы тока (−105 А). Знак «–» отражает направление протекания тока, противоположное начальному. Затем величина силы тока второй раз обращается в ноль ($t = 48$ нс – аналогично, анодный потенциал также равен нулю) и выходит на второй максимум в 17 А в момент времени $t = 54$ нс. Достижение экстремумов тока сопровождается перезарядкой конденсатора, при которой меняется полярность обкладок относительно времени достижения предыдущего экстремума силы тока. После второго

максимума силы тока запаса энергии конденсатора как источника недостаточно для инициирования очередной осцилляции, поскольку в нем остается примерно в 130 меньше запасенной энергии относительно начального значения. По этой причине наблюдается релаксационный режим временной зависимости силы тока в цепи (происходит плавная разрядка подобно работе *RC*-контура).

Динамика прорастания стримера до его замыкания на электродах при пониженном давлении демонстрирует «нетипичный» эффект (серия изображений на рис. 4). Видно, что к моменту времени $t = 0.3$ нс наблюдается расщепление головки стримера. Данный вопрос детально обсуждается в работах [36, 37], где положение ветвления авторы связывают с пределом идеальной проводимости плазмы (качественно наблюдаемый результат объясняется лапласовой неустойчивостью вблизи кончика стримера, развивающейся при преодолении некоторой критической длины экранирования). Головка стримера с высокой плотностью электронов ($n_e \sim 10^{14} \div 10^{15}$ см$^{-3}$) оставляет позади себя разветвленный ионизированный «след». За счет активной генерации электронов вблизи фронта ионизации наблюдается их кулоновское отталкивание, которое приводит к радиальному расширению головки.

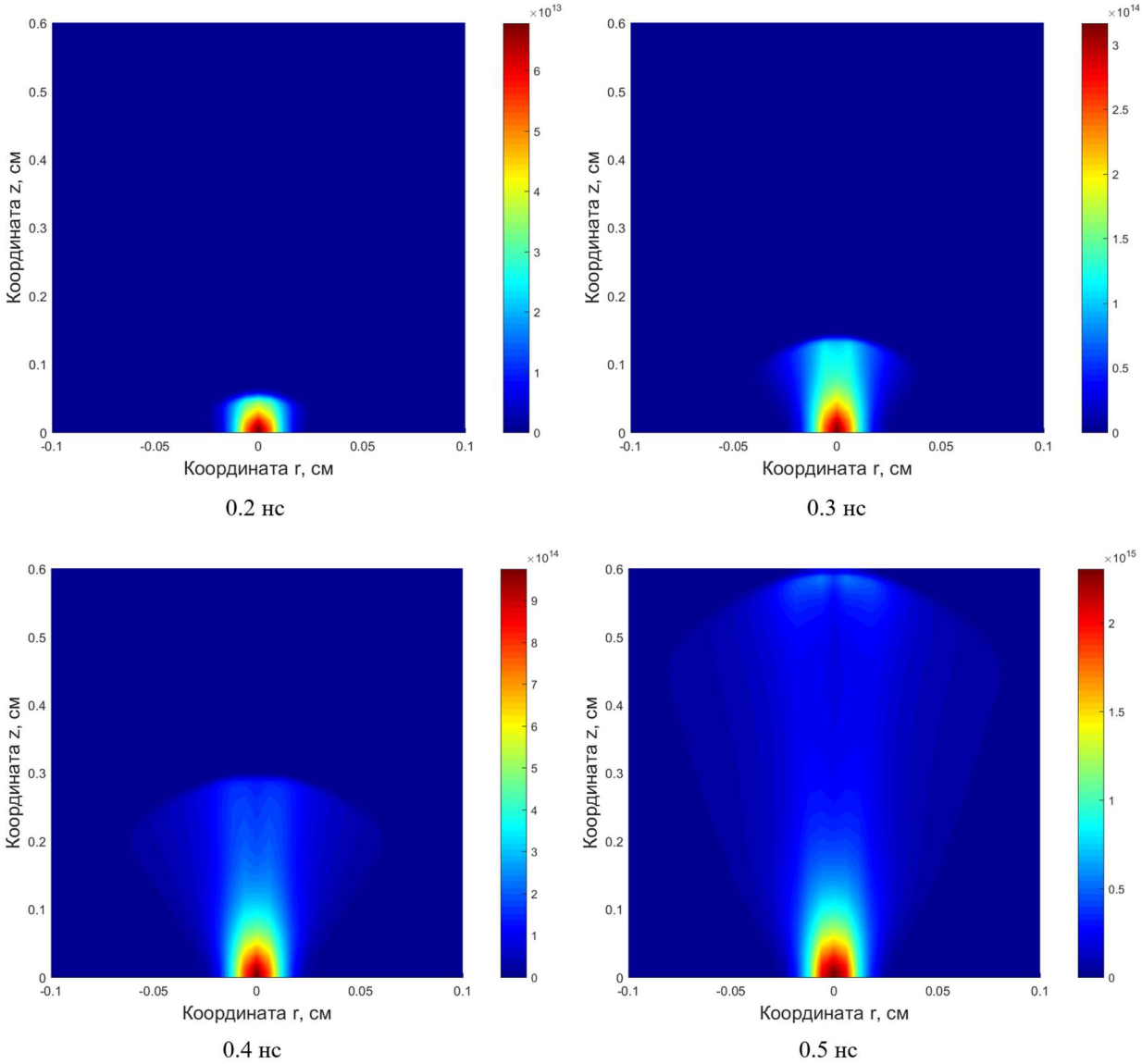
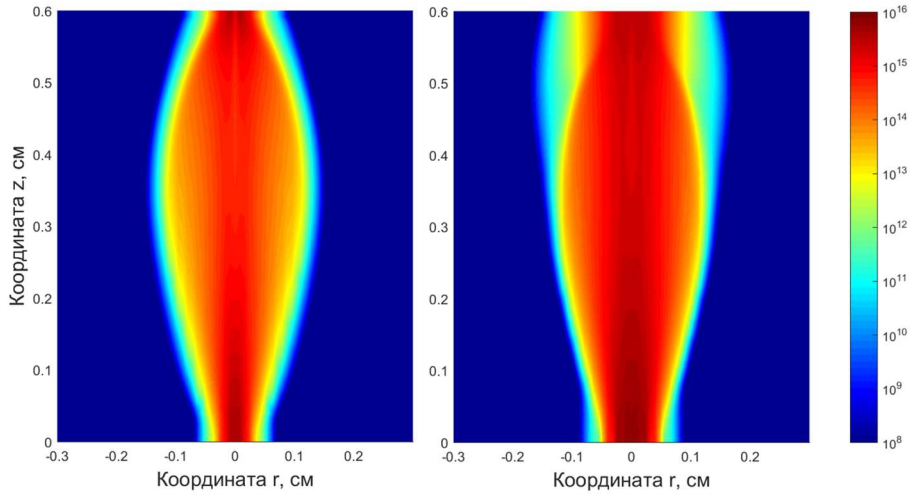
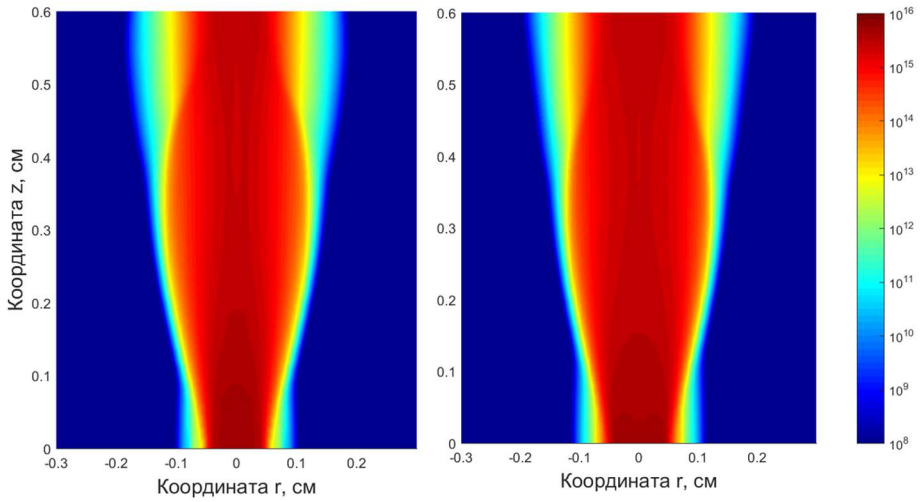
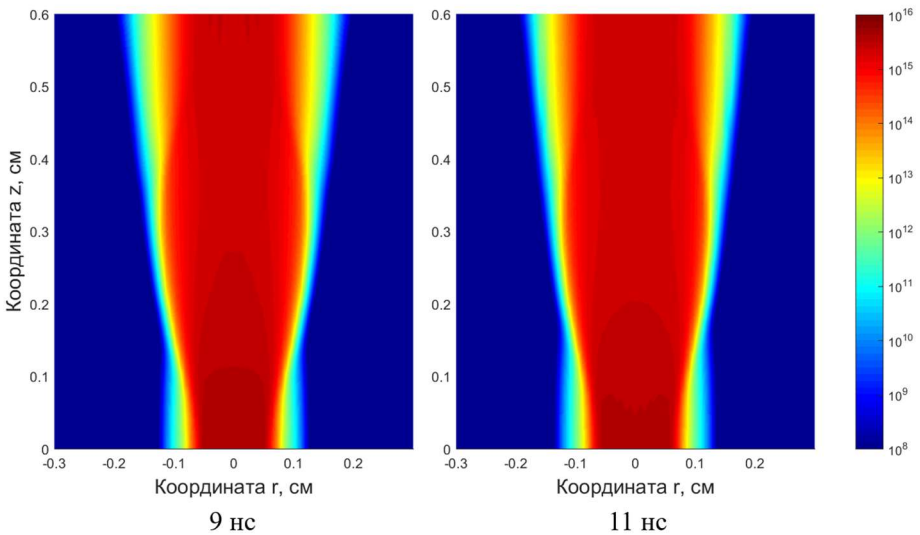


Рис. 4. Динамика стримера до замыкания на электродах для моментов времени $t = 0.2$; 0.3; 0.4 и 0.5 нс

Головка стримера касается анода примерно к 0.5 нс с момента замыкания цепи. В этот время в образовавшемся искровом канале наблюдается рост плотности электронов. Сразу после замыкания поле плотности электронов n_e неоднородно (рис. 5): на оси наблюдается его небольшой «провал» (уменьшение в радиальном направлении).







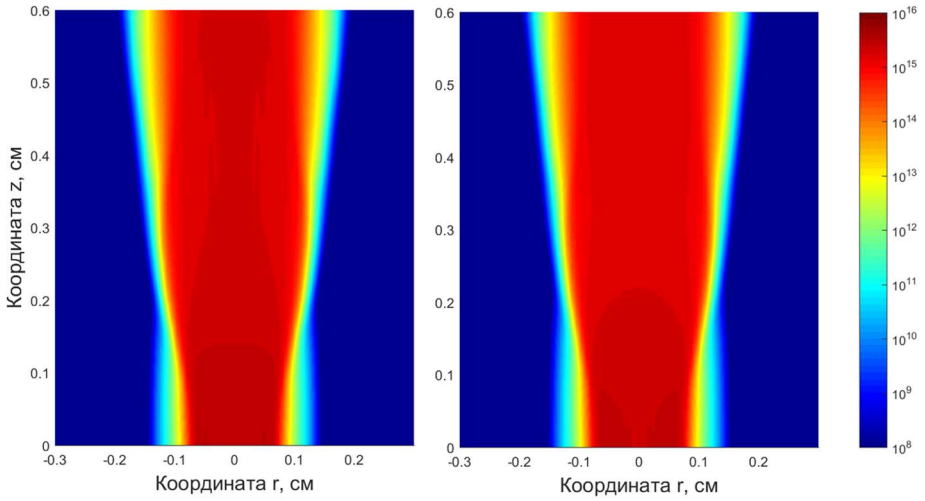


Рис. 5. Поле плотности электронов $n_e(z,r,t)$ для моментов времени 1; 3; 5; 7; 9; 11;13 и 15 нс

Однако в течение нескольких наносекунд в околоосевой области поле n_e выравнивается и к моменту примерно 12 нс, когда достигается первый максимум силы тока, становится однородным (за исключением области в районе катода, где оно выше на протяжении всего вычислительного эксперимента). В интервале времени от 1 до 11 нс вблизи сечения $z = 0.3$ см наблюдается небольшое уширение искрового канала в радиальном направлении, которое постепенно замедляется: к 11 нс искровой канал расширяется так, что его диаметр становится постоянным (около 2 мм) для диапазона значений осевой координаты $0.2\text{ см} < z < 0.6\text{ см}$. В прикатодной области $z < 0.1$ см при этом подобное уширение не наблюдается.

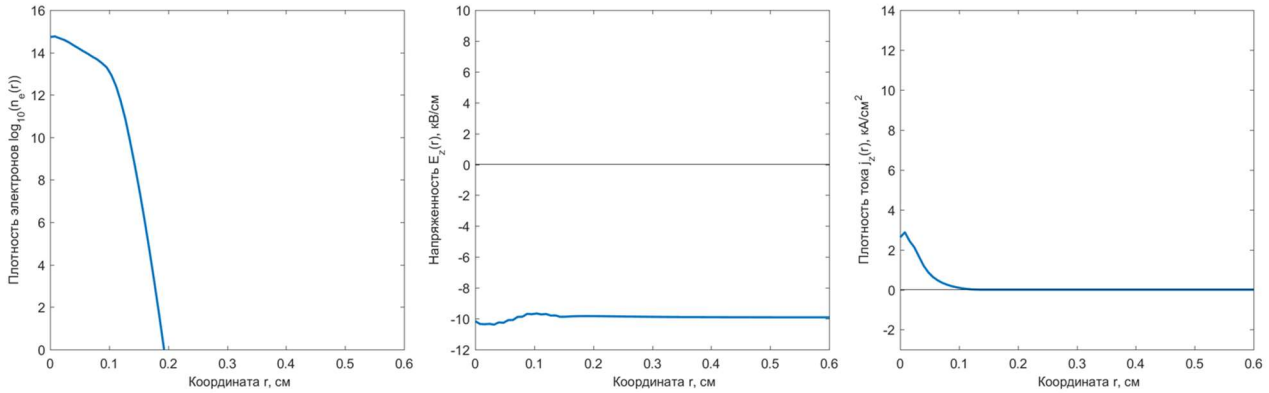
Дальнейший анализ динамики поля n_e для простоты допустимо свести к рассмотрению квазиодномерной задачи, в которой изучаются процессы в центральном сечении между электродами $z = 0.3$ см. В это время в искровом канале находится квазинейтральная плазма с нулевым (в среднем) объемным зарядом. На рис. 6 приводится серия графиков, иллюстрирующая радиальную эволюцию плотности электронов $\log_{10} n_e(r,t)$, осевую компоненту вектора напряженности $E_z(r,t)$ и осевую компоненту плотности тока $j_z(r,t)$. Построенные графики соответствуют: началу протекания тока (1 нс), положениям экстремумов тока (максимумы – 12 нс, 54 нс; минимум – 34 нс), а также его прохождению через нулевое значение (24 нс и 48 нс).

В проводящем искровом канале плотность тока подчиняется соотношению (с учетом слабой подвижности положительных ионов) [26, 35]

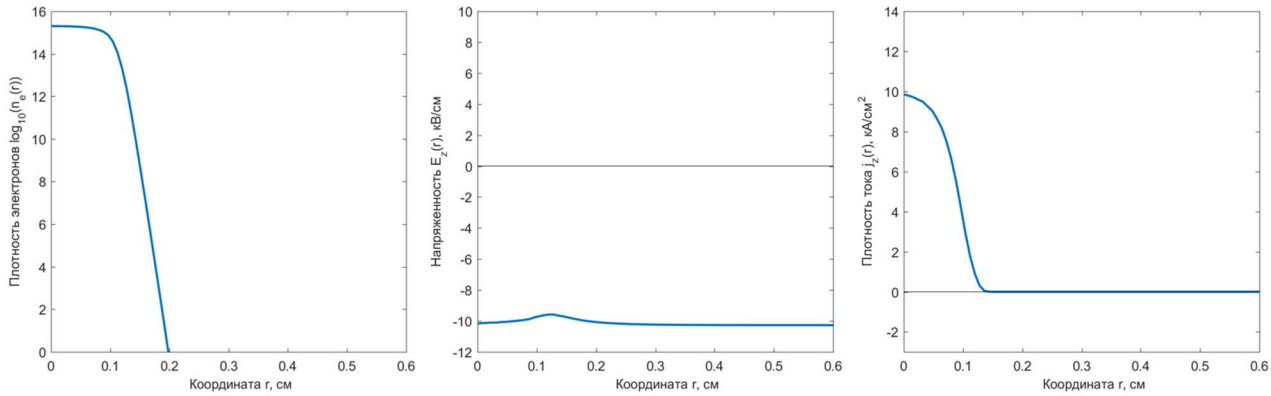
$$\mathbf{j} = -en_e\mu_e\mathbf{E} \tag{17}$$

Подвижность электронов $\mu_e\left(p^*\right)$ в расчетной области остается слабо изменяемой величиной на протяжении всего вычислительного эксперимента (имеются ее незначительные отклонения до 0.5 % относительно средней величины). Это позволяет считать подвижность постоянной во всех расчетах. Динамика n_e и $\mathbf{E}$ вносят наиболее существенный вклад в развитие искрового канала. Поскольку электрический ток в основном протекает в осевом направлении, то дальнейшие сравнения будут приводится только для осевых компонент векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$.

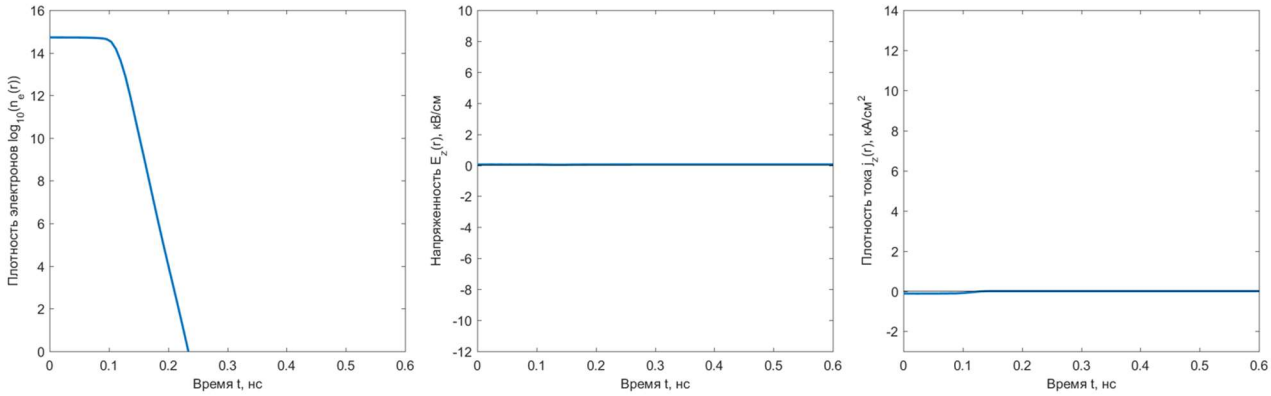
В соответствии с уравнением (8) вектор $\mathbf{E}$ направлен от анода к катоду (против движения электронов), в связи с чем величина E_z является отрицательной. К моменту достижения первого максимума тока ($t = 12$ нс) величина n_e достигает своего максимального значения на оси 2×10^{15} см$^{-3}$.



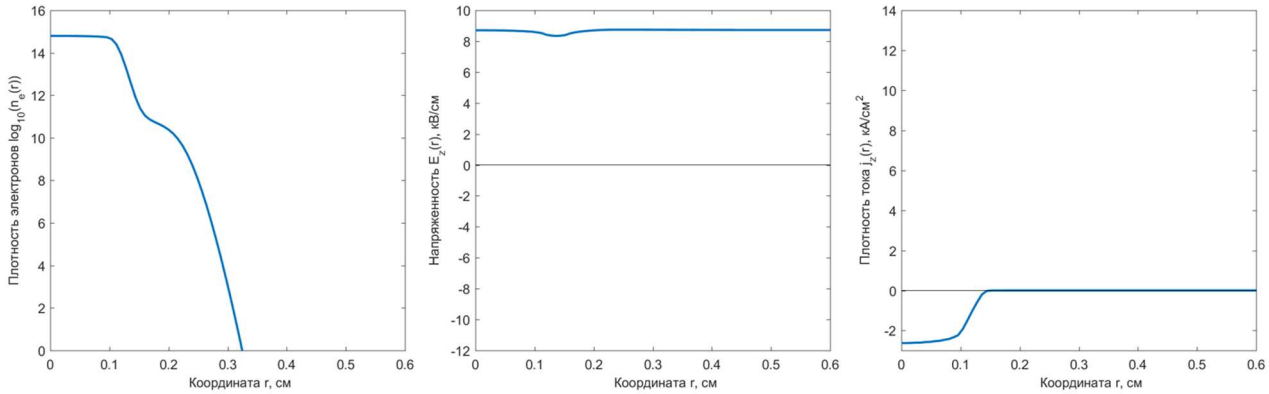
1 нс



12 нс



24 нс



34 нс

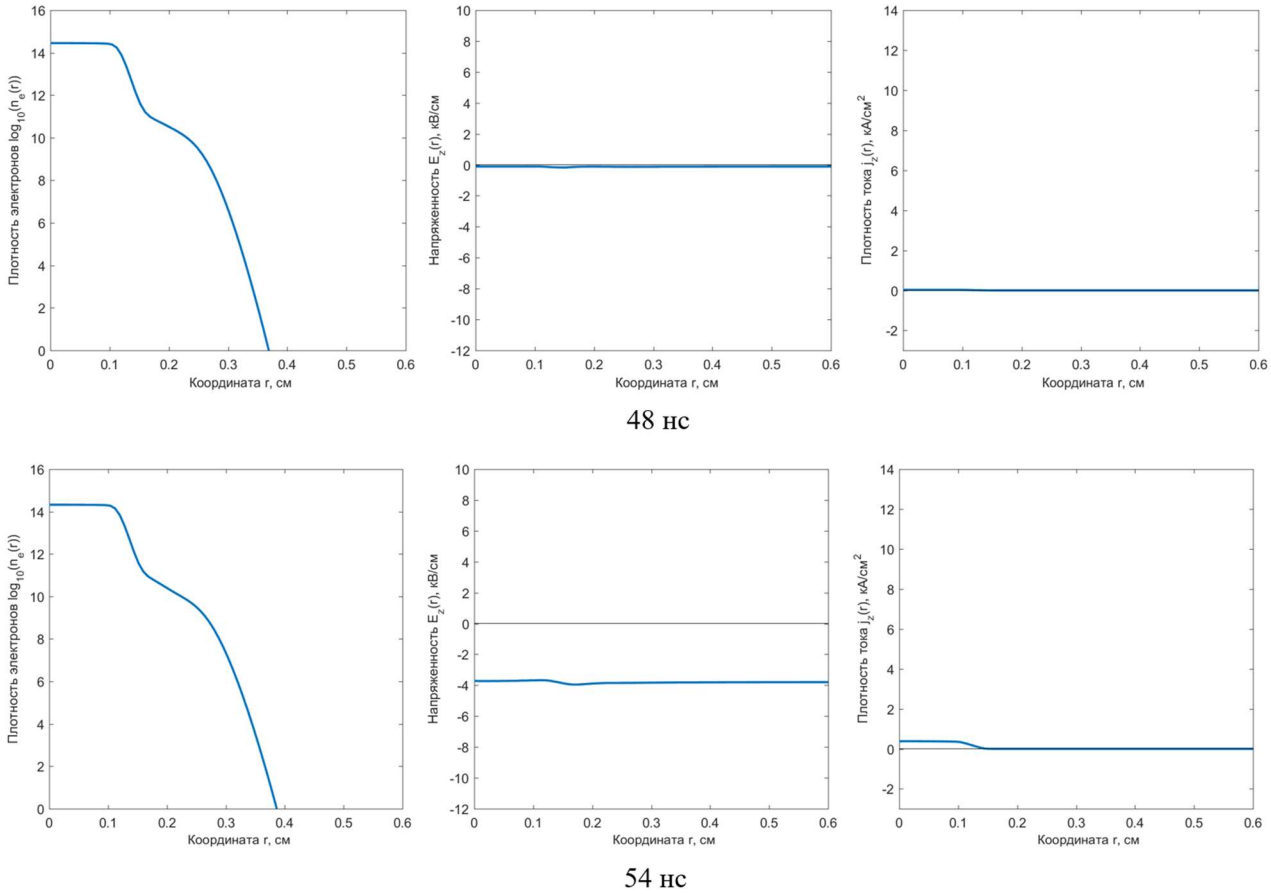


Рис. 6. Радиальная динамика плотности электронов $\log_{10} n_e(r,t)$, напряженности $E_z(r,t)$ и плотности тока $j_z(r,t)$ в сечении $z = 0.3$ см

Положение границы, где величина n_e начинает спадать, соответствует радиусу искрового канала, который к данному моменту времени составляет $r = 2$ мм. При этом величина E_z является почти постоянной и соответствует среднему значению -10 кВ/см с небольшим возмущением, которое соответствует положению границы искрового канала. Величина j_z на оси, полученная на основе уравнения (17), составляет 10 кА/см^2. Далее происходит спад тока в контуре и к моменту $t = 24$ нс в цепи наблюдается его отсутствие. Это достигается при нулевом значении E_z, когда потенциал на аноде также становится нулевым. К этому времени величина n_e падает в 4 раза и достигает значения $n_e = 5\times10^{14}$ см$^{-3}$. В этот момент происходит смена направления протекания электрического тока в разрядном промежутке и всей цепи (меняется знак j_z), так как меняется полярность электродов в газоразрядном промежутке. Такое изменение параметров искрового разряда во времени определяется внешней электрической цепью (в частности, присутствием катушки индуктивности).

Несмотря на то, что величина j_z продолжает снижаться, ее модуль $|j_z|$ увеличивается. При этом плотность электронов также начинает расти: к моменту *t*=34 нс численное значение плотности электронов немного увеличивается вблизи оси симметрии (до $n_e = 6.5\cdot10^{14}$ см$^{-3}$), что соответствует локальному минимуму тока. Искровой канал к этому моменту времени расширяется в диаметре в 1.5 раза. В диапазоне $2 < r < 3$ мм у профиля $\log_{10} n_e(r,t)$ появляется «ножка», наличие которой можно связать с распространением вторичной волной ионизации вблизи стенок плазменного канала. Стоит отметить, что несмотря на то, что к *t*=54 нс наблюдается второй максимум силы тока, плотность электронов продолжает снижаться.

В данной работе вычисление плотности тока производилось на основе формулы $\mathbf{j} = (\mathbf{\Gamma_p} - \mathbf{\Gamma_e})e$. Можно заметить, что полученные результаты согласуются с формулой (17).

7. Тепловые процессы в искровом канале

Большая сила тока внутри искрового канала приводит к сильному нагреву нейтрального газа внутри плазменного канала. Так как удельная мощность тепловыделения внутри канала $\eta(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})$ сложным образом зависит от времени, то вызывает интерес изучение динамики газодинамических характеристик (давления, плотности и температуры) возникающего течения, а также распространение газодинамических структур (ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения).

На рис. 7 приведены временные зависимости полной энергии, подведенной в искровой канал $E_{sp}(t)$ для трех расчетных случаев, соответствующих $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1. Видно, что профили кривых подобны и имеют ступенчатую форму (в работах [13, 14], например, в профиле отсутствуют подобные ступени). В интервале от 0 нс до 20 нс наблюдается наиболее активная фаза нагрева, в течение которой подводится примерно 3/4 от общей величины реализованной энергии для всех трех случаев, что коррелирует с результатами на рис. 3 для $I(t)$, на котором для этого временного промежутка наблюдается протекание тока наибольшей величины. Интервал времени от 20 нс до 25 нс характеризуется отсутствием нагрева, поскольку в данный момент в электрическом контуре протекает очень слабый ток (значение в районе нуля). В интервале времени от 25 нс до 43 нс повторно подводится тепловая энергия (в этот момент ток протекает в обратном направлении относительно исходного), при этом мощность нагрева оказывается примерно в 3–4 раза меньше, чем на начальном этапе от 0 нс до 20 нс. Вторая ступенька в профилях наблюдается примерно к $t = 43$ нс, после чего значимого роста введенной энергии $E_{sp}(t)$ уже не наблюдается. Хотя в электрическом контуре и продолжает протекать ток, его величина становится слишком малой для того, чтобы в газоразрядном промежутке поддерживать активное тепловыделение как на первых двух рассмотренных этапах. Таким образом, можно говорить, что зависимости $E_{sp}(t)$ выходят на насыщение и мощность тепловыделения постепенно падает до нуля. Как результат, можно считать, что за 60 нс газовой среде было передано примерно 1.56 мДж, 2.25 мДж и 2.95 мДж тепла (соответственно, для $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1), что согласуется с величинами $\eta \cdot CU_0^2/2 = \eta E_{C0} = 1.6$ мДж, 2.3 мДж, 3.1 мДж, 1.6 мДж, где $U_0 = 25$ кВ – начальная разность потенциалов на конденсаторе.

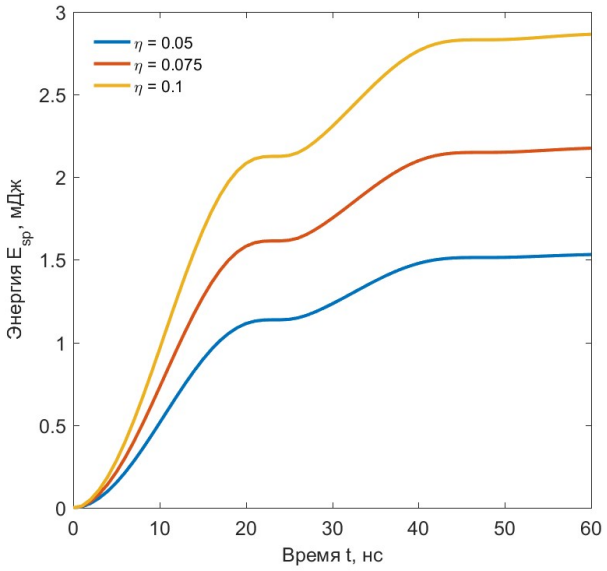
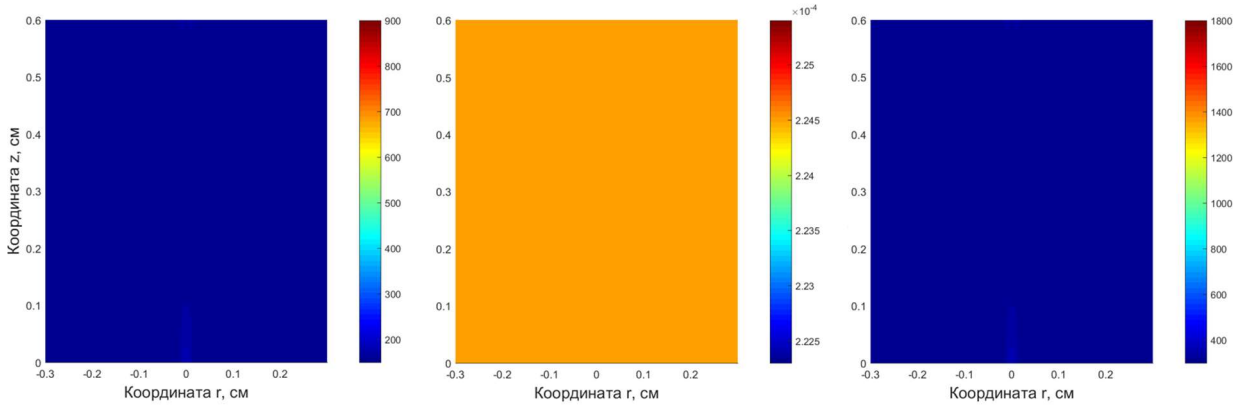


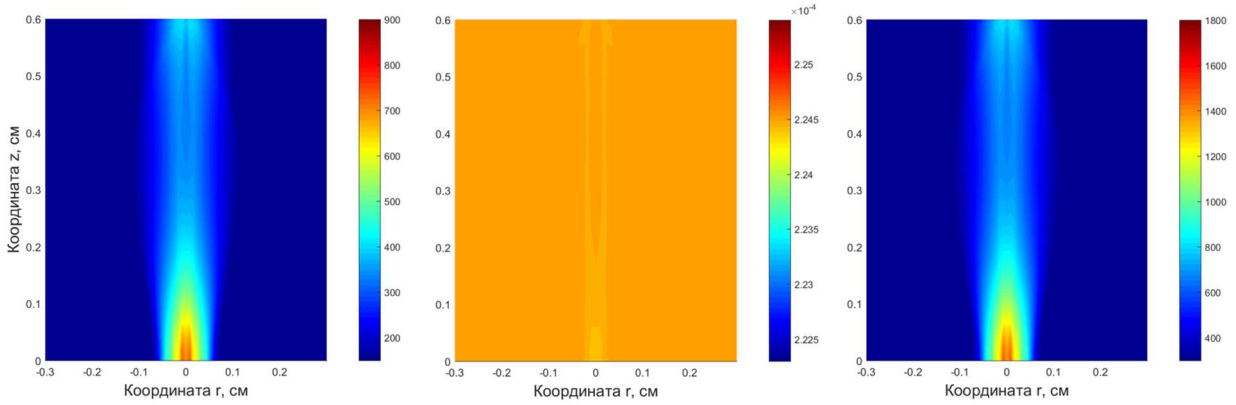
Рис. 7. Зависимость подведенной в искровой канал энергии от времени $E_{sp}(t)$ для значений $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1

Ниже приводится серия результатов для полей давления, плотности и температуры, соответствующая моментам времени 1; 12; 24; 34; 48 и 54 нс для различных величин η (рис. 8–10 для $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1, соответственно).

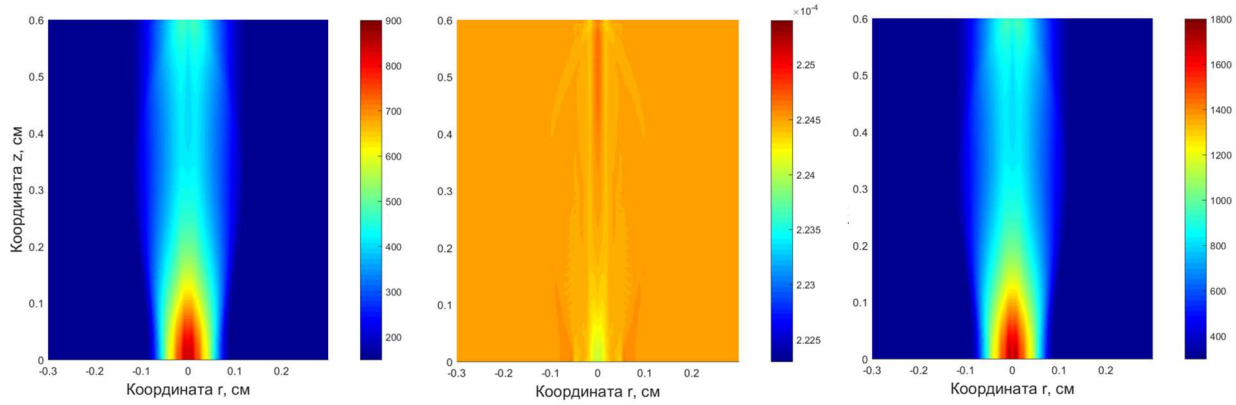
Результаты, приведенные на рис. 8–10, демонстрируют неоднородные поля газодинамических характеристик после формирования искрового канала. Важно отметить, что соответствующие поля подобны для всех трех значений η и отражают тенденцию к увеличению температуры и давления по мере роста доли подведенного тепла. Вблизи катода наблюдается более высокое значение температуры T относительно средней величины в канале (в течение всего времени моделирования). Подобным образом выделяется и область вблизи поверхности анода. Это связано с тем, что на ранней стадии после замыкания искровым каналом межэлектродного зазора наблюдается его уширение ближе к центральному сечению $z = 0.3$ см (см. рис. 5).



1 нс



12 нс



24 нс

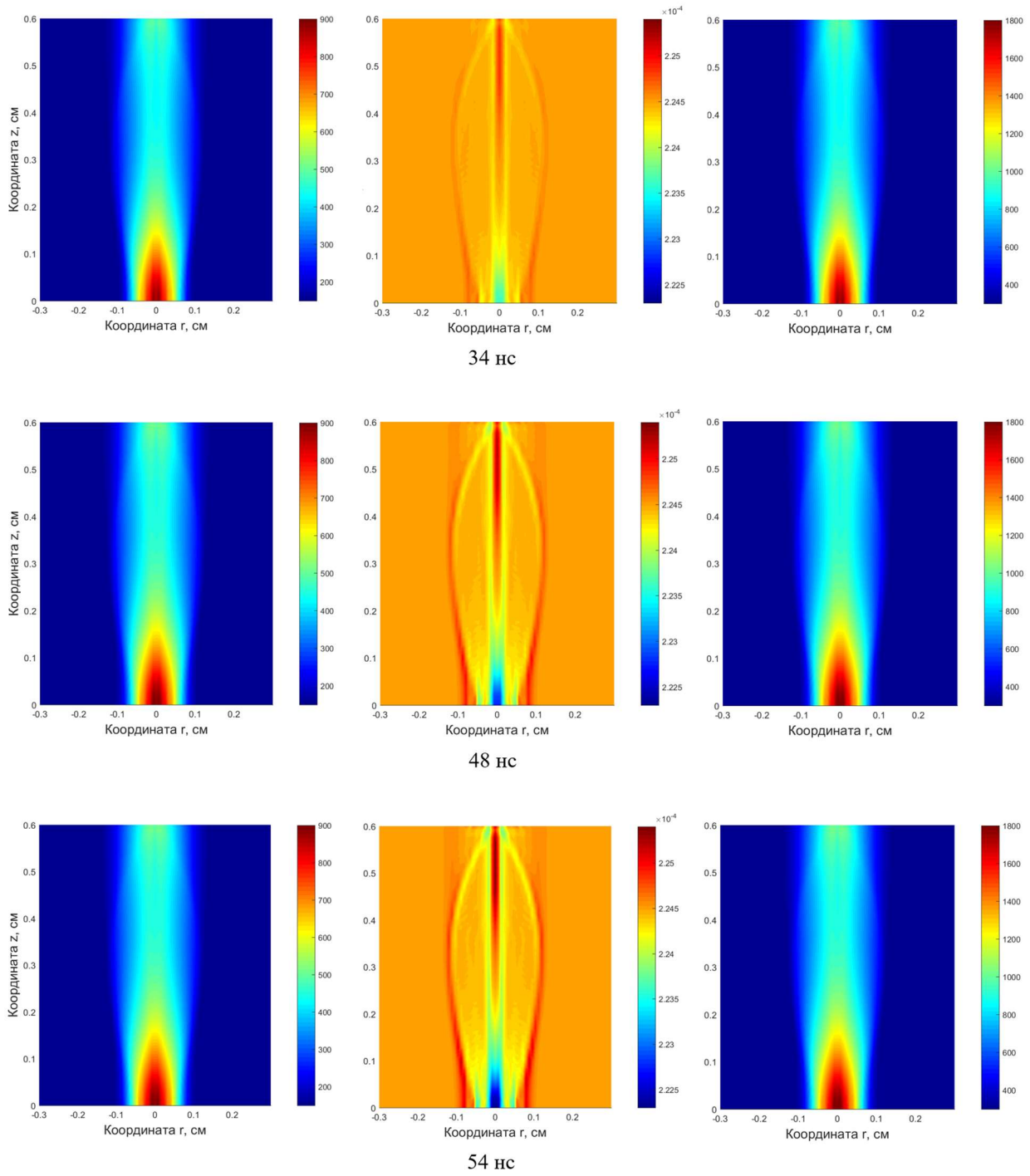
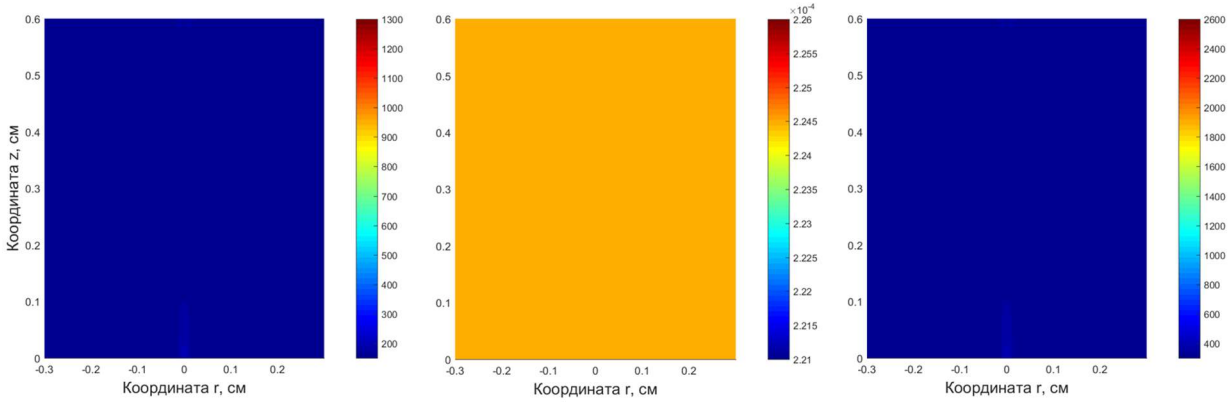
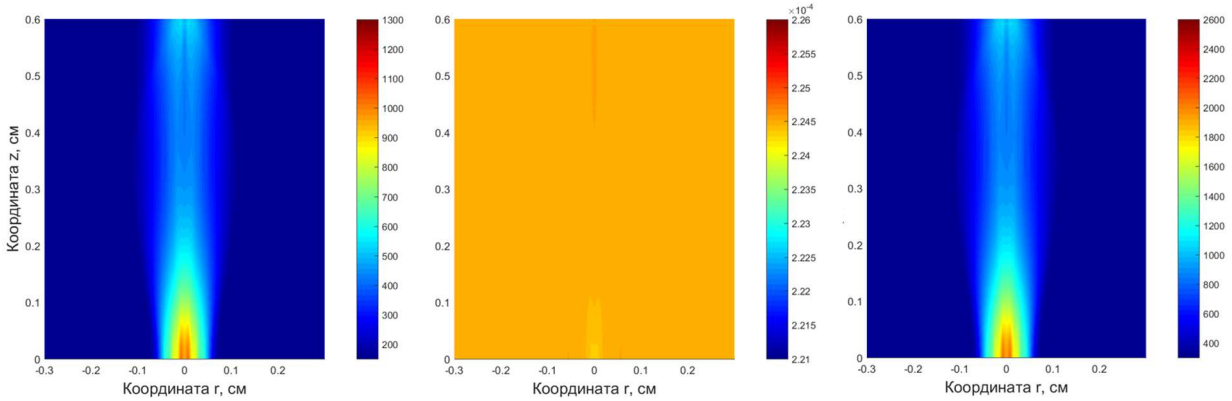


Рис. 8. Поле давления $p(z,r)$, плотности $\rho(z,r)$ и температуры $T(z,r)$ для моментов времени 1; 12; 24; 34; 48 и 54 нс для $\eta = 0.05$

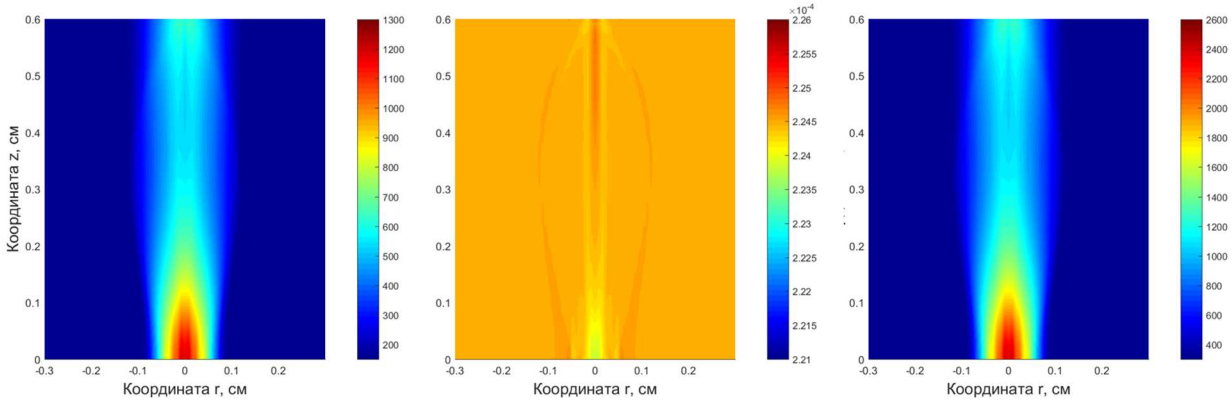
Поскольку в каждом сечении плазменного канала протекает одинаковая величина электрического тока, то в областях с меньшей площадью сечения мощность энерговыделения больше. Начиная с $t = 12$ нс диаметр искрового канала становится одинаковым для диапазона осевой координаты $0.2\text{ см} < z < 0.6\text{ см}$, из-за чего область прогрева расширяется в радиальном направлении в окрестности $z = 0.3$ см: вблизи стенок расширившегося плазменного канала значения температуры T и давления p начинают плавно расти. Качественно наблюдаемое поведение согласуется с результатами работы [9, 10].



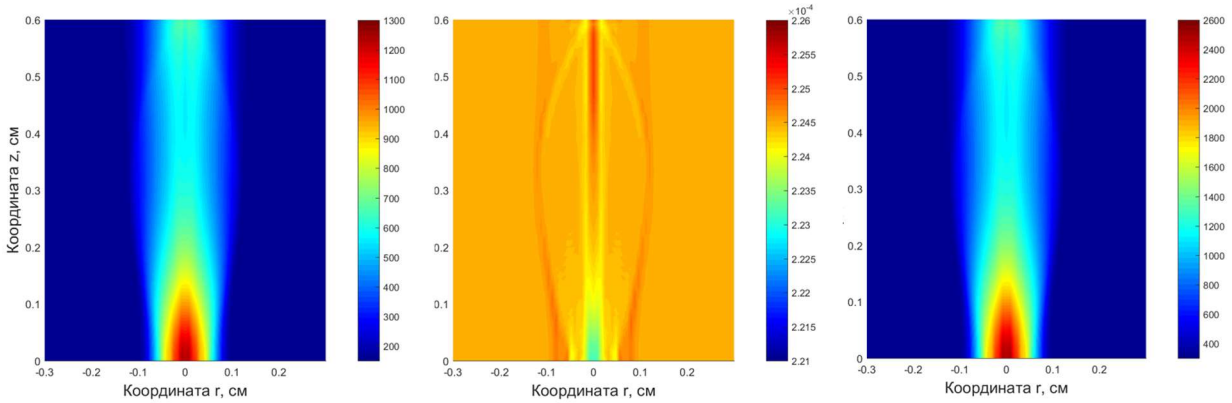
1 нс



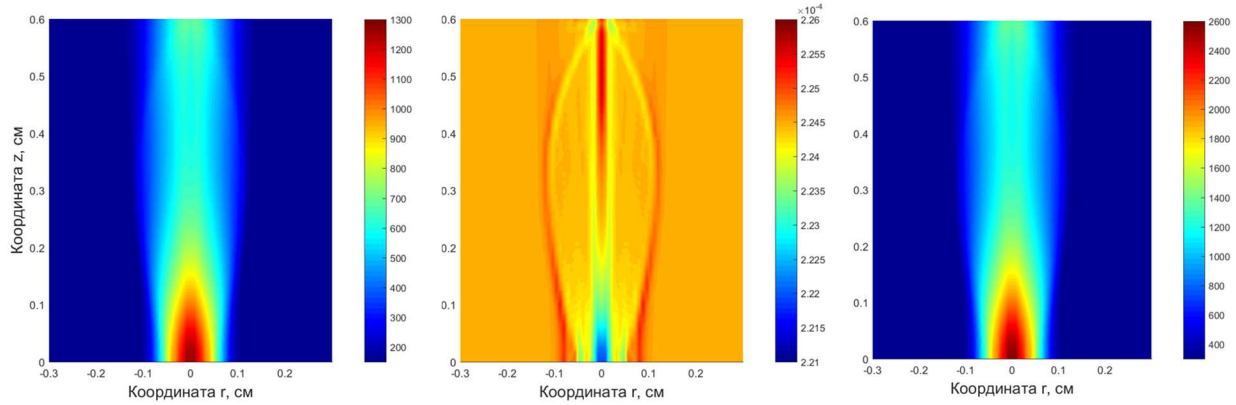
12 нс



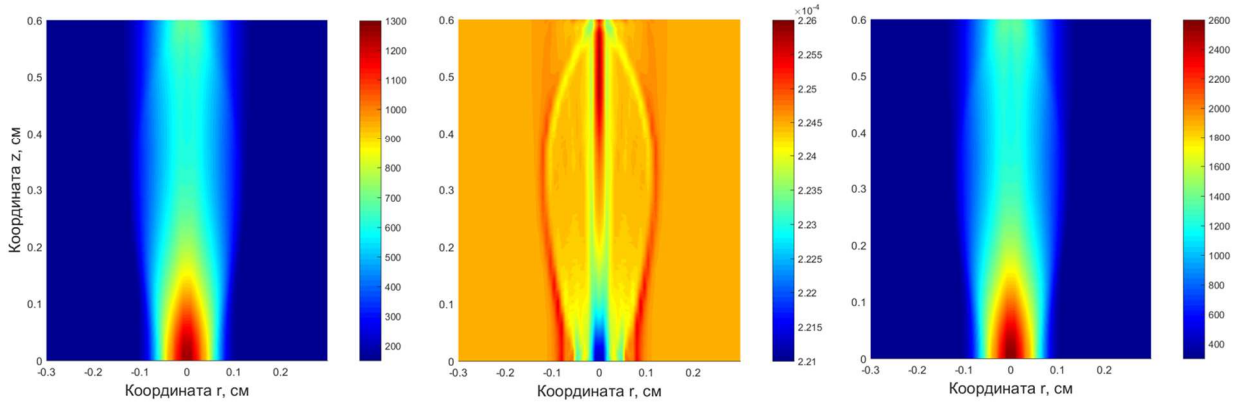
24 нс



34 нс

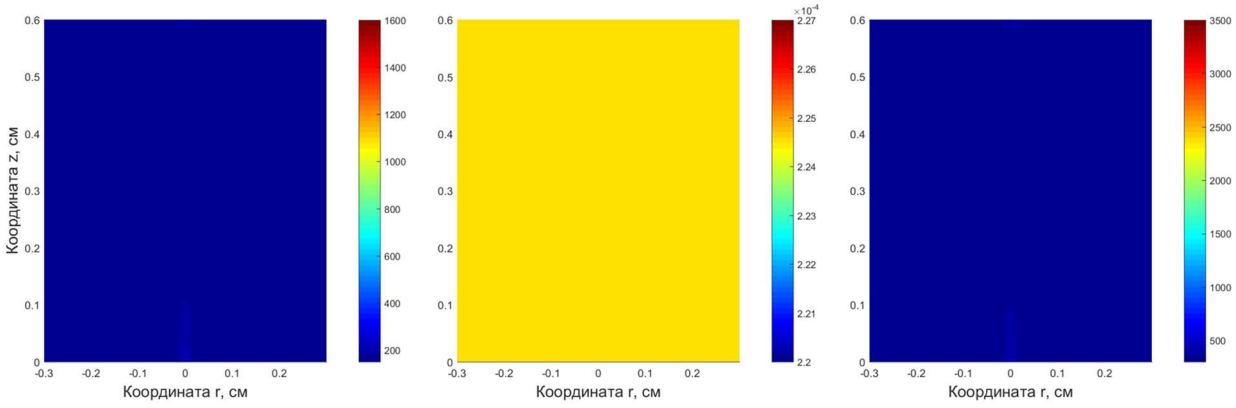


48 нс

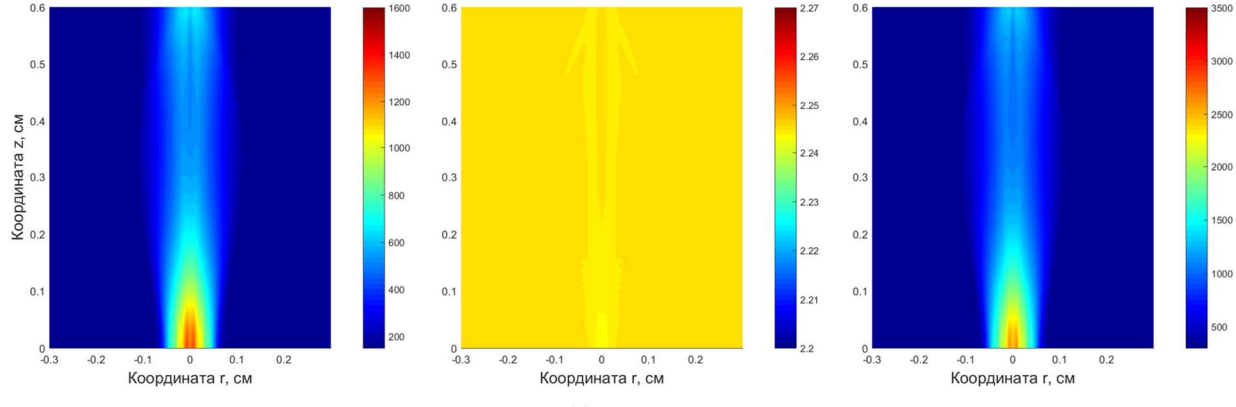


54 нс

Рис. 9. Поле давления $p(z,r)$, плотности $\rho(z,r)$ и температуры $T(z,r)$ для моментов времени 1; 12; 24; 34; 48 и 54 нс для $\eta = 0.075$



1 нс



12 нс

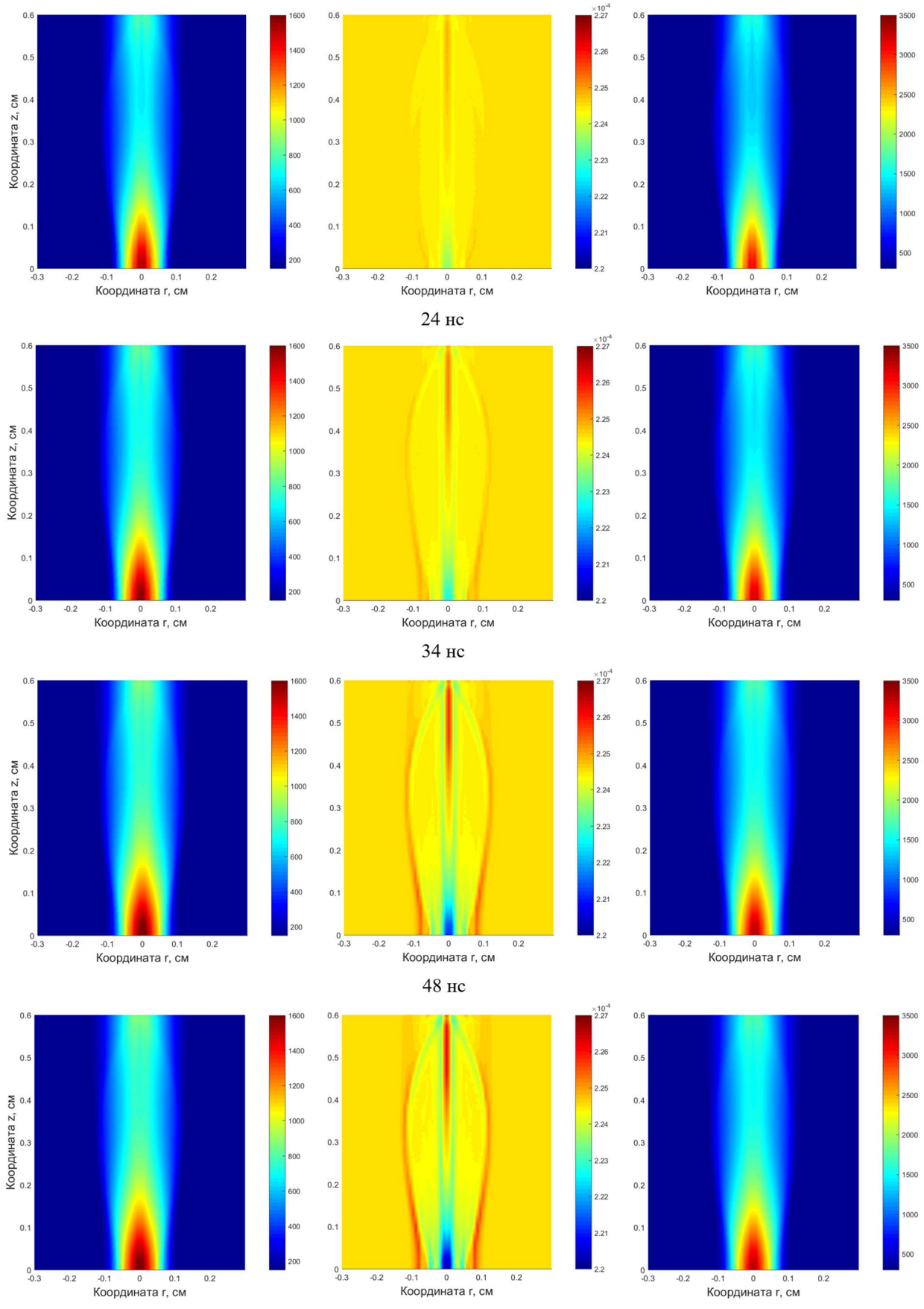


Рис. 10. Поле давления $p(z,r)$, плотности $\rho(z,r)$ и температуры $T(z,r)$ для моментов времени 1; 12; 24; 34; 48 и 54 нс для $\eta = 0.1$

Анализ полей температуры для трех приведенных вариантов расчетов показывает, что максимально достигаемые температуры составляют примерно 1800, 2500 и 3300 K (соответственно, для $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1). По мере увеличения η на 0.05 пик температуры увеличивается приблизительно на $700 \div 800$ K. Соотнося полученные результаты с экспериментальными данными [17, 18], можно сделать вывод, что из рассмотренных вариантов третий случай оказывается наиболее близким по значению к лабораторным исследованиям, что также согласуется с работой [25]. Дополнительно отметим, что в монографиях [26, 35] отмечается: в общем случае внутри искрового канала может достигаться температура до 20 кK. Однако стоит учитывать, что выше 5 кK наступает диссоциация молекулярного азота, которая требует учета дополнительных кинетических уравнений, не рассматриваемых в данной работе. Результаты данной работы показывают, что данный порог не преодолевается.

Серия графиков для плотности ρ также позволяет определить границы области разогретого газа: небольшое уплотнение в диапазоне 1 мм $< r <$ 1.5 мм соответствует границам области разогретого нейтрального газа.

8. Заключение

В ходе проведенного исследования был разработан вычислительный алгоритм, основанный на диффузионно-дрейфовой модели и системе уравнений Эйлера, позволивший изучить характеристики в искровом канале в разрядном промежутке субсантиметровой длины с учетом внешней электрической цепи (*RLC*-контуре). Для коррекции тока, а также напряжения на элементах электрической цепи, была предложена система дифференциальных уравнений первого порядка, в которую вошли такие характеристики внешней части цепи, как электроемкость конденсатора, индуктивность соединительных проводов и балластное сопротивление.

Осциллограмма тока в контуре, полученная в результате моделирования, имеет несколько колебаний, соответствующих свободным затухающим колебаниям. Показано, что напряжения на конденсаторе и резисторе, а также ЭДС самоиндукции в катушке, оказались тесно взаимосвязанными. Получено, что при развитии стримера наблюдалось слабое ветвление его головки ($t = 0.3$ см). После образования искрового канала ($t = 0.5$ нс) и его выхода на квазиодномерный режим горения исследованы радиальные профили плотности электронов, осевой компоненты напряженности и осевой компоненты плотности тока. Установлено, что плотность электронов росла до времени $t = 12$ нс, после чего наблюдался ее спад (до $t = 24$ нс) и повторный слабый рост ($t = 34$ нс). Направление протекания тока и его величина определялись потенциалом электрического поля на аноде, который менялся со временем как по абсолютной величине, так и по знаку.

Изучались характеристики выделения тепловой энергии за время протекания тока в газоразрядном промежутке. Показано, что зависимость от времени энергии, подведенной в искровой канал, имела ступенчатый характер (горизонтальные промежутки соответствовали смене направления протекания тока) для трех случаев $\eta = 0.05$; 0.075 и 0.1. Отмечено, что к моменту времени 60 нс мощность теплоподвода значительно падает. Как результат, внутрь искрового канала было подведено примерно 1.56 мДж, 2.25 мДж и 2.95 мДж тепла от изначально заряженного конденсатора. Исследование полей давления и температуры показало их пространственную неоднородность. В численных расчетах наблюдалось заметное увеличение значений параметров в околоосевой зоне, а также вблизи электродов.

Благодарности

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. Tao Shao, Tarasenko V. F., Cheng Zhang, Lomaev M. I., Sorokin D. A., Ping Yan, Kozyrev A. V., Baksht E. Kh. Spark discharge formation in an inhomogeneous electric field under conditions of run-away electron generation // Journal of applied physics. 2012. Vol. 111. 023304. DOI:10.1063/1.3677951
2. Douyan Wang, Takao Namihira. Nanosecond pulsed streamer discharges. Part II: Physics, discharge characterization and plasma processing // Plasma Sources Science and Technology. 2020. Vol. 29. № 2. 23001. DOI:10.1088/1361-6595/ab5bf6
3. Simeni Simeni M., Goldberg B. M., Cheng Zhang, Frederickson K., Lempert W. R., Adamovich I. V. Electric field measurements in a nanosecond pulse discharge in atmospheric air // J. Phys. D: Appl. Phys. 2017. Vol. 50. 184002. DOI:10.1088/1361-6463/aa6668
4. Lo A., Cessou A., Lacour C., Lecordier B., Boubert P., Xu D., Laux C., Vervisch P. Streamer-to-spark transition initiated by a nanosecond overvoltage pulsed discharge in air // Plasma Sources Sci. Technol. 2017. Vol. 26. № 4. 045012. DOI:10.1088/1361-6595/aa5c78
5. Знаменская И. А., Иванов И. Э., Крюков И. А., Мурсенкова И. В., Тимохин М. Ю. Численное и экспериментальное исследование ударно-волновых структур от наносекундного разряда в гелии // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т.15, №3. http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-3/articles/222/
6. Высикайло Ф. И., Ершов А. П., Кузьмин М. И., Тивков А. С., Чекалин Б. В. Особенности переноса тока в разряде в поперечном сверхзвуковом потоке газа при формировании цилиндрических, кумулятивных структур (плазмоидов) // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2007. Т. 5. http://chemphys.edu.ru/issues/2007-5/articles/44/
7. Xu D.A., Shneider M.N., Lacoste D.A., Laux C.O. Thermal and hydrodynamic effects of nanosecond discharges in atmospheric pressure air // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014. Vol. 47. 235202. http://iopscience.iop.org/0022-3727/47/23/235202
8. Xu D.A., Lacoste D.A., Rusterholtz D.A., Elias P.Q., Stancu G.D., Laux C.O. Experimental study of the hydrodynamic expansion following a nanosecond repetitively pulsed discharge in air // Applied Physics Letters. 2011. Vol. 99. № 12. 121502. DOI:10.1063/1.3641413
9. Tholin F., Bourdon A. Simulation of the hydrodynamic expansion following a nanosecond pulsed spark discharge in air at atmospheric pressure // J. Phys. D: Appl. Phys. 2013. Vol. 46. 365205. DOI:10.1088/0022-3727/46/36/365205
10. Tholin F., Bourdon A. Simulation of the stable ‘quasi-periodic’ glow regime of a nanosecond repetitively pulsed discharge in air at atmospheric pressure // Plasma Sources Sci. Technol. 2013. Vol. 22. 045014. DOI:10.1088/0963-0252/22/4/045014
11. Naidis G. V. Simulation of streamer-induced pulsed discharges in atmospheric-pressure air // Eur. Phys. J. Appl. Phys. 2009. Vol. 47. 22803. DOI:10.1051/epjap/2009084
12. Naidis G. V. Dynamics of streamer breakdown of short non-uniform air gaps // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. Vol. 38. Pp. 3889–3893. DOI:10.1088/0022-3727/38/21/009
13. Korytchenko K. V., Essmann S., Markus D., Maas U., Poklonskii E. V. Numerical and experimental investigation of the channel expansion of a low-energy spark in the air // Combustion Science and Technology. 2018. Vol. 191. № 12. Pp. 2136–2161. DOI:10.1080/00102202.2018.1548441
14. Korytchenko K. V., Poklonskii E. V., Krivosheev P. N. Model of the spark discharge initiation of detonation in a mixture of hydrogen with oxygen // Russian Journal of Physical Chemistry B. 2014. Vol. 8. No. 5. P. 692–700. DOI:10.1134/S1990793114050169
15. Korytchenko K. V., Shypul O. V., Samoilenko D., Varshamova I. S., Lisniak A. A., Harbuz S. V., Ostapov K. M. Numerical simulation of gap length influence on energy deposition in spark discharge // Electrical Engineering & Electromechanics. 2021. № 1. Pp. 35–43. DOI:10.20998/2074-272X.2021.1.06

16. Arkhipov N. O., Znamenskaya I. A., Mursenkova I. V., Ostapenko I. Y., Sysoev N. N. Development of nanosecond combined volume discharge with plasma electrodes in an air flow // Moscow University Physics Bulletin. 2014. Vol. 69. № 1. Pp.96–103. DOI:10.3103/s0027134914010020
17. Znamenskaya I., Koroteeva E., Doroshchenko I., Sysoev N. Evolution and fluid dynamic effects of pulsed column-shaped plasma // Experimental Thermal and Fluid Science. 2019. Vol. 109.109868. DOI:10.1016/j.expthermflusci.2019.109868
18. Знаменская И. А., Мурсенкова И. В., Наумов Д. С., Сысоев Н. Н. Локализация импульсного объемного разряда в вихревую зону за клином, обтекаемым сверхзвуковым потоком // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2019. № 5. С. 80–85.
19. Суржиков С. Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 640 с.
20. Ermakov E. A., Ivanov I. E. Numerical study of gas-dynamic and thermal processes in a pulsed electric discharge // Fluid Dynamics. 2023. Vol. 58. No. 4. Pp. 745–758. DOI:10.1134/S0015462823601055
21. Ermakov E. A., Ivanov I. E., Kryukov I. A., Mursenkova I. V., Znamenskaya I. A. Numerical simulations of nanosecond discharge in gas-dynamic flows // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol.1647. 012015. DOI:10.1088/1742-6596/1647/1/012015
22. Kulikovsky A. A. The structure of streamers in N2. I: fast method of space-charge dominated plasma simulation // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. Pp. 2556–2563. DOI:10.1088/0022-3727/27/12/017
23. Kulikovsky A. A. Nonlinear expansion of the cathode region in atmospheric pressure glow discharge // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 28. Pp. 431–435. DOI:10.1088/0022-3727/26/3/013
24. Суржиков С. Т. Численное моделирование осесимметричного аномального тлеющего разряда между двумя плоскими дискообразными электродами // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, №. 4. DOI:10.33257/PhChGD.23.4.1012
25. Знаменская И. А., Коротеев Д. А., Попов Н. А. Наносекундный сильноточный разряд в сверхзвуковом потоке газа // Теплофизика Высоких Температур. 2005. Т. 43. № 5. С. 820–827.
26. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 592с.
27. Суржиков С. Т., Козлов П. В., Котов М. А., Рулева Л. Б., Солодовников С. И. Нормальный тлеющий разряд: сравнение расчётных и экспериментальных данных // Доклады академии наук. 2019. Т. 485. № 4. С. 422–427. DOI:10.31857/S0869-56524854422-427
28. Гладуш Г. Г., Самохин А. А. Численное исследование шнурования тока на электродах в тлеющем разряде // Прикл. мех. техн. физ. 1981. Т. 22. № 5. С. 15–23. DOI:10.1007/BF00913706
29. Ермаков Е. А., Иванов И. Э. Влияние характеристик внешней части электрической цепи на развитие наносекундного импульсного разряда // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа (принято в печать 31.07.2025)
30. Kulikovsky A. A. The structure of streamers in N2. II: two-dimensional simulation // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. V. 27. Pp. 2564-2569. DOI:10.1088/0022-3727/27/12/018
31. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. М.: Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, 1959. Т. 89. №3. С. 271–306.
32. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики (под редакцией С. К. Годунова). М.: Наука, 1976. 400 с.
33. Harten A., Lax P.D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // SIAM Review. 1983. Vol. 25. № 1. Pp. 35–61.
34. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978. 592 с.
35. Базелян Э. М., Райзер Ю. П. Искровой разряд. М.: Изд-во МФТИ. 1997. 320 с.
36. Arrayás M., Ebert U., Hundsdorfer W. Spontaneous branching of anode-directed streamers between planar electrodes // Physical Review Letters. 2002. Vol. 88. № 17. 174502. DOI:10.1103/PhysRevLett.88.174502

37. Liu N., Pasko V. P. Effects of photoionization on propagation and branching of positive and negative streamers in sprites // Journal of Geophysical Research: Space Physics. 2004. Vol. 109. A04301. DOI:10.1029/2003JA010064

References

1. Tao Shao, Tarasenko V. F., Cheng Zhang, Lomaev M. I., Sorokin D. A., Ping Yan, Kozyrev A. V., Baksht E. Kh., Spark discharge formation in an inhomogeneous electric field under conditions of run-away electron generation, *Journal of applied physics*, 2012, vol. 111, 023304. DOI:10.1063/1.3677951
2. Douyan Wang, Takao Namihira, Nanosecond pulsed streamer discharges. Part II: Physics, discharge characterization and plasma processing, *Plasma Sources Science and Technology*, 2020, vol. 29, № 2, 23001. DOI:10.1088/1361-6595/ab5bf6
3. Simeni Simeni M., Goldberg B. M., Cheng Zhang, Frederickson K., Lempert W. R., Adamovich I. V., Electric field measurements in a nanosecond pulse discharge in atmospheric air, *J. Phys. D: Appl. Phys*., 2017, vol. 50, 184002. DOI:10.1088/1361-6463/aa6668
4. Lo A., Cessou A., Lacour C., Lecordier B., Boubert P., Xu D., Laux C., Vervisch P., Streamer-to-spark transition initiated by a nanosecond overvoltage pulsed discharge in air, *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2017, vol. 26, № 4, 045012. DOI:10.1134/S1063785014060273
5. Znamenskaya I.A., Ivanov I.E., Kryukov I.A., Mursenkova I.V., Timokhin M.Yu., Shock-wave structure formation by nanosecond discharge in helium, *Technical Physics Letters*, 2014, vol. 40, № 6, P. 533-536. DOI:10.33257/PhChGD.20.4.892
6. Vysikaylo Ph.I., Ershov A.P., Kuzmin M.I., Tivkov A.S., Chekalim B.V., Peculiarity of current transfer in discharge blown off with transversal supersonic gas flow and forming of cumulative plasma structures, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2007, vol. 5 [in Russian]. http://chemphys.edu.ru/issues/2007-5/articles/44/
7. Xu D.A., Shneider M.N., Lacoste D.A., Laux C.O., Thermal and hydrodynamic effects of nanosecond discharges in atmospheric pressure air, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2014, vol. 47, 235202. http://iopscience.iop.org/0022-3727/47/23/235202
8. Xu D.A., Lacoste D.A., Rusterholtz D.A., Elias P.Q., Stancu G.D., Laux C.O., Experimental study of the hydrodynamic expansion following a nanosecond repetitively pulsed discharge in air, *Applied Physics Letters*, 2011, vol. 99, № 12, 121502. DOI:10.1063/1.3641413
9. Tholin F., Bourdon A., Simulation of the hydrodynamic expansion following a nanosecond pulsed spark discharge in air at atmospheric pressure, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2013, vol. 46, 365205, DOI:10.1088/0022-3727/46/36/365205
10. Tholin F., Bourdon A., Simulation of the stable 'quasi-periodic' glow regime of a nanosecond repetitively pulsed discharge in air at atmospheric pressure, *Plasma Sources Sci. Technol*., 2013, vol. 22, 045014. DOI:10.1088/0963-0252/22/4/045014
11. Naidis G. V., Simulation of streamer-induced pulsed discharges in atmospheric-pressure air, *Eur. Phys. J. Appl. Phys*., 2009, vol. 47, 22803. DOI:10.1051/epjap/2009084
12. Naidis G. V., Dynamics of streamer breakdown of short non-uniform air gaps, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2005, vol. 38, pp. 3889–3893. DOI:10.1088/0022-3727/38/21/009
13. Korytchenko K. V., Essmann S., Markus D., Maas U., Poklonskii E. V., Numerical and experimental investigation of the channel expansion of a low-energy spark in the air, *Combustion Science and Technology*, 2018, Vol. 191, № 12, p. 2136–2161. DOI:10.1080/00102202.2018.1548441
14. Korytchenko K. V., Poklonskii E. V., Krivosheev P. N., Model of the spark discharge initiation of detonation in a mixture of hydrogen with oxygen, *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2014, vol. 8, № 5, pp. 692–700. DOI:10.1134/S1990793114050169

15. Korytchenko K. V., Shypul O. V., Samoilenko D., Varshamova I. S., Lisniak A. A., Harbuz S. V., Ostapov K. M., Numerical simulation of gap length influence on energy deposition in spark discharge, *Electrical Engineering & Electromechanics*, 2021, № 1, pp. 35–43. DOI:10.20998/2074-272X.2021.1.06
16. Arkhipov N. O., Znamenskaya I. A., Mursenkova I. V., Ostapenko I. Y., Sysoev N. N., Development of nanosecond combined volume discharge with plasma electrodes in an air flow, *Moscow University Physics Bulletin*, 2014, vol. 69, № 1, p. 96–103. DOI:10.3103/s0027134914010020
17. Znamenskaya I., Koroteeva E., Doroshchenko I., Sysoev N., Evolution and fluid dynamic effects of pulsed column-shaped plasma, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 2019, vol. 109, 109868. DOI:10.1016/j.expthermflusci.2019.109868
18. Znamenskaja I. A., Mursenkova I. V., Naumov D. S., Sysoev N. N., *Moscow University Physics Bulletin*, 2019, №5, Pp.80–85 [in Russian]
19. Surzhikov S. T., *Physical mechanics of gas discharges*, M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2006, 640 p. [in Russian].
20. Ermakov E. A., Ivanov I. E., Numerical study of gas-dynamic and thermal processes in a pulsed electric discharge, *Fluid Dynamics*, 2023, vol. 58, № 4, p. 745–758. DOI:10.1134/S0015462823601055
21. Ermakov E. A., Ivanov I. E., Kryukov I. A., Mursenkova I. V., Znamenskaya I. A., Numerical simulations of nanosecond discharge in gas-dynamic flows, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol.1647, 012015. DOI:10.1088/1742-6596/1647/1/012015
22. Kulikovsky A. A., The structure of streamers in N2. I: fast method of space-charge dominated plasma simulation, *J. Phys. D: Appl. Phys*., 1994, vol. 27, pp. 2556–2563. DOI:10.1088/0022-3727/27/12/017
23. Kulikovsky A. A., Nonlinear expansion of the cathode region in atmospheric pressure glow discharge, *J. Phys. D: Appl. Phys*., 1993, vol. 28, pp. 431–435, DOI:10.1088/0022-3727/26/3/013
24. Surzhikov S. T., Numerical Simulation of Axisymmetric Anomal Glow Discharge Between Two Flat Disc Shaped Electrodes, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, iss. 4 [in Russian]. DOI:10.33257/PhChGD.23.4.1012
25. Znamenskaja I. A., Koroteev D. A., Popov N. A, *High Temperature*, 2005, vol. 43, № 5, pp. 820–827 [in Russian]
26. Rajzer Ju. P., *Gas discharge physics*, M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1987, 592 p. [in Russian].
27. Surzhikov S. T., Kozlov P. V., Kotov M. A., Ruleva L. B., Solodovnikov S. I., Normal glow discharge: comparison of calculated and experimental data, *Doklady akademii nauk*, 2019, vol. 485, № 4, pp. 422–427. DOI:10.31857/S0869-56524854422-427
28. Gladush G. G., Samohin A. A., *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1981, vol. 22, №5, p. 15–23 [in Russian] DOI:10.1007/BF00913706
29. Ermakov E.A., Ivanov I.E., Influence of characteristics of the external part of the electric circuit on the development of nanosecond pulse discharge, *Fluid Dynamics*, (accepted for publication on 31.07.2025) [in Russian].
30. Kulikovsky A. A. The structure of streamers in N2. II: two-dimensional simulation, *J. Phys. D: Appl. Phys*., 1994, vol. 27, pp. 2564–2569. DOI:10.1088/0022-3727/27/12/018
31. Godunov S.K., *Sbornik: Mathematics*, 1959, vol. 89, № 3, pp. 271–306 [in Russian]
32. *Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics*. Ed. by S.K. Godunov, M.: Nauka, 1976, 400 p. [in Russian].
33. Harten A., Lax P.D., van Leer B., On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Review*, 1983, vol. 25, № 1, pp. 35–61.
34. Samarskij A. A., Nikolaev E. S., *Methods for solving grid equations*, M.: Nauka, 1978, 592 p. [in Russian].
35. Bazeljan Je.M., Rajzer Ju.P., *Spark discharge*, M.: Izd-vo MFTI, 1997, 320 p. [in Russian].

36. Arrayás M., Ebert U., Hundsdorfer W., Spontaneous branching of anode-directed streamers between planar electrodes, *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, № 17, 174502. DOI:10.1103/PhysRevLett.88.174502
37. Liu N., Pasko V. P., Effects of photoionization on propagation and branching of positive and negative streamers in sprites, *Journal of Geophysical Research: Space Physics,* 2004, vol. 109, A04301. DOI:10.1029/2003JA010064

Статья поступила в редакцию 27 августа 2025 г.