

## КИНЕМАТИКА И ТЕРМОДИНАМИКА УПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А.А. Роговой

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь*

### Аннотация

Построено разложение полного градиента места на упругий, неупругий и температурный, совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего. Показано, основываясь на принципах объективности и термодинамики, что неупругий и температурный градиенты места должны быть чистыми деформациями без вращений. Предложен функционал, основанный на упругом потенциале слабо-сжимаемого материала, используя который в качестве одного из слагаемых в свободной энергии, получены вытекающие из термодинамики соотношения для напряжений и энтропии в термо-упруго-неупругом процессе при конечных деформациях и построено уравнение теплопроводности. Определен общий вид функции отклика материала на малые упругие деформации относительно промежуточной конфигурации. Константы, входящие в этот тензор, определяющий свойства материала в текущий момент времени и зависящий только от упругой кинематики, полагались функциями температуры и скалярных структурных параметров, связанных с неупругой кинематикой. Построенные соотношения предельным переходом (при стремлении промежуточной конфигурации к текущей) легко сводятся к точным эволюционным. При этом соответствующая уравнению состояния объективная производная определяется автоматически. Конкретизация общего вида определяющего уравнения осуществляется заданием дополнительных соотношений для деформации скорости неупругих перемещений. В результате, в рамках единого подхода, основанного на наложении малых деформаций на конечные, построены определяющие уравнения для конечных термоупругопластических, вязкоупругих и термоупругих деформаций.

### KINEMATICS AND THERMODYNAMICS OF ELASTIC-INELASTIC PROCESS UNDER FINITE DEFORMATIONS

Decomposition of the complete deformation gradient into elastic, inelastic and temperature gradients has been constructed. Coinciding in form with Lee decomposition, it does not suffer from the drawbacks of the latter. Based on the objectivity and thermodynamics principles it has been shown that inelastic and temperature deformation gradients should be pure deformations without rotations. The functional based on the elastic potential of slightly compressible material has been proposed. As one of the terms of the free energy function it has been used to derive the relations for stresses and entropy of thermo-elastic-inelastic process under finite deformations directly stemming from thermodynamics and to construct the conductivity equation. The general form of the function for the material response to small elastic deformations with respect to an intermediate configuration has been defined. This function describes the material properties at the current time and depends on elastic kinematics and some quantities, which are the functions of temperature and scalar structure parameters related to inelastic kinematics. The constructed relations are easily reduced to the exact evolution ones by means of the limit transition (when the intermediate configuration is approaching the current one). In this case, the objective derivative, corresponding to the state equation, is defined automatically. Specific forms of the general state equation are obtained by setting additional relations for the deformation velocity of inelastic displacements. Thus, the state equations for finite thermo-elastic-plastic, visco-elastic and thermo-elastic deformations have been constructed in the framework of united approach based on superposition of the small deformations on the finite ones.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], вводя три конфигурации: начальную, текущую и промежуточную, близкую к текущей, построены удовлетворяющие принципу объективности уравнения состояния для конечных упругих деформаций простого материала. Из всех эквивалентных форм представления этих уравнений мы воспользуемся соотношением

$$\mathbf{T} = [1 - I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \mathbf{L}^{IV} \cdot \mathbf{e}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений в текущей конфигурации  $\kappa$ ;  $I_1$  – первый инвариант;  $\mathbf{T}_*$  – тензор напряжений в промежуточной конфигурации  $\kappa_*$ , близкой к текущей;  $\mathbf{h} = \mathbf{e} + \mathbf{d}$  – градиент относительно конфигурации  $\kappa_*$  вектора малых перемещений  $\mathbf{u}$ , переводящего промежуточную конфигурацию в текущую;  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{d}$  – тензоры малых деформаций и поворотов относительно  $\kappa_*$  конфигурации;  $\mathbf{L}^{IV}$  – тензор

четвертого ранга (в общем случае анизотропный), определяющий упругий отклик материала на малые деформации относительно промежуточной конфигурации. Приближенное соотношение (1) предельным переходом легко сводится к точному с объективной производной Трусделла.

Будем трактовать любой упруго-неупругой процесс как упругий с напряженной отсчетной конфигурацией и использовать кинематику наложения малых деформаций на конечные. Это позволяет принять соотношение (1) в качестве основы для построения уравнения, определяющего поведение упруго-неупругих сред при конечных деформациях. Обоснованию такого подхода и посвящена настоящая работа.

## 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Представим градиент места в виде мультипликации малых упругих, малых неупругих и конечных упруго-неупругих деформаций:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{F}_* \quad (2)$$

Здесь упруго-неупругий градиент места  $\mathbf{F}_*$  переводит начальную конфигурацию в первую промежуточную  $\kappa_1$  (рис. 1).

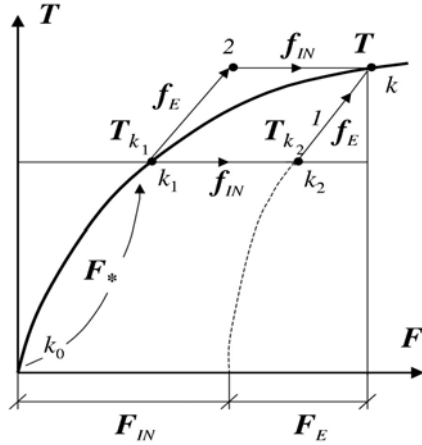


Рис. 1. Кинематика процесса и соответствующее ей напряженное состояние

Градиент  $\mathbf{f}_{IN}$  переводит конфигурацию  $\kappa_1$  во вторую тоже промежуточную конфигурацию  $\kappa_2$ . И, наконец, градиент  $\mathbf{f}_E$  переводит конфигурацию  $\kappa_2$  в текущую. При этом конфигурации  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  и текущая близки между собой, что позволяет представить  $\mathbf{f}_{IN}$  и  $\mathbf{f}_E$  в виде

$$\mathbf{f}_{IN} = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_{IN}) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}_{IN})(\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}_{IN}),$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр (положительная величина);  $\mathbf{g}$  – единичный тензор;  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_{IN}$  – малые неупругие деформации и повороты,

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E) = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{e}_E)(\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{d}_E),$$

$\mathbf{e}_E$  и  $\mathbf{d}_E$  – малые упругие деформации и повороты. В результате соотношение (2) представляется в виде

$$\mathbf{F} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_* = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN})] \cdot \mathbf{F}_* \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_{IN}$  – градиент полных перемещений относительно промежуточной конфигурации. Приближенное соотношение (3) предельным переходом легко сводится к точному. В результате получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}.$$

Здесь  $\mathbf{D}_E = \dot{\mathbf{e}}_E$ ,  $\mathbf{D}_{IN} = \dot{\mathbf{e}}_{IN}$ ,  $\mathbf{W}_E = \dot{\mathbf{d}}_E$ ,  $\mathbf{W}_{IN} = \dot{\mathbf{d}}_{IN}$ . Тензоры же  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  – любые достаточно гладкие тензорные функции, удовлетворяющие условиям  $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{IN})$ .

Как известно (см. [2]), решением тензорного уравнения

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{F}(t) \quad (4)$$

при  $\mathbf{F}(t=0) = \mathbf{g}$  является тензор (матрицант)

$$\mathbf{F}_0^t(\mathbf{A}) = \mathbf{F}_0^t(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{F}_0^t(\mathbf{S}), \quad \mathbf{S} = [\mathbf{F}_0^t(\mathbf{P})]^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_0^t(\mathbf{P}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{F}_0^t(\mathbf{P})$  и  $\mathbf{F}_0^t(\mathbf{S})$  – решения при тех же самых начальных условиях уравнения (4) с правыми частями  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{S}$  (умноженными на  $\mathbf{F}$ ) соответственно, что легко проверить простой подстановкой. Каждый из матрицантов в решении (5) представляется выражением вида

$$\mathbf{F}_0^t(\mathbf{A}) = [\mathbf{g} + \mathbf{A}(\tau) \Delta t] \cdot \mathbf{F}_0^{t_*}(\mathbf{A}), \quad \Delta t = t - t_*, \quad \tau \in \Delta t, \quad (6)$$

являющимся, при рекуррентном продолжении, интегральным произведением, приводящим в пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  к мультипликативному интегралу (см. [2]).

Положим  $\mathbf{P} = \mathbf{D}_E + \mathbf{W}_E$ . Тогда в соответствии с соотношением (6)

$$\mathbf{F}_0^t(\mathbf{P}) = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_0^{t_*}(\mathbf{P}).$$

Сюда входит только упругая кинематика. Поэтому естественно ввести обозначение  $\mathbf{F}_0^t = \mathbf{F}_E$  и название – упругий градиент места:

$$\mathbf{F}_E = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{e}_E + \mathbf{d}_E)] \cdot \mathbf{F}_{E*}. \quad (7)$$

Тензор  $\mathbf{Q}$  определяется выбором тензора  $\mathbf{P}$ :  $\mathbf{Q} = \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{W}_{IN}$ . Тогда, используя второе соотношение (5), находим тензор  $\mathbf{S}$  и строим в соответствии с (6), сохраняя слагаемые только первого порядка малости относительно  $\Delta t$  или  $\varepsilon$ , тензор  $\mathbf{F}_0^t(\mathbf{S})$ , который назовем неупругим градиентом места и обозначим  $\mathbf{F}_{IN}$ :

$$\mathbf{F}_{IN} = [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot (\mathbf{e}_{IN} + \mathbf{d}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_{E*}] \cdot \mathbf{F}_{IN*}. \quad (8)$$

В результате из первого соотношения (5) получаем разложение  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$ , совпадающее по форме с известным разложением Ли, но свободное от недостатков последнего. В частности, из этого представления следует, что полная деформация скорости перемещений  $\mathbf{D}$  есть сумма деформаций скоростей упругих  $\mathbf{D}_E$  и неупругих  $\mathbf{D}_{IN}$  перемещений (в данном случае скорость деформации совпадает с деформацией скорости), упругий градиент места  $\mathbf{F}_E$  не меняется при чисто неупругом изменении конфигурации, а неупругий – при чисто упругом ее изменении [3]. Из этого разложения мера деформаций Коши – Грина записывается в виде  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_{IN}^T \cdot \mathbf{C}_E \cdot \mathbf{F}_{IN}$  ( $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ ). С учетом (7), (8), эту меру можно представить как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F}_* \quad (9)$$

где  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}$ ,  $\mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*$ , или как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + 2\varepsilon \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_0, \quad (10)$$

где  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN}$ ,  $\mathbf{C}_0 = \mathbf{F}_0^T \cdot \mathbf{F}_0$ . Здесь величины с индексом «\*» соответствуют конфигурации  $\kappa_1$ , величины с индексом «0» – конфигурации  $\kappa_2$  (см. рис. 1) в один и тот же момент времени  $t_*$ . В соответствии с этими соотношениями при стремлении промежуточной конфигурации  $\kappa_1$  к текущей ( $\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ ) и промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  к текущей ( $\mathbf{F}_0 \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_0 \rightarrow \mathbf{C}$ ) предельным переходом можно получить два приращения и две скорости изменения меры деформаций  $\mathbf{C}$  [4]:

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_1} = 2\mathbf{F}^T \cdot (d\mathbf{e}_E + d\mathbf{e}_{IN}) \cdot \mathbf{F},$$

$$(\dot{\mathbf{C}})_{\kappa_1} = 2\mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{IN}) \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN}) \cdot \mathbf{F}$$

относительно конфигурации  $\kappa_1$  и

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_2} = 2\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F},$$

$$(\dot{\mathbf{C}})_{\kappa_2} = 2\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F} \quad (11)$$

относительно конфигурации  $\kappa_2$ . Поэтому тензор, определяемый соотношением (9), будем обозначать  $\mathbf{C}_{\kappa_1}$ , а тензор, определяемый соотношением (10) –  $\mathbf{C}_{\kappa_2}$ .

Для того чтобы учесть влияние температуры, кинематику термо-упруго-неупругого процесса представим, аналогично (2), в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_\Theta \cdot \mathbf{F}_*$ , где  $\mathbf{f}_\Theta$  – градиент места, соответствующий малым температурным деформациям,  $\mathbf{F}_*$  – термо-упруго-неупругий градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную. При этом все градиенты места, определяемые малыми деформациями, коммутируют между собой. В результате имеем разложение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\Theta = [\mathbf{g} + \varepsilon(\mathbf{h}_E + \mathbf{h}_{IN} + \mathbf{h}_\Theta)] \cdot \mathbf{F}_*, \quad (12)$$

$\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*} \cdot \mathbf{F}_{\Theta*}$ . Здесь  $\mathbf{F}_E$  и  $\mathbf{F}_{IN}$  определяются соотношениями (7) и (8);  $\mathbf{h}_\Theta$  – градиент температурных перемещений относительно конфигурации  $\mathbf{F}_*$ ,

$$\mathbf{F}_\Theta = [\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\Theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}] \cdot \mathbf{F}_{\Theta*}. \quad (13)$$

(Заметим, что в соотношениях (12), (13) индексы  $IN$  и  $\Theta$  можно поменять местами). В результате полные малые деформации и повороты определяются выражениями  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\Theta$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_\Theta$ , где  $\mathbf{e}_\Theta$  и  $\mathbf{d}_\Theta$  симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{h}_\Theta$ . Приращение и скорость изменения меры деформаций Коши–Грина относительно промежуточной конфигурации  $\kappa_2$  определяется соотношениями (11), в которых полный градиент места  $\mathbf{F}$  дается выражением (12).

### 3. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Любой упруго-неупругий процесс мы трактуем как упругий из напряженной конфигурации  $\kappa_2$ , близкой к текущей. Близость определяется возможностью использовать соотношение (1) в качестве определяющего уравнения упругости.

Рассмотрим процесс перехода из конфигурации  $\kappa_1$  в текущую  $\kappa$  (см. рис. 1). Конфигурации  $\kappa_1$  соответствует накопленное напряженное состояние  $\mathbf{T}_{\kappa_1}$ . Градиент  $\mathbf{f}_{IN}$  переводит конфигурацию  $\kappa_1$  с этим напряженным состоянием в конфигурацию  $\kappa_2$ , поворачивая тензор  $\mathbf{T}_{\kappa_1}$  посредством  $\mathbf{d}_{IN}$  и пересчитывая его на новую элементарную площадку посредством  $\mathbf{e}_{IN}$ . В результате напряженное состояние в конфигурации  $\kappa_2$  определяется соотношением

$$\mathbf{T}_{\kappa_2} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e}_{IN})] \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{h}_{IN}^T. \quad (14)$$

Напряжения  $\mathbf{T}_{\kappa_2}$  являются начальными для кинематики, определяемой упругим градиентом места  $\mathbf{f}_E$ , и поэтому в соответствии с уравнением состояния (1) тензор истинных напряжений запишется в виде

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e}_E)] \mathbf{T}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{h}_E \cdot \mathbf{T}_{\kappa_2} + \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_2} \cdot \mathbf{h}_E^T + \varepsilon \mathbf{L}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E, \quad (15)$$

где  $\mathbf{L}^{IV}$  определяет отклик материала на малые упругие деформации  $\mathbf{e}_E$  относительно конфигурации  $\kappa_2$ . Подставляя выражение (14) в соотношение (15) и сохраняя только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые, приходим к уравнению

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_{\kappa_1} + \varepsilon \mathbf{T}_{\kappa_1} \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \mathbf{L}^{IV} \cdot \mathbf{e}_E, \quad (16)$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_{IN}$ . Так как  $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN}$ , то, вводя обозначение  $\mathbf{T}_{\kappa_1} = \mathbf{T}_*$ , (16) переписывается в виде

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \mathbf{L}^{IV} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN}). \quad (17)$$

Приближенное уравнение (17) предельным переходом легко сводится к точному  $\mathbf{T}^{Tr} = \mathbf{L}^{IV} \cdot (\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_{IN})$ , где объективная производная Труделла появляется автоматически. В результате, вводя уравнение состояния для скорости неупругих деформаций, получаем эволюционное определяющее уравнение. Выясним структуру тензора  $\mathbf{L}^{IV}$ .

### 4. ФУНКЦИОНАЛ УПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА

В начале рассмотрим чисто упругий материал, и для упрощения обозначений будем опускать индекс «E» во всех кинематических величинах, считая их упругими.

Как известно, тензор истинных напряжений представляется через тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа второго рода в виде  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$ . Тензор же  $\mathbf{P}_{II}$  определяется в теории упругости через упругий потенциал  $W$ , зависящий, обычно, от меры упругих деформаций Коши–Грина  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ :  $\mathbf{P}_{II} = 2(\partial W / \partial \mathbf{C})$ . Используя известные правила дифференцирования тензорных функций тензорного аргумента по тензорному аргументу (см. [5]), имеем

$$\begin{aligned} d\mathbf{P}_{II} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \mathbf{C}} \cdot d\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \mathbf{C}} \cdot (2\mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}) = \\ &= 2 \left( \mathbf{F} \overset{\circ}{\partial} \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot d\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Здесь выражение  $\mathbf{A} \overset{\circ}{\partial} \mathbf{B}^{IV}$  означает скалярное умножение слева тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  на третий базисный вектор тензора четвертого ранга  $\mathbf{B}^{IV}$  (позиционное умножение). Учитывая теперь представление  $\mathbf{P}_{II}$  через упругий потенциал, получаем

$$\mathbf{P}_{II} = 4 \int_0^t \left( \mathbf{F} \overset{\circ}{\partial} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D} dt. \quad (18)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot d\mathbf{C} = 2 \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot d\mathbf{e} = \\ &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot d\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$W = \int_{\mathbf{e}_0^t} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot d\mathbf{e} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}_0^t} \mathbf{P}_{II} \cdot d\mathbf{C},$$

где  $\mathbf{e}_0^t$  и  $\mathbf{C}_0^t$  – истории изменения тензоров  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{C}$ , или, учитывая соотношение (18),

$$W = 4 \int_0^t \left\{ \mathbf{F} \cdot \left[ \int_0^{\tau_1} \left( \mathbf{F} \overset{\circ}{\partial} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D} d\tau_2 \right] \cdot \mathbf{F}^T \right\} \cdot \mathbf{D} d\tau_1. \quad (19)$$

Из этого выражения следует, что

$$\dot{W} = \mathbf{P}_{II} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}) = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (J = I_3(\mathbf{F})).$$

Такая форма представления упругого потенциала позволяет обобщить его на упруго-неупругий процесс. Как видно из соотношения (18), тензор четвертого ранга  $\partial^2 W / \partial C^2$  определяет свойства материала в текущий момент времени и его отклик на бесконечно малое приращение меры деформаций Коши-Грина. Будем моделировать упруго-неупругий процесс с помощью последовательного соединения упругого и неупругого структурных элементов. При таком соединении истинные напряжения в этих элементах одинаковы и равны полному напряжению всей сборки. Приращения этих напряжений определяется приращением упругих деформаций и свойствами упругого элемента, т.е. тензором четвертого ранга  $\partial^2 W(C_E) / \partial C_E^2$ . Поэтому естественным обобщением соотношения (19) на упруго-неупругий процесс будет выражение

$$W_1 = 4 \int_0^t \left\{ \mathbf{F} \cdot \left[ \int_0^{\tau_1} \left( \mathbf{F} \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau_2 \right] \cdot \mathbf{F}^T \right\} \cdot \mathbf{D}_E d\tau_1, \quad (20)$$

где  $\mathbf{F}$  – полный упруго-неупругий градиент места и  $W$  – упругий потенциал, зависящий только от упругой кинематики, определяемой соотношением (7). Из выражения (20) следует, что

$$\dot{W}_1 = 4 \left\{ \mathbf{F} \cdot \left[ \int_0^t \left( \mathbf{F} \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right] \cdot \mathbf{F}^T \right\} \cdot \mathbf{D}_E = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E, \quad (21)$$

откуда

$$\mathbf{T} = 4 J^{-1} \mathbf{F} \cdot \left[ \int_0^t \left( \mathbf{F} \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right] \cdot \mathbf{F}^T.$$

Представим здесь интеграл суммой двух интегралов: первый от 0 до  $t_*$ , который есть  $\mathbf{P}_{II*}$ , второй от  $t_*$  до  $t$ , причем  $t - t_* = \Delta t$  – малая конечная величина, и поэтому его можно аппроксимировать выражением

$$\left( \mathbf{F}_* \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \Big|_{C_E=C_{E*}} \cdot \mathbf{F}_*^T \right) \cdot \varepsilon \mathbf{e}_E.$$

Здесь и ниже величины, помеченные «звездочкой», относятся к моменту времени  $t_*$ . Учитывая теперь соотношение (3) для  $\mathbf{F}$ , приходим, сохраняя только линейные слагаемые по  $\varepsilon$ , к определяющему уравнению (16) со следующей структурой тензора  $\mathbf{L}^{IV}$ :

$$\mathbf{L}^{IV} = 4 J_*^{-1} \mathbf{F}_* \cdot \left( \mathbf{F}_* \overset{3}{\circ} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \Big|_{C_E=C_{E*}} \overset{2}{*} \mathbf{F}_*^T \right) \cdot \mathbf{F}_*^T, \quad (22)$$

где  $\mathbf{V}^{IV} \overset{2}{*} \mathbf{A}$  означает скалярное умножение справа тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  на второй базисный вектор тензора четвертого ранга  $\mathbf{V}^{IV}$ . Конкретное выражение для (22) приведено в работе [3] для упругого потенциала  $W$  слабосжимаемого материала [6–8]. В (22)  $W$  зависит от меры упругих деформаций  $C_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ . Но в нее, в соответствии с соотношением (7), входят вращения  $\mathbf{d}_E$ . Встает проблема разделения полных малых вращений на упругую и неупругую часть:  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_E + \mathbf{d}_{IN}$ . Обычно известно определяющее уравнение для  $\mathbf{e}_{IN}$  ( $\dot{\mathbf{e}}_{IN}$ ). В теории пластичности, например, это ассоциированный закон [1], в теории вязкоупругости – дифференциальный закон для вязких деформаций

ций  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T} / \mu$ , где  $\mu$  – вязкость, в термоупругости  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \beta \Theta \mathbf{g}$ , где  $\beta$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $\Theta$  – температура. Тогда  $\mathbf{e}_E = \mathbf{e} - \mathbf{e}_{IN}$ . Соотношения же для  $\mathbf{d}_{IN}$  ( $\dot{\mathbf{d}}_{IN}$ ) не прописываются. Решению этой проблемы посвящен раздел 6.

## 5. ТЕРМОДИНАМИКА УПРУГО-НЕУПРУГОГО ПРОЦЕССА

Запишем термодинамическое неравенство Клаузиуса – Дюгема

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho (\dot{\Psi} + \dot{\Theta} s) - \mathbf{q} \cdot \nabla \ln \Theta \geq 0,$$

где  $\rho, \Psi, s$  – плотность массы в текущей конфигурации, удельные (отнесенные к единице массы) свободная энергия и энтропия;  $\mathbf{q}$  – вектор теплового потока;  $\nabla$  – оператор Гамильтона в текущей конфигурации. Согласно принципу объективности, аргументами у функции  $\Psi$  могут быть только инвариантные величины, т.е. такая-либо инвариантная по отношению к жесткому вращению текущей конфигурации кинематическая величина, температура  $\Theta$  и конечное число внутренних параметров  $\chi_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) – объективных скалярных функций, характеризующих изменение внутренней структуры материала в процессе упруго-неупругого деформирования. В качестве кинематической величины выберем тензор  $C_{k2}$  и представим удельную свободную энергию  $\Psi = \Psi(C_{k2}, \Theta, \chi_i)$  в виде  $\Psi = \Psi_1(C_{k2}, \Theta, \chi_i) + \Psi_2(\Theta)$ , полагая: 1)  $\dot{\Psi}_1 = 0$ , если  $(\dot{C})_{k2} = 0$  ( $(dC)_{k2} = 0$ ); 2)  $\dot{\Psi}_2 = 0$ , если  $\Theta = \Theta_0$ , где  $\Theta_0$  – температура приведения, измеряемая в градусах Кельвина (обычно это комнатная температура). Согласно условиям (11), если отсутствует изменение упругой деформации ( $\dot{\mathbf{e}}_E = \mathbf{D}_E = 0$ ), то и  $\Psi_1$  не меняется. То есть  $\Psi_1$ , как полагается во многих работах, это энергия, накопленная в упругом элементе. Поэтому любой упруго-неупругий процесс трактуется как упругий с напряженной отсчетной конфигурацией и моделируется последовательным соединением упругого, неупругого и температурного структурных элементов. Первому условию для свободной энергии удовлетворяет функционал  $W_1$  (20), который можно переписать в виде

$$W_1 = \int_0^t \left( \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot \dot{C}_{k2} d\tau_1 \right) \cdot \dot{C}_{k2} d\tau. \quad (23)$$

Если положить, что константы  $a_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) упругого потенциала  $W$  являются функциями неупругой кинематики и температуры  $a_k = a_k(\chi_i, \Theta)$ , что вполне разумно, то изменение функционала  $W_1$  будет зависеть от изменения величин  $C_{k2}$ ,  $\chi_i$  и  $\Theta$ , т.е.  $W_1 = W_1(C_{k2}, \chi_i, \Theta)$ , и, в отличие от (21),

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \frac{\partial W_1}{\partial C_{k2}} \cdot \dot{C}_{k2} + \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i + \frac{\partial W_1}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = \\ &= \left( \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial C_E^2} \cdot \dot{C}_{k2} d\tau \right) \cdot \dot{C}_{k2} + \\ &+ \int_0^t \left[ \int_0^{\tau_1} \left( \frac{\partial^3 W}{\partial \chi_i \partial C_E^2} \dot{\chi}_i + \frac{\partial^3 W}{\partial \Theta \partial C_E^2} \dot{\Theta} \right) \cdot \dot{C}_{k2} d\tau_1 \right] \cdot \dot{C}_{k2} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда следует, во-первых, что  $W_1$  не меняется, если нет изменения  $C_{k2}$ , и, во-вторых, что упругий потен-

циал  $W = W(\mathbf{C}_E(\tau), \chi_i(t), \Theta(t))$ , т.е.  $\chi_i$  и  $\Theta$  входят в упругий потенциал, как параметры, зависящие от  $t$ .

Функционал  $W_1$  отнесен не к единичной массе, а к единичному недеформированному объему. Поэтому  $\rho_0 \Psi_1 = W_1$  и  $\Psi = W_1/\rho_0 + \Psi_2(\Theta)$ , где  $\rho_0$  – плотность массы в начальной конфигурации, связанная с плотностью массы в текущей конфигурации соотношением  $\rho = J^{-1}\rho_0$ . В результате неравенство Клаузиуса – Дюгема принимает вид

$$\left( \mathbf{T} - 2J^{-1} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W_1}{\partial \mathbf{C}_{\kappa_2}} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \dot{\mathbf{e}}_E + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{IN} + \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta - J^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - J^{-1} \rho_0 \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Theta} + s \right) \dot{\Theta} - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0.$$

Построив локальное продолжение процесса и связав  $\dot{\mathbf{e}}_\Theta$  с изменением температуры законом линейного температурного расширения, получаем

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{P}_{II} = 2 \int_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}_E^2} \cdot \dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} d\tau = 4 \int_0^t \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial \mathbf{C}_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E d\tau, \quad (25)$$

$$s = J \frac{\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \Theta} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial \Theta}, \quad (26)$$

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{IN} - J^{-1} \frac{\partial W_1}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \Theta \geq 0. \quad (26)$$

Представим в соотношении (24) интеграл в  $\mathbf{P}_{II}$  суммой двух интегралов: от 0 до  $t_*$  и от  $t_*$  до близкого текущего времени  $t$ , а температуру  $\Theta(t)$  и скалярные структурные параметры  $\chi_i(t)$ , которые являются аргументами упругого потенциала  $W$  и зависят от времени  $t$ , в виде  $\Theta = \Theta_* + \varepsilon \theta$ ,  $\chi_i = \chi_{i*} + \varepsilon \zeta_i$ , где величины, помеченные «звездочкой», соответствуют времени  $t_*$ , а члены с  $\varepsilon$  – их приращения к моменту времени  $t$ . Тогда, с точностью до линейного разложения по  $\varepsilon$ ,

$$\frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_* + \varepsilon \theta, \chi_{i*} + \varepsilon \zeta_i)}{\partial \mathbf{C}_E^2} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*, \chi_{i*})}{\partial \mathbf{C}_E^2} + \varepsilon \theta \frac{\partial^3 W(\mathbf{C}_E, \Theta, \chi_{i*})}{\partial \Theta \partial \mathbf{C}_E^2} \Big|_{\Theta=\Theta_*} + \varepsilon \zeta_i \frac{\partial^3 W(\mathbf{C}_E, \Theta_*, \chi_i)}{\partial \chi_i \partial \mathbf{C}_E^2} \Big|_{\chi_i=\chi_{i*}},$$

и процедура построения соотношения (16), приведенная в конце раздела 4, дает следующее определяющее уравнение

$$\mathbf{T} = [1 - \varepsilon I_1(\mathbf{e})] \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_* + \varepsilon \mathbf{T}_* \cdot \mathbf{h}^T + \varepsilon \theta (\mathbf{T}_{,\Theta})_* + \varepsilon \zeta_i (\mathbf{T}_{,\chi_i})_* + \varepsilon \mathbf{L}^{IV} \cdot \cdot \mathbf{e}_E. \quad (16^*)$$

Структура выражений  $\mathbf{T}_{,\Theta}$  и  $\mathbf{T}_{,\chi_i}$  аналогична (16\*) и приведена в [9].

С учетом (24) функционал (23) можно записать в виде

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \mathbf{P}_{II} \cdot \dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} d\tau = \int_0^t J \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E d\tau. \quad (27)$$

Как отмечено выше,  $W_1$  не меняется, если нет изменения  $\mathbf{C}_{\kappa_2}$ . Если это происходит на протяжении всего процесса упруго-неупругого деформирования, то из (24) следует, что  $\mathbf{T} = 0$ , и тогда из (25)  $s = -\partial \Psi_2 / \partial \Theta$ .

Последнее соотношение с привлечением первого закона термодинамики позволяет конкретизировать функцию  $\Psi_2(\Theta)$ , что, в свою очередь, позволяет переписать выражение (25) в виде

$$s = J \frac{\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W_1}{\partial \Theta} - c_{T_0} \ln \frac{\Theta_0}{\Theta} + \int_{\Theta_0}^{\Theta} \ln \left( \frac{\Theta}{\Theta_1} \right) c_{T_1}(\Theta_1) d\Theta_1, \quad (28)$$

где теплоемкость единицы массы при нулевом напряжении полагалась зависящей от температуры согласно соотношению

$$c_T = c_{T_0} + \int_{\Theta_0}^{\Theta} c_{T_1}(\Theta_1) d\Theta_1.$$

В результате из первого закона термодинамики

$$\rho(\dot{\Psi} + s \dot{\Theta} + \dot{s} \Theta) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho \Omega - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q},$$

где  $\Omega$  – удельная скорость производства тепла внутренними источниками, приняв соотношение Фурье для теплового потока  $\mathbf{q}$ , имеем

$$\rho \Theta \dot{s} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} W_{1,\chi_i} \dot{\chi}_i + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta) \quad (29)$$

– энтропия производится внешними источниками тепла (два последних слагаемых в правой части (29)) и скрытыми источниками (два первых слагаемых в правой части (29)), зависящими от мощности неупругого деформирования и изменения внутренней структуры материала. Подставляя (28) в (29), получаем уравнение теплопроводности

$$c \dot{\Theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho \Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \Theta), \quad (30)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;

$$c = J^{-1} \rho_0 c_T + \Theta \left[ (\beta_{,\Theta} + 2\beta^2) I_1(\mathbf{T}) + \beta I_1(\mathbf{T}_{,\Theta}) - J^{-1} \int_0^t J \mathbf{T}_{,\Theta\Theta} \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right] - \text{теплоемкость};$$

$$\dot{Q}_E = \Theta \left[ \mathbf{T}_{,\Theta} - 2\beta \mathbf{T} - \beta (\mathbf{g} \cdot \mathbf{L}^{IV}) \right] \cdot \mathbf{D}_E - \text{скорость производства тепла упругими деформациями};$$

$$\dot{Q}_{IN} = (1 - \beta \Theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + \dot{\chi}_i \left[ J^{-1} \int_0^t J (\Theta(t) \mathbf{T}_{,\Theta\chi_i} - \mathbf{T}_{,\chi_i}) \cdot \mathbf{D}_E d\tau - \beta \Theta I_1(\mathbf{T}_{,\chi_i}) \right] - \text{скорость производства тепла неупругими деформациями и структурными изменениями в материале}.$$

## 6. ОГРАНИЧЕНИЯ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ПРИНЦИПА ОБЪЕКТИВНОСТИ

В соотношениях предыдущего раздела присутствуют мощности  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E$ ,  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{IN}$  и  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta$ . Из соотношений (7), (8), (13) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{d}}_E &= \dot{\mathbf{F}}_E \cdot \mathbf{F}_E^{-1} = \mathbf{I}_E, \\ \dot{\mathbf{e}}_\Theta + \dot{\mathbf{d}}_\Theta &= \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_E \cdot \dot{\mathbf{F}}_\Theta \cdot \mathbf{F}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{F}_{IN}^{-1} = \mathbf{I}_\Theta, \\ \dot{\mathbf{e}}_{IN} + \dot{\mathbf{d}}_{IN} &= \mathbf{F}_E \cdot \dot{\mathbf{F}}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{IN}^{-1} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} = \mathbf{I}_{IN} \end{aligned} \quad (31)$$

и, учитывая симметрию тензора  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E = \mathbf{T} \cdot \mathbf{l}_E$ ,  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{l}_{IN}$ ,  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta = \mathbf{T} \cdot \mathbf{l}_\Theta$ . Рассмотрим преобразование этих величин при вращении как жесткого целого текущей, неупругой, температурной и начальной конфигураций (при смене соответствующих систем отсчета). В работе [4] показано, что при изменении этих конфигураций градиенты места преобразуются следующим образом

$$\mathbf{F}' = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}_0, \quad \mathbf{F}'_E = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{O}_{IN}^T, \\ \mathbf{F}'_{IN} = \mathbf{O}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{O}_\Theta^T, \quad \mathbf{F}'_\Theta = \mathbf{O}_\Theta \cdot \mathbf{F}_\Theta \cdot \mathbf{O}_0. \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{O}$ ,  $\mathbf{O}_{IN}$ ,  $\mathbf{O}_\Theta$  и  $\mathbf{O}_0$  – ортогональные тензоры, преобразующие текущую, неупругую, температурную и начальную конфигурации. Причем, если первые три зависят от времени и принадлежат полной группе ортогональных преобразований, то последний не зависит от времени и характеризует начальную анизотропию материала. С учетом соотношений (32), определяем по (31) тензоры  $\mathbf{l}'_E$ ,  $\mathbf{l}'_{IN}$ ,  $\mathbf{l}'_\Theta$ . В результате имеем

$$\mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{e}}'_E = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{l}'_E = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_E + \\ + \left( \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_E \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{O}}_{IN}^T \cdot \mathbf{O}_{IN} \right), \\ \mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{e}}'_{IN} = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{l}'_{IN} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{IN} - \\ - \left( \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_E \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{O}}_{IN}^T \cdot \mathbf{O}_{IN} \right) + \\ + \left( \mathbf{F}_{IN}^{-1} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{O}}_\Theta^T \cdot \mathbf{O}_\Theta \right), \\ \mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{e}}'_\Theta = \mathbf{T}' \cdot \mathbf{l}'_\Theta = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_\Theta - \\ - \left( \mathbf{F}_{IN}^{-1} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{O}}_\Theta^T \cdot \mathbf{O}_\Theta \right) + \\ + \left( \mathbf{F}_\Theta^{-1} \cdot \mathbf{F}_{IN}^{-1} \cdot \mathbf{F}_E^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\Theta \right) \cdot \left( \dot{\mathbf{O}}_0^T \cdot \mathbf{O}_0 \right). \quad (33)$$

Последнее слагаемое в последнем выражении (33) равно нулю, так как тензор  $\mathbf{O}_0$ , определяющий начальную анизотропию материала, не зависит от времени.

Из представленных выше соотношений следует, что полная мощность есть инвариантная величина (аксиома Нолла):  $\mathbf{T}' \cdot \dot{\mathbf{e}}' = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{e}}$ . Однако мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации зависят от жестких преобразований конфигураций за счет членов, включающих операцию двойного скалярного умножения на кососимметричные тензоры (спины)  $\mathbf{A}_{IN} = \dot{\mathbf{O}}_{IN}^T \cdot \mathbf{O}_{IN}$ ,  $\mathbf{A}_\Theta = \dot{\mathbf{O}}_\Theta^T \cdot \mathbf{O}_\Theta$ . Если эти члены не равны нулю, то соответствующим выбором тензоров  $\mathbf{O}_{IN}$  и  $\mathbf{O}_\Theta$  можно получит любые по величине и знаку мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации за счет только изменения отсчетных конфигураций. Эти члены равны нулю в двух случаях: 1) если тензоры, с которыми свертываются спины  $\mathbf{A}_{IN}$  и  $\mathbf{A}_\Theta$ , симметричны; 2) если  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{g}$  и  $\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{g}$  в любой момент времени ( $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_\Theta$  – ортогональные тензоры в полярных разложениях градиентов места  $\mathbf{F}_{IN}$  и  $\mathbf{F}_\Theta$ ). Первое условие выполняется только для чисто упругого процесса при начальной изотропии материала. В случае упруго-неупругого процесса это условие не выполняется, как следует из (24). Так как соотношения (33) справедливы для любых ортогональных тензоров  $\mathbf{O}_{IN}$  и  $\mathbf{O}_\Theta$ , то, полагая  $\mathbf{O}_{IN} = \mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{O}_\Theta = \mathbf{R}_\Theta$ , получаем второе условие. В результате полный градиент места представляется в виде  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{U}_{IN} \cdot \mathbf{U}_\Theta$ , где  $\mathbf{U}_{IN}$  и  $\mathbf{U}_\Theta$  – симметричные положительно определенные тензоры чистых деформаций в полярных разложениях градиентов места  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{R}_{IN} \cdot \mathbf{U}_{IN}$ ,  $\mathbf{F}_\Theta = \mathbf{R}_\Theta \cdot \mathbf{U}_\Theta$ , в которых  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{g}$  и

$\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{g}$ . Таким образом, доказано необходимое условие инвариантности мощности упругого деформирования, механической и тепловой диссипации по отношению к преобразованиям отсчетных конфигураций, которое, как показано в [4], является также и достаточным.

Условия  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{g}$  и  $\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{g}$  дают возможность установить связь между  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_{IN}$  и между  $\mathbf{e}_\Theta$  и  $\mathbf{d}_\Theta$ . Градиенты места (7), (8) и (13) можно представить в виде  $\mathbf{F}_i = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{F}_{i*}$ , где

$$\mathbf{P}_i = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{h}_E, & i = E \\ \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*}, & i = IN \\ \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\Theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}, & i = \Theta \end{array} \right\}.$$

В работе [10] рассматриваются изменения собственных значений и собственных векторов симметричного положительно определенного тензора  $\mathbf{A}$  при его слабом возмущении  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{a}$  таким, что тензор  $\mathbf{A}'$  остается симметричным и положительно определенным. Полученные соотношения применяются к тензорам  $\mathbf{U}_i = \sum_{k=1}^3 U_k^i \delta_k^i \delta_k^i$  и  $\mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^3 U_k^i \tilde{\delta}_k^i \tilde{\delta}_k^i$ , присутствующим в полярных разложениях градиентов места:  $\mathbf{F}_i = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_i = \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{R}_i$ . Зная тензоры  $\mathbf{U}'_i$  и  $\mathbf{V}'_i$ , строятся тензоры  $\mathbf{R}'_i$ :

$$\mathbf{R}'_i = \left\{ \mathbf{g} + \varepsilon \left[ \mathbf{P}_i^c - \frac{U_m^i - U_n^i}{U_m^i + U_n^i} (\tilde{\delta}_m^i \cdot \mathbf{P}_i^s \cdot \tilde{\delta}_n^i) \tilde{\delta}_m^i \tilde{\delta}_n^i \right] \right\} \cdot \mathbf{R}_i.$$

Здесь  $\mathbf{P}_i^s$  и  $\mathbf{P}_i^c$  – симметричная и кососимметричная части тензора  $\mathbf{P}_i$ . В результате, принимая во внимание условия  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{R}'_{IN} = \mathbf{g}$  и  $\mathbf{R}_\Theta = \mathbf{R}'_\Theta = \mathbf{g}$ , получаем следующие уравнения, связывающие малые неупругие повороты с малыми неупругими деформациями

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_{IN} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_{IN} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{IN}, \quad (34)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{F}_{E*}^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\Theta*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}$ , и малые температурные повороты с малыми температурными деформациями

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_\Theta + \mathbf{d}_\Theta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_\Theta \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\Theta, \quad (35)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{F}_{E*}^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\Theta*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}$ . Эти уравнения имеют единственное решение (см. [2]). Полагая в уравнении (35)  $\mathbf{e}_\Theta = \beta \theta \mathbf{g}$ , где  $\theta$  – малое изменение температуры, получаем в силу его единственного решения, что  $\mathbf{d}_\Theta = 0$ . Решая уравнение (34), в котором  $\mathbf{e}_{IN}$  задано своим уравнением состояния (см. конец раздела 4), определяем  $\mathbf{d}_{IN}$ , что позволяет в результате найти  $\mathbf{d}_E$  для соотношения (7).

## 7. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ

В целях аттестации приведенных выше соотношений рассмотрены упругопластический [1] и вязкоупругий [11] процессы. Здесь мы приведем результаты, полученные для термоупругого и термоупругопластического процессов однородного деформирования сред.

### 7.1. Термоупругость

Постановка связанной термоупругой задачи осуществлена в слабой (вариационной) форме и содержит уравнения [9]

$$\frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{C} dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{S_0} J_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dS_0 = 0,$$

$$\int_{V_0} J \left[ \lambda \nabla \Theta \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \delta(\nabla \Theta) + (A \dot{\Theta} + B \Theta) \delta \Theta \right] dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \Omega \delta \Theta dV_0 + \int_{S_0} J_S q_n \delta \Theta dS_0 = 0. \quad (36)$$

Здесь  $V_0$  и  $S_0$  – объем и полная поверхность тела в начальной конфигурации;  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{p}$  – массовые и поверхностные силы;  $\mathbf{u}$  – вектор полных перемещений;  $J_S$  – якобиан, определяющий относительное изменение поверхностей (текущей и начальной);  $\nabla$  – оператор Гамильтона в начальной конфигурации. Функции  $A$  и  $B$  вытекают из удобной для решения данной задачи формы записи уравнения теплопроводности (30) и имеют вид

$$A = J^{-1} \rho_0 c_T + \Theta \left[ \beta_{,\Theta} I_1(\mathbf{T}) + \beta I_1(\mathbf{T}_{,\Theta}) - J^{-1} W_{1,\Theta\Theta} \right],$$

$$B = \beta \left[ I_1(\mathbf{T}) I_1(\mathbf{D}) + I_1(\dot{\mathbf{T}}) \right] - \mathbf{T}_{,\Theta} \cdot \mathbf{D},$$

где  $W_1$  определяется выражением (27). Полагая во втором уравнении (36)  $q_n = 0$  и задавая на соответствующей поверхности тела температуру, получаем для последней граничные условия первого рода. Полагая  $q_n = -\mathbf{N} \cdot \lambda \nabla \Theta$ , где  $\mathbf{N}$  – внешняя единичная нормаль к поверхности в текущей конфигурации, получаем граничные условия второго рода. При  $q_n = \alpha_s (\Theta - \Theta_c)$ , где  $\alpha_s$  – коэффициент теплопередачи,  $\Theta_c$  – абсолютная температура окружающей среды, имеем граничные условия третьего рода. Тензор напряжений  $\mathbf{P}_{II}$  определяется в соответствии с соотношением (16\*), в котором  $\zeta_i$  полагаются равными нулю. Диссипативное неравенство (26) сводится к известному выражению  $\mathbf{q} \cdot \nabla \Theta \leq 0$ .

Уравнения (36) использовались для решения простой, но имеющей богатое экспериментальное обеспечение, задачи о растяжении стержня из эластомера, характеристики которого приведены в [9]. Рассматривались изотермический и адиабатический процессы. На рис. 2 показано изменение температуры при адиабатическом растяжении стержня до удлинения  $\alpha_2 = 1.8$ , а на рис. 3 – начальный участок процесса.

На рис. 4 приведено истинное растягивающее напряжение (кривая 1). В силу малого изменения температуры, кривая 1 практически одна и та же как для изотермического, так и для адиабатического процессов.

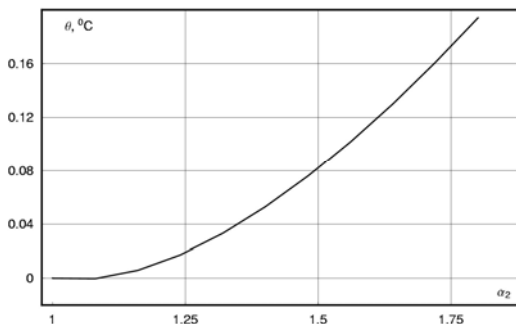


Рис. 2. Изменение температуры

Первый закон термодинамики (29) для изотермического процесса при отсутствии внутренних источников тепла  $\Omega = 0$  представляется в виде  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} = \rho(\dot{u} - \Theta \dot{s})$ , где  $u$  – внутренняя энергия. Для рассматриваемой задачи это соотношение можно переписать в виде  $T^{33} = T_u + T_s$ , где  $T^{33}$  – напряжение растя-

жения,  $T_u = \rho \alpha_2 (\partial u / \partial \alpha_2)$ ,  $T_s = -\rho \alpha_2 \Theta (\partial s / \partial \alpha_2)$  – вклад внутренней энергии и энтропии в производство напряжения. Кривая 2 на рис. 4 соответствует  $T_s$ , а кривая 3 –  $T_u$ . То есть основной вклад в производство напряжения осуществляет энтропия. Это так называемая энтропийная упругость – известный факт.

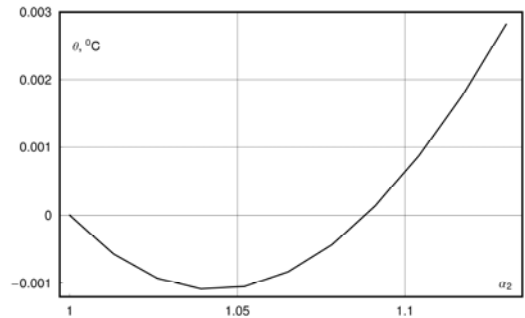


Рис. 3. Изменение температуры (начальный участок)

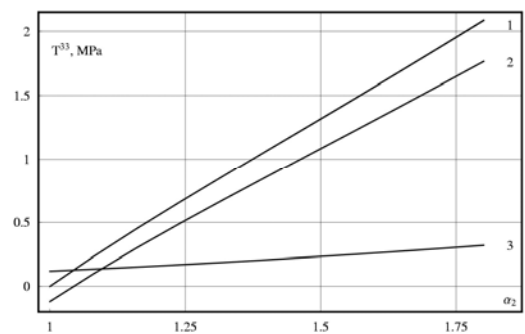


Рис. 4. Напряжение растяжения (1), вклады энтропии (2) и внутренней энергии (3)

На рис. 5 представлены зависимости напряжения растяжения от температуры предварительно растянутого образца до деформаций  $\alpha_2 = 1.02$  (кривая 1),  $\alpha_2 = 1.13$  (2),  $\alpha_2 = 1.4$  (3) и  $\alpha_2 = 1.8$  (4). При малых степенях предварительного растяжения нагревание ведет к уменьшению напряжения, а при больших – к увеличению. Это так называемая температурная инверсия, объясняющаяся действием двух факторов: увеличением при нагревании температурной деформации, что ведет к уменьшению напряжения в растянутом стержне, и увеличением с ростом температуры модуля сдвига, что ведет к увеличению напряжения.

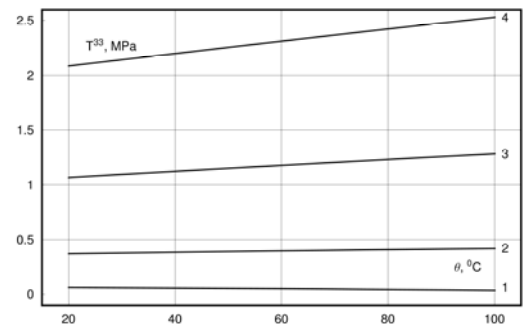


Рис. 5. Термоупругая инверсия

Таким образом, развиваемая теория описывает такие хорошо известные для эластомеров экспериментальные факты как энтропийная упругость, температурная инверсия и характер изменения температуры в адиабатическом процессе.

## 7.2. Термоупругопластичность

Пластическое поведение материала описывалось ассоциированным законом с функцией текучести Мизеса:  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = (3\dot{\sigma}_i/2H\sigma_i)\mathbf{S}$ , где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $H$  – модуль пластического упрочнения,  $\mathbf{S}$  – девиатор истинных напряжений. Полагалось отсутствие структурных изменений в материале. В этом случае диссипационное неравенство (26) сводится к выражению  $\mathbf{q} \cdot \nabla \Theta \leq 0$ .

Рассматривалось адиабатическое растяжение стержня из стали 30ХГСА. Упругое поведение материала описывалось упрощенным законом Синьорини, для которого, в соответствии с (22), определялась функция отклика материала. На рис.6 приведено изменение температуры.

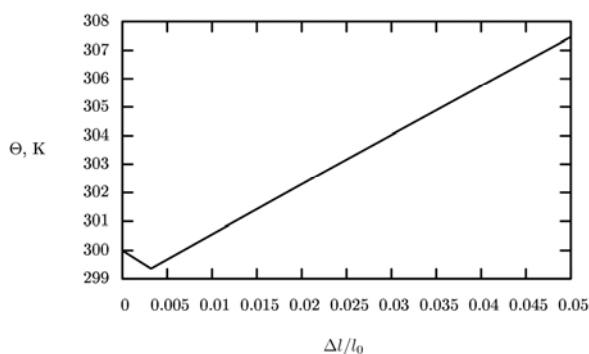


Рис.6. Изменение температуры.

$l_0$  – начальная длина,  $\Delta l$  – приращение длины

При деформации порядка 0.3% наступает пластичность. В упругой области температура падает, а при наступлении пластичности – растет.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен, обоснован и аттестован подход к построению уравнений, описывающих термо-упруго-неупругие процессы при конечных деформациях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 77–95.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: наука, 1988. 552 с.
3. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т.46. № 5. С. 138–149.
4. Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т.48. № 4. С. 144–153.
5. Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестник Перм. ГТУ. Динамика и прочность машин. Пермь. 2001. № 2. С. 83–90.
6. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости материала в упругих задачах с конечными деформациями // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 4. С. 64–77.
7. Кузнецова В.Г., Роговой А.А. Эффект учета слабой сжимаемости эластомеров. Осесимметричная задача. Аналитическое решение // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 6. С. 27–37.
8. Rogovoy A. Effect of elastomer slight compressibility // Europ. J. Mech. A/Solids. - 2001. - V. 20. - Pp. 757–775.
9. Роговой А.А., Столбова О.С. Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // ПМТФ (принята в печать).
10. Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ (принята в печать).
11. Новокшанов Р.С., Роговой А.А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 4. С. 122–140.