

УДК 533.5

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА ИЗ ЗВУКОВОГО ИСТОЧНИКА В ВАКУУМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

Садин Д.В., Алексашов В.Ю., Варварский В.М.

*Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург*  
[sadin@yandex.ru](mailto:sadin@yandex.ru)

### Аннотация

Предложен приближенный метод расчета газодинамических параметров истечения газа из звукового источника в вакуум при различных числах Кнудсена в широком диапазоне углов расширения. Выполнено сравнение с результатами прямого моделирования методом Монте-Карло и аппроксимацией расчетных данных, полученных методом характеристик.

**Ключевые слова:** приближенный метод, истечение газа, вакуум

### THE APPROXIMATE METHOD OF CALCULATION OF GAS OUTFLOW FROM A SONIC SOURCE INTO VACUUM AT VARIOUS KNUDSEN NUMBERS

The approximate method of calculation of gas-dynamic parameters of gas outflow from a sonic source into vacuum at various Knudsen numbers in a wide range of expansion angles is offered. Comparison with results of Direct Simulation Monte-Carlo method and approximation of the data calculated by a characteristics method is executed.

**Key words:** approximate method, gas outflow, vacuum

### Введение

Развитие космической техники предъявляет повышенные требования к качеству и надежности конструкций. В частности от степени герметичности отсеков космических аппаратов зависит срок их активного существования на орбите. Сквозной дефект в герметизированной конструкции приводит к утечке рабочего тела (газа) из отсека и является причиной отказов в работе приборов и систем космического аппарата. Важное место в обеспечении требуемых норм герметичности элементов конструкций и выявления сквозных дефектов занимают испытания в вакуумной камере. В связи с этим представляется актуальным исследование закономерностей и количественная оценка параметров истечения газа в вакуум.

Задача струйного стационарного истечения газа из отверстия в вакуум является одной из базовых задач газовой динамики. Движение газа по каналу постоянного сечения с трением происходит под действием перепада давления с увеличением скорости до величины скорости звука на срезе канала. Дальнейшее истечение реального газа в вакуум через отверстие площадью  $A$  в стенке герметичного отсека имеет вначале, как правило, континуальный характер (локальные длины свободного пробега молекул  $l$  малы в сравнении с характерным размером течения, например  $\sqrt{A}$ ), а затем на определенных стадиях расширения приобретает последовательно переходный и свободномолекулярный характер. Можно выделить два характерных режима истечения газа в вакуум [1]. Первый режим наблюдается при достаточно малых числах Кнудсена  $Kn = l_a / \sqrt{A} < 0.01$ , где  $l_a$  – средняя длина свободного пробега молекул, определенная по параметрам на срезе канала. Для этого режима характерно наличие за срезом источника некоторой приосевой квазиконтинуальной области течения, в пределах которой сохраняется качественный вид распределений газодинамических параметров, характерных для случая  $Kn \rightarrow 0$ . Продольные и поперечные размеры

этой области сокращаются с ростом числа  $\text{Kn}$ . Второй режим соответствует числам  $\text{Kn} > 0.1$ . Для этого режима характерны отсутствие за срезом источника квазиконтинуальной области и иной вид распределений параметров качественно аналогичный случаю  $\text{Kn} \rightarrow \infty$ . В диапазоне чисел  $0.01 < \text{Kn} < 0.1$  наблюдается переход от первого режима ко второму.

Для моделирования струйного стационарного истечения газа из отверстия в вакуум необходимо применение уравнения Больцмана и методов динамики разреженного газа. Точное аналитическое решение рассматриваемой задачи к настоящему времени не найдено. В [2] методом моментов с использованием эллипсоидальной функции распределения рассмотрены вопросы приближенного аналитического оценивания параметров на оси свободной струи одноатомного газа, истекающего в вакуум. В этой работе приведен обзор исследований, посвященных приближенному решению уравнения Больцмана методом моментов и асимптотическим методам анализа. Другой подход основан на соображениях теории подобия и аппроксимации в приближении Эйлера или Навье-Стокса результатов расчетов методом характеристик распределения газодинамических параметров в струе, истекающей из осесимметричных сопел в вакуум [3]. В [1] методом прямого моделирования Монте-Карло (ПММК) детально исследована газодинамика истечения в вакуум реального газа в широком диапазоне изменения характерных чисел  $\text{Kn}$  на примере неравновесного истечения газа в вакуум из стационарного звукового источника.

Целью настоящей работы является разработка приближенного оперативного метода расчета плотности и скоростного напора газа, истекающего из звукового источника в вакуум при различных числах Кнудсена в широком диапазоне углов расширения.

## 1 Приближенный метод расчета

Вначале рассмотрим стационарное истечение газа через отверстие в вакуум при  $p_0 / p_a \rightarrow 0$  и больших числах Кнудсена  $\text{Kn} \gg 1$ ;  $p_a, p_0$  – давления газа в источнике и окружающей среде. Начало координат поместим в центр отверстия, ось  $X$  направим по потоку перпендикулярно к плоскости отверстия. На поверхности источника задана стационарная и постоянная по радиальной координате максвелловская функция распределения по скоростям  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  для частиц, вылетающих из источника  $\xi_x > 0$ :

$$f_a = \frac{n_a}{(2\pi RT_a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\xi_x - U_a)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_a}\right), \quad (1)$$

Здесь  $n_a, T_a, U_a$  – равновесные значения концентрации, температуры и среднемассовой скорости газа на срезе источника,  $R$  – газовая постоянная. Для звукового источника среднемассовая скорость газа на срезе равна местной скорости звука  $U_a / \sqrt{kRT_a} = 1$  ( $k$  – отношение теплоемкостей).

Макроскопические газодинамические величины определяются осреднением по всем возможным скоростям молекул [4]. Например, для прямоугольного отверстия со сторонами  $2a$  и  $2b$  молекулы, поступающие из камеры в элементарный объем  $d\Omega$  около произвольной точки  $(x, y, z)$  окружающей среды при условии  $p_0 / p_a \rightarrow 0$  могут иметь следующие значения составляющих скоростей

$$0 < \xi_x < \infty, \quad \xi_x \frac{z-a}{x} \leq \xi_z \leq \xi_x \frac{z+a}{x}, \quad \xi_x \frac{y-b}{x} \leq \xi_y \leq \xi_x \frac{y+b}{x}. \quad (2)$$

Интегрируя функцию распределения (1) в пространстве скоростей (2), можно получить осредненные газодинамические величины в безразмерном виде [5]:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}_a &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] \cdot [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] \cdot e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{\rho}u_a &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] \cdot [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] \cdot c_x e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{\rho}v_a &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c_x \gamma_+} \int_0^{c_x \gamma_-} c_y e^{-c_y^2} dc_y \cdot [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] \cdot e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{\rho}w_a &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{c_x \zeta_+} \int_0^{c_x \zeta_-} c_z e^{-c_z^2} dc_z \cdot [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] \cdot e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{u}_a &= \bar{\rho}u_a / 4\bar{\rho}_a, \quad \bar{v}_a = \bar{\rho}v_a / 4\bar{\rho}_a, \quad \bar{w}_a = \bar{\rho}w_a / 4\bar{\rho}_a, \\
 \bar{\rho}u_a^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] \cdot [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] \cdot c_x^2 e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{\rho}v_a^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{c_x \gamma_+} \int_0^{c_x \gamma_-} c_y^2 e^{-c_y^2} dc_y \cdot [\operatorname{erf}(c_x \zeta_+) - \operatorname{erf}(c_x \zeta_-)] \cdot e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x, \\
 \bar{\rho}w_a^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{c_x \zeta_+} \int_0^{c_x \zeta_-} c_z^2 e^{-c_z^2} dc_z \cdot [\operatorname{erf}(c_x \gamma_+) - \operatorname{erf}(c_x \gamma_-)] \cdot e^{-(c_x - c_a)^2} dc_x,
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\gamma_+ = (\bar{y} + \alpha) / \bar{x}$ ;  $\gamma_- = (\bar{y} - \alpha) / \bar{x}$ ;  $\zeta_+ = (\bar{z} + 1) / \bar{x}$ ;  $\zeta_- = (\bar{z} - 1) / \bar{x}$ ;  $\alpha = b / a$ ;  $c_a = U_a / \sqrt{2RT_a}$ ;  $c_i = \xi_i / \sqrt{2RT_a}$ ;  $i = x, y, z$ ;  $\operatorname{erf} \beta = 2 / \sqrt{\pi} \int_0^{\beta} e^{-\lambda^2} d\lambda$ ;  $\bar{\rho}_a$  – безразмерная плотность газа;  $\bar{u}_a, \bar{v}_a, \bar{w}_a$  – безразмерные проекции скорости газа  $\mathbf{v}$  на оси декартовой системы координат.

Для уравнений (3) принята относительная система единиц измерения, в которой безразмерные величины имеют следующий вид:

$$\bar{i} = \frac{i}{a}, \quad \bar{\rho}_a = \frac{\rho}{\rho_a}, \quad \bar{\rho}j_a = \frac{\rho j}{\rho_a \sqrt{RT_a / 2\pi}}, \quad \bar{j}_a = \frac{j}{\sqrt{8RT_a / \pi}}, \quad \bar{\rho}j_a^2 = \frac{\rho j^2}{\rho_a RT_a / 2}. \tag{4}$$

Здесь  $j = u, v, w$ .

Распределения безразмерных газодинамических параметров, вычисляемых по уравнениям (3), имеют асимптотический характер в дальнем поле при  $\bar{x} \gg 1$ . Действительно,  $\alpha / \bar{x}, 1 / \bar{x} \ll 1$ , откуда  $\gamma = \gamma_+ = \gamma_- \rightarrow \bar{y} / \bar{x}$ ,  $\zeta = \zeta_+ = \zeta_- \rightarrow \bar{z} / \bar{x}$  и с учетом осевой симметрии молекулярного потока пространственные распределения макроскопических параметров газа полностью определяются функциями одной переменной  $\bar{\lambda} = \lambda / \bar{x}$  (где  $\lambda = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$  – произвольная ось, перпендикулярная оси симметрии), а вдоль оси симметрии – числами. Предельные значения при истечении из отверстия произвольной формы площадью  $A$  при  $c_a = 0$  [5]:

$$4\pi\bar{\rho}_a \tilde{x}^2 = 4\pi\bar{\rho}_a \bar{u}_a^2 \tilde{x}^2 = \pi\bar{\rho}u_a \tilde{x}^2 = 2 / 3\pi\bar{\rho}u_a^2 \tilde{x}^2 \rightarrow 1 \text{ при } \tilde{x} \gg 1, \tag{5}$$

где  $\tilde{x} = x / \sqrt{A}$ .

Влияние безразмерной среднemasсовой скорости газа на срезе канала  $c_a$  на характер углового распределения на сфере с центром в точке  $(\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0)$  безразмерной плотности  $\bar{\rho}_a$  в дальнем поле при  $\bar{x} \gg 1$  показано на рис. 1 (здесь кривые соответствуют различным

значениям  $c_a$ : 1 – 0.5; 2 – 0.6; 3 – 0.7; 4 – 0.8; 5 – 0.9; 6 –  $\sqrt{k/2} = 0.914$  при  $k = 5/3$ ). Изменение  $c_a$  качественно по-разному влияет на поле плотности в приосевой и периферийной областях течения. При  $\theta < 50^\circ$  с увеличением  $c_a$  значение относительной плотности растет, в диапазоне углов  $\theta > 50^\circ$  изменение  $c_a$  слабо влияет на поле относительной плотности.

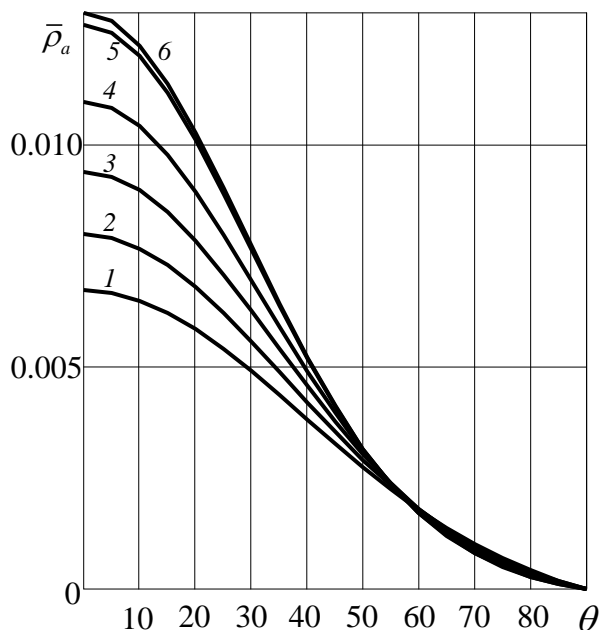


Рис. 1

Отправными моментами для построения приближенного метода расчета истечения газа из звукового источника в вакуум при различных числах Кнудсена являются следующие. Во-первых, с увеличением числа Кн от континуального до свободномолекулярного режима величина плотности потока разреженного газа в приосевой области растет, а при больших углах расширения стабилизируется [1]. Во-вторых, скорость газа на близком расстоянии от отверстия ( $\tilde{x} > 10$ ) практически достигает значения предельной термодинамической скорости, а угловые или радиальные распределения газодинамических параметров потока имеют автомодельный асимптотический характер [3, 5].

Используем известный в газовой динамике прием замены реального явления упрощенным описанием, позволяющим установить приемлемое количественное соответствие и отразить главные особенности исходного течения газа в широком диапазоне чисел Кн. Введем в рассмотрение вместо исходной функции распределения по скоростям аппроксимирующую функцию со свободными параметрами  $n_e$ ,  $T_e$ ,  $U_e$ , зависящими от числа Кн

$$f_e = \frac{n_e}{(2\pi RT_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\xi_x - U_e)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2}{2RT_e}\right). \quad (6)$$

Приближенное решение для безразмерных газодинамических параметров, получается интегрированием (6) в пространстве скоростей (2) по соотношениям (3). Система единиц измерения в этом случае аналогична (4). А именно, вместо равновесных газодинамических параметров на срезе канала  $\rho_a$ ,  $T_a$ ,  $U_a$  используются свободные параметры  $\rho_e$ ,  $T_e$ ,  $U_e$ . При различных числах Кнудсена Кн свободные параметры подбираются до наилучшего соответствия приближенного решения расчетным данным истечения реального газа, полученных ПММК в дальнем поле течения (при  $\tilde{x} \gg 1$ ).

## 2 Результаты расчетов

Для сравнения используем результаты расчетов методом ПММК истечения в вакуум реального газа (гелия) из осесимметричного звукового источника в диапазоне изменения характерных чисел  $10^{-4} \leq \text{Kn} < \infty$  [1], а также зависимость для распределения плотности газа в дальнем поле струи, истекающей из сопла в вакуум [3]. На рис. 2, 3 представлены угловые распределения безразмерной плотности и скоростного напора  $\bar{\rho}_0 = \rho / \rho_0$ ,  $\bar{\rho}_0 \bar{v}_{\max}^2 = \rho v^2 / (\rho_0 v_{\max}^2)$  на сфере с центром в точке  $(\tilde{x}=0, \tilde{y}=0)$  и радиусом  $\tilde{r} = 10\sqrt{\pi}$  при различных числах  $\text{Kn}$ : 1 –  $\infty$ ; 2 – 1; 3 – 0.1; 4 – 0.01; 5 – 0.001; 6 – 0.0001 (кривые соответствуют приближенным расчетам по соотношениям (3) для функции распределения по скоростям (6); фигуры – результаты расчетов методом ПММК [1]; штрихпунктирная линия – расчетная зависимость [3]). Значения угла  $\theta$  отсчитываются от оси  $x$ . Индекс 0 соответствует условным параметрам торможения, определенным в предположении изоэнтропичности расширения газа от заторможенного состояния до состояния на срезе источника. Значение предельной термодинамической скорости  $v_{\max}$  определено по параметрам торможения для идеального совершенного газа.

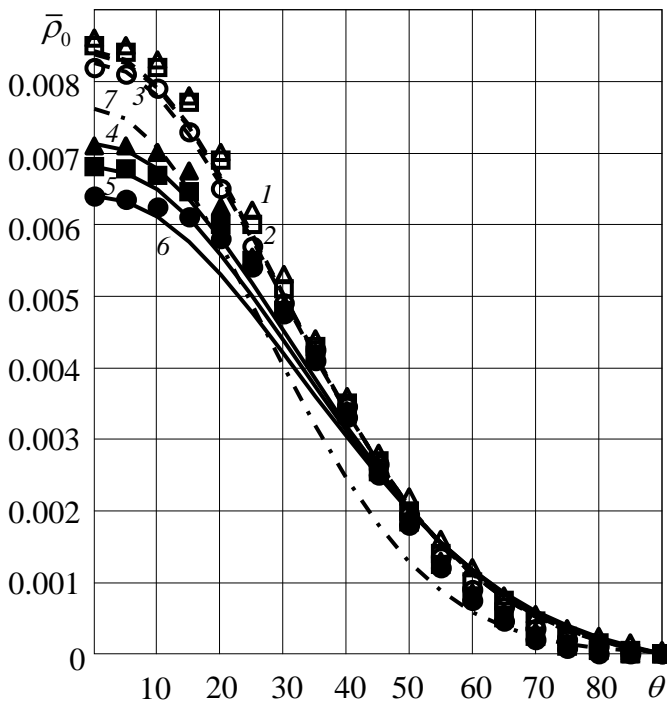


Рис. 2

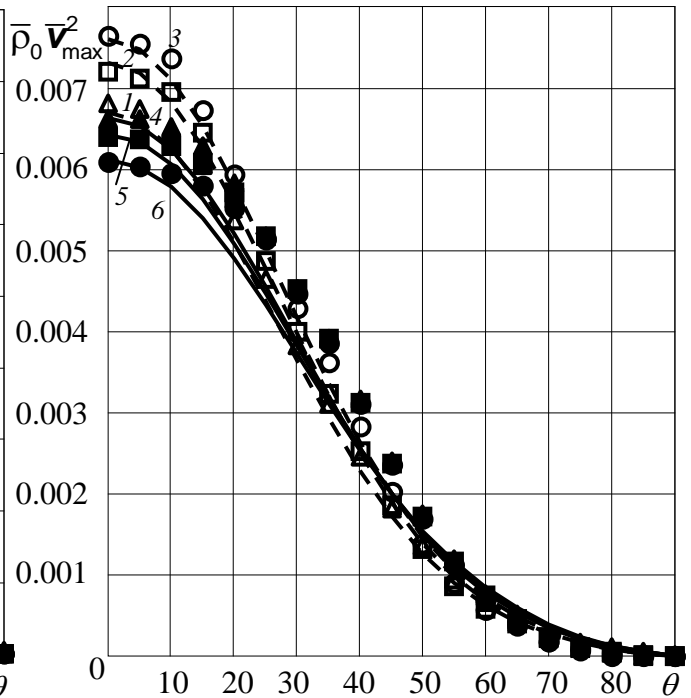


Рис. 3

Взаимосвязь решений в различных масштабах определяется следующими соотношениями:

$$\bar{\rho}_0 = K_\rho \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{\rho}_e, \quad \bar{v}_{\max} = \sqrt{K_T} \sqrt{\frac{8(k-1)}{\pi k(k+1)}} \bar{v}_e,$$

$$\bar{\rho}_0 \bar{v}_{\max}^2 = K_\rho K_T \frac{8(k-1)}{\pi k(k+1)} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \bar{\rho}_e \bar{v}_e^2.$$

Здесь  $K_\rho = \rho_e / \rho_a$ ,  $K_T = T_e / T_a$  – относительные свободные параметры.

Приближенный расчет истечения газа выполнен при значениях относительных свободных параметров  $K_\rho$ ,  $K_T$  и  $c_e = U_e / \sqrt{2RT_e}$ , приведенных в табл. 1.

Таблица 1

| Kn       | $K_\rho$ | $K_T$ | $c_e$ |
|----------|----------|-------|-------|
| $\infty$ | 1.00     | 1.00  | 0.914 |
| 1        | 1.00     | 1.10  | 0.910 |
| 0.1      | 1.00     | 1.17  | 0.900 |
| 0.01     | 1.00     | 1.28  | 0.800 |
| 0.001    | 1.00     | 1.33  | 0.770 |
| 0.0001   | 1.00     | 1.39  | 0.730 |

Для достаточно больших чисел Кнудсена  $Kn \rightarrow \infty$  результаты расчетов по соотношениям (3) для функции распределения по скоростям (6) стремятся к точному решению свободномолекулярного истечения газа из звукового источника в вакуум, а для конечных Kn – имеют приближенный характер. Расхождения  $\Delta_1, \Delta_2$  результатов приближенных расчетов относительных плотности  $\bar{\rho}'_0$  и скоростного напора  $\bar{\rho}'_0 \bar{v}'_{max}{}^2$  с данными, полученными методом ПММК [1], приведены в табл. 2. Величины погрешностей определялись по формулам  $\Delta_1 = |\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}'_0| / \bar{\rho}_0|_{\lambda=0}$ ,  $\Delta_2 = |\bar{\rho}_0 \bar{v}_{max}{}^2 - \bar{\rho}'_0 \bar{v}'_{max}{}^2| / \bar{\rho}_0 \bar{v}_{max}{}^2|_{\lambda=0}$ .

Таблица 2

| Kn     | $\Delta_1, \%$ | $\Delta_2, \%$ |
|--------|----------------|----------------|
| 0.1    | 2.7            | 3.5            |
| 0.01   | 6.3            | 11.0           |
| 0.001  | 7.3            | 11.7           |
| 0.0001 | 10.0           | 13.4           |

Рассмотрим асимптотические свойства (при  $\tilde{x} \gg 1$ ) потока газа из звукового источника при различных числах Кнудсена. На рис. 4 приведены распределения функции  $\psi = J \cdot \bar{\rho}_0 \bar{v}_{max}{}^2 \cdot (\sqrt{\pi} \tilde{x})^2$  вдоль оси симметрии струи газа при числах Kn: 1 –  $\infty$ ; 2 – 1; 3 – 0.1; 4 – 0.01; 5 – 0.001; 6 – 0.0001. Здесь величина  $J$  представляет собой отношение скоростного напора звукового источника в режиме сплошной среды к таковому в свободномолекулярном режиме:

$$J = \frac{\rho_a k R T_a}{\rho v^2|_{x=0}} = \frac{\pi k}{8 K_\rho K_T \bar{\rho}_e \bar{v}_e^2|_{x=0}}.$$

Из рис. 4 видно, что функция  $\psi$  стремится к предельному значению, которое практически достигается при  $\sqrt{\pi} \tilde{x} > 10$ . Семейство кривых  $\psi$ , соответствующих различным числам Кнудсена (первый режим при  $Kn < 0.01$ : кривые 1 – 3; второй режим при  $Kn > 0.1$ : кривые 4 – 6) имеют различные асимптоты. На рис. 5 показаны угловые распределения функции  $\psi$  на сфере с центром в точке  $(\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0)$  и радиусом  $\tilde{r} = 10\sqrt{\pi}$  (обозначения аналогичны принятым на рис. 2 и 3). Кривые угловых распределений имеют автомодельный асимптотический характер и как в предыдущем случае группируются соответственно режимам истечения газа из звукового источника.

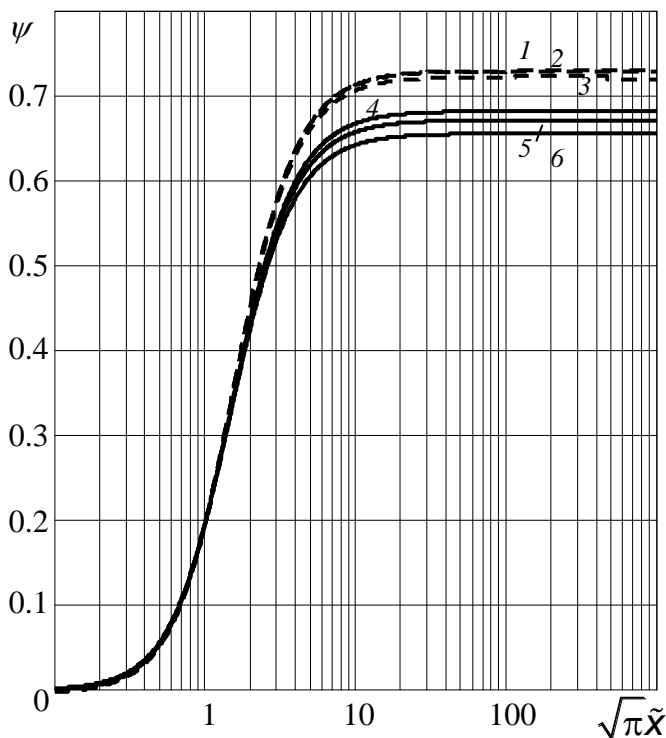


Рис. 4

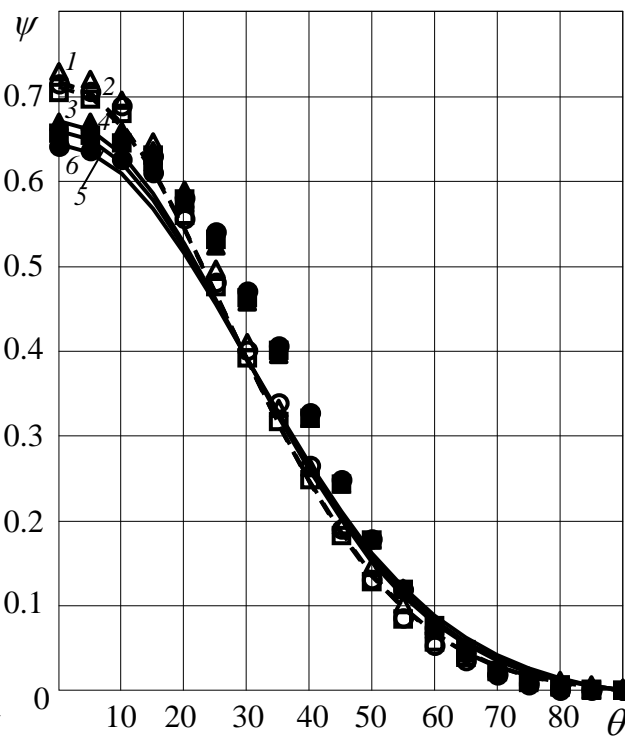


Рис. 5

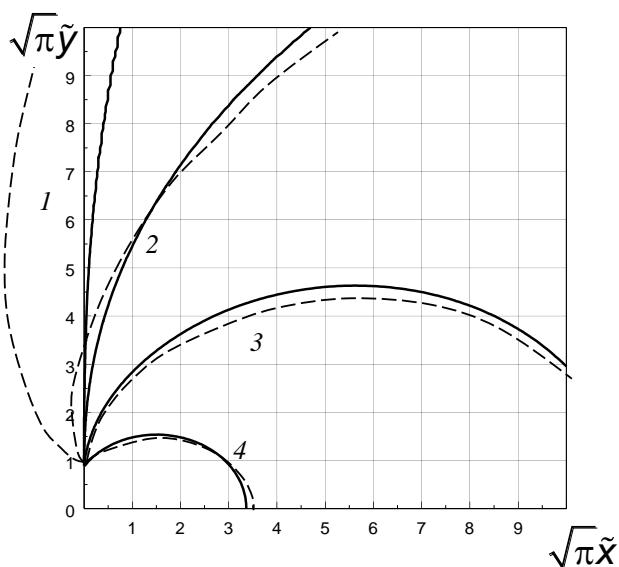


Рис. 6

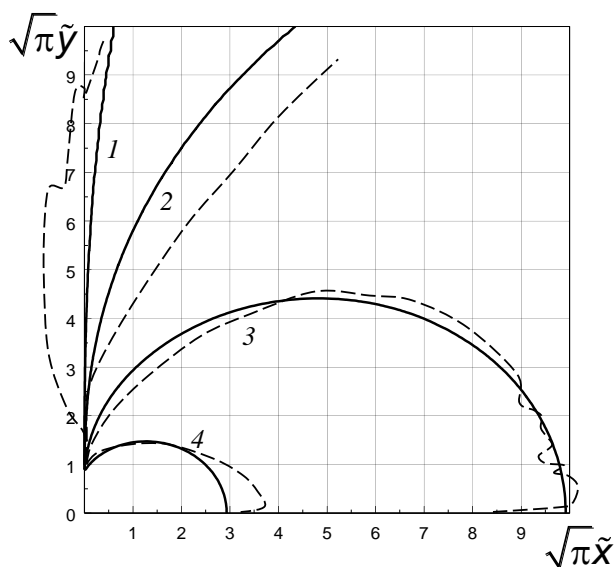


Рис. 7

Приближенный метод (6), (3) предназначен для расчета газодинамических параметров в дальнем поле течения (при  $\tilde{x} \gg 1$ ). Вместе с тем, как показал анализ результатов расчетов, удовлетворительное согласие отмечается в широком диапазоне чисел Кнудсена во всем поле течения за исключением периферийной области. На рис. 6, 7 (при числах Кнудсена  $Kn = 0.1$  и  $Kn = 0.0001$  соответственно) представлены линии равных относительных плотностей газа  $\bar{\rho}_0$ : 1 – 0.0001; 2 – 0.001; 3 – 0.01; 4 – 0.1, образуемых при истечении из звукового источника. Штриховые линии относятся к расчету методом ПММК [1], а сплошные – приближенному расчету настоящей работы. При  $Kn \gg 1$  результаты расчета настоящей работы практически совпадают с численными данными ПММК во всем поле течения. Для второго режима ( $Kn \geq 0.1$ ) распределение относительной плотности газа согласуется с ре-

зультатами ПММК за исключением периферийной области (рис. 6,  $Kn = 0.1$ ). Однако в этой области обратный поток по отношению к потоку частиц на срезе источника мал и достигает максимальной величины при числах  $Kn \approx 0.1$  примерно 0.65% [1]. С уменьшением числа Кнудсена расхождение расчетов по приближенной модели (6), (3) и результатов ПММК возрастает в диапазоне больших углов расширения газового потока (рис. 7,  $Kn = 0.0001$ ).

## Литература

1. Захаров В.В., Лукьянов Г.А. Моделирование неравновесного истечения газа в вакуум из стационарного источника // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 6. С. 70–75.
2. Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н. Аналитические оценки параметров свободной струи одноатомного газа, истекающей в вакуум // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2003. Т. 44. № 4. С. 238–242.
3. Герасимов Ю.И., Ярыгин В.Н. Истечение струй идеального и реальных газов из осесимметричных сопел. Вопросы подобия. 1. Истечение струй в вакуум // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Том 13. [http:// www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-07-13-001.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-07-13-001.pdf)
4. Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа. М.: Машиностроение, 1977.
5. Садин Д.В., Алексашов В.Ю., Алексеев К.В., Варварский В.М., Лебедев Е.Л. Предельно автомодельное движение твердой частицы в свободномолекулярном потоке газа, истекающего из отверстия // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53, № 6. с. 41– 48.

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2013 г.