

УДК 533.601.18

ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ В ЗАДАЧАХ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Э.В. Прозорова

С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург

prozorova@niimm.spbu.ru

Аннотация

Обсуждаются следствия, связанные с учетом изменения момента количества движения в элементарном объеме, в кинетической теории и в механике жидкости и газа. Анализируются адекватность модели описания процесса и алгоритма решения. Рассмотрены некоторые задачи обтекания простейших тел.

INFLUENCE OF THE DISPERSION IN THE PROBLEM OF THE AEROGASDYNAMICS

Consequences from the influence of the law of the angular momentum conservation in an elementary volume are discussed for kinetic theory and mechanics of the gas and liquids. Sufficiency the physical model and algorithm for the numerical solution are analyzed by the kinetic theory help. Some examples are considered.

Введение

Математическое моделирование, выбор метода расчета, согласованность выбранного метода расчета с построенной моделью и расчет сложных течений вблизи поверхностей возмущения при больших скоростях движения газа или жидкости в необходимом для практики диапазоне параметров является важной и до конца не исследованной проблемой. По-прежнему остается не до конца решенным вопрос адекватности результатов вычислительного эксперимента и физической модели в условиях больших градиентов физических величин. Анализ взаимодействия нелинейности, диссипации и дисперсии в уравнениях Навье — Стокса, в пограничном слое и в кинетических уравнениях интересен как для анализа численных схем так и для решения общих вопросов, связанных с изменением типа уравнений при изменении нелинейности коэффициентов. Широкое распространение разностных схем и предъявляемые к ним требования поставили вопрос о совпадении их математических свойств и свойств исходной задачи (монотонность разностной схемы, совпадение групповых свойств и т. д.) [1]. Кроме того, требует ответа вопрос о возможности просто решать уравнения или необходимо принимать во внимание заложенные при его выводе положения, включая совпадения областей определения уравнений. Наиболее важен ответ при решении кинетического уравнения Больцмана.

В работе обсуждаются применимость различных моделей описания и роль изменения момента количества движения и, следовательно, изменения момента силы в гидроаэродинамике. Самый простой подход — записать законы сохранения для классической механики сплошной среды: массы, импульса и энергии. К основополагающим законам сохранения, кроме того, относится закон сохранения момента количества движения, но он для бесструктурных частиц не выводится. На роль момента количества движения указывали Л.Д.Ландау, С. де Гроот, П.Мазур, И.Дьярмати, И.Пригожин, Л.И. Седов. Наиболее развито это направление в моментной теории упругости (Р.Д. Миндлин, В.А. Пальмов, А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В.Яровой, В.М. Левин, С.Е. Канаун, Э.Л.

Аэро и др.). Для газа и жидкости, насколько нам известно, конкретных предложений по учету эффекта действия момента силы не было. Учитывать момент представляется необходимым при больших градиентах физических величин, при расчете течений в окрестности длинных тел и там, где существенно влияние малого радиуса кривизны. Экспериментально законы сохранения получаются в интегральной форме. Перейти от интегральной формы к дифференциальной форме можно для гладких функций, что предполагает возможность стягивания объема в точку и отказа от учета каких-либо процессов внутри объема. Теоретически часто законы сохранения получаются путем записи балансовых соотношений для элементарного объема, расположенного в безграничном пространстве. Для каждого закона сохранения выбирается свой элементарный объем.

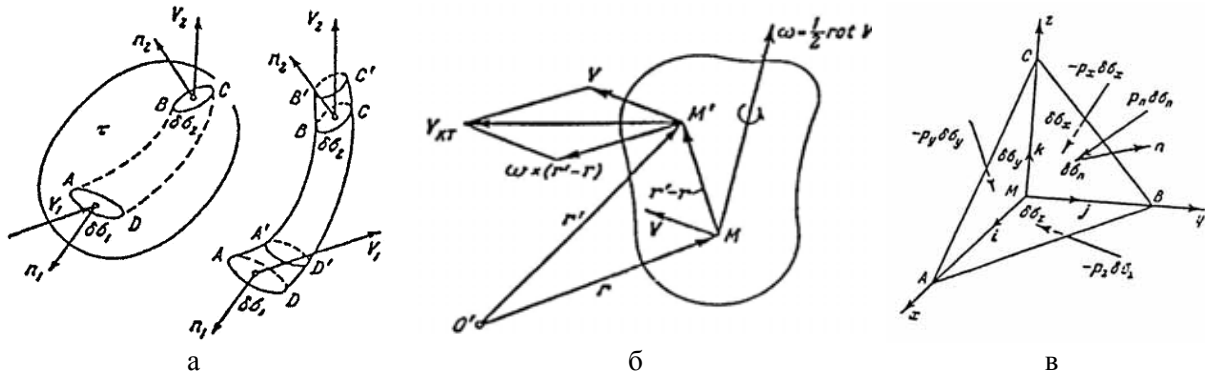


Рис.1. Элементарные объемы, используемые при построении теории.

Однако закон сохранения момента количества движения предполагает наличие конкретной системы отсчета, конкретного радиуса - вектора, идущего из начала координат к элементарному объему. В силу указанных формулировок фактически постулируется симметрия момента количества движения, в то время как для произвольного возмущения движение материальной точки является неинерциальным, а выделенный элемент представляет открытую систему. Математически наличие больших градиентов приводит к большому остаточному члену при традиционном переходе от интегральной формулировки к дифференциальной. Физический смысл отброшенного слагаемого — момент силы, вызывающий вращение элементарного объема. При больших градиентах, как правило, ламинарное течение переходит в турбулентное. В модели Рейнольдса фактически выделяются быстрые и медленные переменные. В полученных осредненных уравнениях устанавливается связь между напряжениями Рейнольдса и осредненными параметрами течения, но ответа на вопрос о виде замыкающего соотношения еще нет. Процесс построения соотношения базируется или же на эмпирическом материале или выписываются уравнения для моментов более высокого порядка, например, для турбулентной (пульсационной) кинетической энергии. В полученные уравнения входят новые неизвестные величины, и процесс замыкания повторяется по указанному сценарию. Для инерциальной подобласти в равновесном случае получается известный закон Колмогорова, следующий из теории размерности. Обзор существующих теорий, уточнение моделей и их анализ можно найти, например в [2-12]. В основе всех теорий лежат уравнения Навье — Стокса. Даже если привлекается уравнение Больцмана с целью получения из него уравнений турбулентного течения, методика вывода ориентирована на обоснование модели Рейнольдса, построенной на основе уравнений Навье — Стокса. Основные направления исследований следующие:

1. Усложнение структуры коэффициента динамической вязкости.

2. Усложнение уравнений (введение слагаемого с третьей производной, тензоров третьего порядка и т. д.).
3. Формулировка новой системы уравнений для новой системы функций.
4. Введение в уравнение движения случайных сил или случайной вязкости.
5. Решение полных трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса на подробных сетках с использованием схем высокого порядка точности.
6. Выделение крупных вихрей с дополнением картины течения внутри сеточной ячейки дополнительным исследованием выбранной модели внутри ячейки.

Мы придерживаемся второго направления исследований в трактовке пункта 5 по указанным ниже причинам. В уравнениях Навье–Стокса и пограничного слоя взаимодействуют нелинейность и диссипация. Однако известно, что кроме перечисленных факторов для ряда задач существенны дисперсионные эффекты. Классическим уравнением, для которого характерно присутствие и взаимодействие нелинейности, диссипации и дисперсии является уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Как известно, влияние дисперсии приводит к расщеплению исходного возмущения на отдельные гармоники. Форма сигнала изменяется. Если в уравнение движения системы уравнений Навье – Стокса ввести дополнительное слагаемое, то оно превратится в уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Интересно проследить за новыми эффектами, которые появляются вследствие взаимодействия нелинейности и дисперсии, нелинейности и диссипации. Важно также определить связь между уравнением Больцмана и новым уравнением. Известно, что методы кинетической теории газа позволяют вывести уравнения Навье – Стокса из уравнения Больцмана, а также определить коэффициенты переноса.

Здесь представлены результаты решения системы уравнений Навье — Стокса и уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости, дополненных слагаемым, отвечающим за дисперсионные эффекты, для некоторых частных задач. Модифицированные уравнения Навье — Стокса выведены из модифицированного уравнения Больцмана. Физический смысл введенного в уравнение Навье—Стокса слагаемого состоит в учете влияния дивергенции момента количества движения. В силу повышения порядка системы уравнений мы вынуждены вводить дополнительное условие. Общих рекомендаций по выбору граничных условий в настоящее время получить не удалось. С целью исследования их влияния мы задавали трение на поверхности тела в качестве граничного условия. Напомним, что в формулы, описывающие распределение скорости внутри турбулентного пограничного слоя, входит постоянная, имеющая смысл динамической скорости и представляющая корень квадратный из отношения трения на стенке к значению плотности на стенке. В силу сказанного мы не привносим новых идей при постановке граничных условий. Можно задавать момент количества движения. Поскольку оказалась важной роль вертикальной составляющей скорости, в некоторых задачах мы задавали значение вертикальной компоненты на внешней границе. Пока не рассматривались граничные условия для функции распределения. Предварительный анализ говорит о достаточности обычно используемых граничных условий. Однако следует помнить, что для уравнения Ньютона необходимо знать две величины.

Рассмотрим скоростное поле сплошной среды в окрестности точки. Теорема Гельмгольца гласит: любое движение элементарного объема жидкости можно в данное мгновение рассматривать как результат сложения двух движений: квазитвердого, состоящего из поступательного вместе с выбранным полюсом и вращательного вокруг полюса, и деформационного.

Теорема соответствует следующей записи (\mathbf{r} – радиус-вектор полюса)

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \mathbf{w} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}),$$

причем угловая скорость \mathbf{w} может быть выражена через вихрь скорости \mathbf{V}

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V}.$$

Аналогично рассматриваются бесконечно малые перемещения в теории упругости. В классической газодинамике и в теории упругости учитывается только первое слагаемое, и теоремы, которыми мы пользуемся, относятся к эффектам, связанным с этим слагаемым. Вспомним закон изменения момента количества движения для сплошной среды (обозначения стандартные)

$$\int \left[\mathbf{r} \times \left(\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \dot{\mathbf{M}}\mathbf{V} - \rho\mathbf{V} - \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \mathbf{P}_x - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \mathbf{P}_y - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \times \mathbf{P}_z \right] d\tau = 0.$$

Далее мы остановимся на следующих конкретных примерах: задачах обтекания бесконечных и полубесконечных пластин; задачи обтекания клина (задача Фокнера–Скэн); обтекание пластины на малых временах. Для полубесконечной пластины построено решение в виде ряда.

Мы преследуем цель показать, что предлагаемая система уравнений может быть получена из первых принципов, и при этом, по крайней мере, часть известных нам свойств, излагаемых в учебниках и наблюдаемых в экспериментах для турбулентных течений, может быть объяснена без привлечения дополнительных предположений о виде турбулентной вязкости и что можно ограничиться одной молекулярной вязкостью.

Прежде чем переходить к решению конкретных задач, приведем цитату из книги Л. Г. Лойцянского [9].

«Линии тока пульсационного движения пересекают линии тока осредненного движения, проникают из одного слоя в другой и создают при этом перемешивание – его называют турбулентным или молярным перемешиванием – сопровождается переносом сквозь границу между слоями количества движения, энергии, тепла и других механических или термодинамических параметров осредненного движения жидкости. Приведенные для турбулентного профиля скорости являются осредненными. Как показывает теория устойчивости, в областях зарождения турбулентности наблюдаются сначала регулярные колебательные структуры.»

Логарифмические профили для бесконечных пластины и трубы, вообще говоря, получены для изделий конечной длины, хотя и достаточно удлиненных. Теоретический профиль определен введением напряжения Рейнольдса. Распределение скорости в ламинарном потоке $u = \frac{\tau_w}{\mu}$ и $\mu \frac{du}{dy} = const = \tau_w$. Для турбулентного движения напряжение

турбулентного трения $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ на стенке равно нулю. Уравнение Рейнольдса

$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{d\tau}{dy} = 0$. Если напряжение трения задать формулой Прандтля,

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w, \quad l = \kappa y, \quad \kappa = const, \quad \text{то}$$

$$u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C, \quad C = const.$$

Таким образом, при получении классических профилей скорости использовано несколько предположений и решается не уравнение Навье–Стокса и не уравнение пограничного слоя, а уравнение Прандтля. Исходные уравнения не удовлетворяются ни на внешней границе, ни на поверхности; нет асимптотического перехода решения задачи для полубесконечной пластины к решению задачи для бесконечной пластины.

Поскольку основным вопросом механики сплошной среды является переход от описания взаимодействия системы материальных точек к формулировке законов сохранения, а в аэродинамике за решение данного вопроса отвечает кинетическая теория, остановимся на некоторых, на наш взгляд, существенных особенностях вывода уравнений.

Влияние дисперсии в кинетических уравнениях

Все газодинамические функции имеют макроскопический характер и, если мы хотим получать их из кинетической теории, то используем кинетическое уравнение для "макрофункции" – одночастичной функции распределения. Уравнение для одночастичной функции распределения получается или непосредственно как уравнение баланса частиц, или через N -частичную функцию распределения, введенную Н.Н. Боголюбовым [13], с привлечением уравнения Лиувилля. Теория позднее была развита его учениками и сотрудниками [14-16]. Уравнение Лиувилля является основным уравнением статистической механики. Вывод этого уравнения базируется на том, что движение ансамбля тождественных частиц подобно движению газа с плотностью F_N . В нем учитывается изменение состояния системы во времени и инерциальное прямолинейное движение. Из уравнения Лиувилля, используя формализм Гамильтона, выводят кинетическое уравнение в терминах классической механики, после чего переходят к получению уравнения Больцмана. Однако формализм Гамильтона правомерно использовать в случае бездиссипативной системы, когда нет зависимости от скорости, что при наличии возмущающих поверхностей или в условиях больших градиентов скоростей, температур, плотностей или других характеристик не наблюдается. Из уравнения Больцмана методом Чепмена — Энского или каким-либо другим выводятся уравнения Навье — Стокса (Барнетта и т. д.), определяется уравнение неразрывности, совпадающее по форме с уравнением Лиувилля. Таким образом, доказывается непротиворечивость всей теории. Предложенная первоначально теория для решения релаксационных задач экстраполирована на решение задач, связанных с динамикой газа, в том числе для решения задач о течении газа вблизи поверхности.

Ограничения схемы Н.Н. Боголюбова оговаривались самим автором и связаны с выполнением условий ослабления корреляций, существованием четырех характерных масштабов времени (соответственно, пространственных масштабов), частным классом решений для s -частичной функции распределения как функции, зависящей от времени через одночастичную функцию распределения $f_s(t) = f_s(f)$, бинарными центральными взаимодействиями, обеспечивающими закон сохранения момента количества движения, потенциалом U , быстро спадающим с расстоянием, доминированием объемных эффектов и пренебрежением влиянием границ. Потенциал взаимодействия молекул $\Phi = \Phi|r-r_0|$. Дополнительным неявным предположением служит слабое отклонение функции распределения от равновесного состояния. Для релаксационных задач и упругих столкновений все предположения выполняются. Исключен случай, когда характерные времена релаксации одночастичной F_1 и двухчастичной F_2 соизмеримы. Следует отметить, что для молекул с более сложным потенциалом взаимодействия, зависящим от угла, осреднение по углу производят до вычисления сечения столкновений (осреднение потенциала). Исследований, касающихся влияния перестановки операций осреднения сечения столкновений и потенциала, нет. Здесь F – функция распределения в Γ –

пространстве, f – функция распределения в фазовом γ – пространстве. Выведем уравнение для N -частичной функции распределения вблизи поверхности с учетом градиента плотности частиц. При выводе модифицированного уравнения обозначения оставим общепринятыми, т. е. r - радиус-вектор; x - координата точки; ξ - скорость точки, m - молекулярный вес, и, согласно определению функции распределения f_N , вероятность нахождения системы в точках (x_i, ξ_i) в интервалах $dx_i, d\xi_i$ равна $f_N(t, x_1, \dots, x_N, \xi_1, \dots, \xi_N) dx_1, \dots, x_N d\xi_1, \dots, \xi_N$.

Вычислим изменение момента количества движения в произвольной точке $\delta L = m(r + \delta r) \times f_N(t, r + \delta r, \xi) \xi - mr \times f_N(t, r, \xi) \xi$.

Но $f_N(t, r + \delta r, \xi) = f_N(t, r, \xi) + \delta r \cdot \frac{\partial f_N}{\partial r}$. В результате изменение момента количества движения для рассматриваемого момента времени представится следующим образом

$$\delta L = m(\delta r f_N + r \delta f_N) \xi$$

После преобразования получаем

$$\delta L = m \delta r \left(f_N + r \frac{\delta f_N}{\delta r} \right) \xi.$$

Вдали от стенки градиенты функции малы, и, кроме того, после раскрытия производных во втором слагаемом получаем величины разных знаков, что снижает роль момента. В случае расчета аналога начального слоя Кнудсена придется проделать процедуру разложения в ряд по времени. При учете нестационарных эффектов

$$\xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_j \frac{\partial f_N}{\partial t} \right)$$

Пока мы не будем учитывать вклад изменения скорости, считая вклад сил по-старому. В результате полная производная примет вид

$$\frac{df_N}{dt} = \frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left\{ \xi_i \cdot \left[\frac{\partial f_N}{\partial x_i} \right] + \xi_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left[x_j \frac{\partial f_N}{\partial x_j} \right] - \frac{X_i}{m} \frac{\partial f_N}{\partial \xi_i} \right\}$$

Главный вклад вблизи поверхности дают одинаковые индексы, что связано с присутствием стенки и максимальным значением градиента функции по нормали к стенке.

Мы получили одно традиционное слагаемое $\xi_i \frac{\partial f_N}{\partial x_i}$ и второе, которое имеет вид

$$\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_j \frac{\partial f_N}{\partial x_j} \right).$$

Влияние дисперсии в уравнении Больцмана

Рассмотрим уравнения для s - частичной функции распределения (F_s) [13,14]

$$\frac{1}{V^s} \frac{\partial F_s}{\partial t} = -\frac{1}{V^s} \sum_{i=1}^s \frac{p_i}{m} \frac{\partial F_s}{\partial r_i} + \frac{1}{2V^s} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^s \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_i} dr_j dp_j - \\
 & - \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{j=s+1}^N \int \frac{p_j}{m} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial r_j} dr_j dp_j + \\
 & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_j} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_j} dr_j dp_j + \\
 & + \frac{1}{2V^{s+2}} \sum_{\substack{i,j=s+1 \\ (j \neq i)}}^s \int \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+2}(t, r_1, \dots, r_s, r_i, r_j, p_1, \dots, p_s, p_i, p_j)}{\partial p_i} dr_i dr_j dp_i dp_j
 \end{aligned}$$

Обычно предполагается, что при $|r_j| \rightarrow \infty \quad \frac{\partial}{\partial r_j} F_n \rightarrow 0$, $|p_j| \rightarrow \infty \quad \frac{\partial}{\partial p_j} F_n \rightarrow 0$.

Последние три слагаемых при указанных условиях обращаются в нуль. При отсутствии равновесия пространственная производная в нуль не обращается. Не будет она обращаться в нуль при неравновесном взаимодействии газа с поверхностью для конечных объемов в случае, например, вдува газа с поверхности. Процентный вклад этого слагаемого будет значительным при больших характерных размерах процесса. Пока не ясно, как скажется слагаемое на граничных условиях. Уравнение для одночастичной функции распределения содержит двухчастичную функцию распределения. В приближении парных столкновений получается классическое уравнение Больцмана, которое и будет рассмотрено далее. Учет многочастичных взаимодействий молекул [16] как более сложный случай взаимодействий, приводящих к корреляционным эффектам и усложняющих интеграл столкновений, в работе не рассматривается. Акцент сделан на изучении влияния момента. Не проводится анализ многочисленных методов решения классического уравнения Больцмана. Эти вопросы подробно рассмотрены в [13-19].

Уравнение Больцмана

Классический вывод уравнения Больцмана состоит в записи баланса частиц через соотношение для одночастичной функции распределения

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i dt, \mathbf{c}_i + \mathbf{F}_i dt) d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt. \tag{1}$$

Часто последнее пишут в форме

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i dt, \mathbf{c}_i + \mathbf{F}_i dt) = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right)_{coll} dt. \tag{2}$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}$, $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right)_{coll}$ – интегралы столкновений, записанные в различных фазовых пространствах. Внешне эти равенства идентичны, однако второе соотношение выполняется на временах взаимодействия молекул и все взаимодействия коррелированы.

Для газодинамических задач характерная длина элементарного объема, для которого записано равенство (2), равная 10^{-8} см. мала и требование большого числа частиц в

элементарном объеме не выполняется для высот 120-300 км в земной атмосфере. Действительно, необходимый минимальный размер составляет 10^{-3} см. Так как $N = \pi R^2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot n$, где R – радиус цилиндра элементарного объема; τ – среднее время свободного пробега, то для статистической независимости количества частиц N должно быть не меньше 100. Тогда $\pi R^2 \cdot 10^4 \cdot 10^{12} \cdot 10^{-5} = 10^2$, т.е. $R \approx 10^{-3}$ см. Кроме того, возможность уменьшения характерных размеров ограничена не только по причине ограниченности компьютерной памяти, но и пределами применимости модели [17], а также ростом погрешностей вычислений. Следовательно, теоретически возможны ситуации, когда для обеспечения выполнения статистических свойств и выбора реальных пространственных масштабов в элементарном объеме необходимо учитывать градиенты функции распределения. Именно поэтому обычно решается уравнение Больцмана или используется метод молекулярной динамики, хотя проводить расчет по соотношению (2) легче. Уравнение Больцмана получается из первого:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_i \dot{\nabla}_r + \mathbf{F}_i \dot{\nabla}_{c_i} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt = I.$$

Здесь $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}_i, t)$ определена таким образом, что величина $f d\mathbf{r} d\mathbf{c}_i$ равна среднему числу молекул, центры которых в момент времени t лежат в элементе объема в $d\mathbf{r}$ точки \mathbf{r} , а скорости – в интервале $d\mathbf{c}_i$ вблизи скорости \mathbf{c}_i . Для газодинамических задач градиенты наблюдаются вблизи возмущающих поверхностей, при смешении струй различной плотности и т.д. Используемые при измерениях приборы имеют конечные размеры и, следовательно, также работают в условиях наличия градиентов. Кроме того, размеры элементарной ячейки должны по порядку величины совпадать с аналогичными величинами для макропараметров, если в качестве цели выбран переход к макроуравнениям, так как вблизи локального равновесия, где применимо уравнение Больцмана, функция распределения определяется макропараметрами [18].

Градиент функции распределения в элементарном объеме создает вращение и с ним связано изменение момента количества движения. Обозначив мгновенный угол поворота элементарного объема жидкости через ω_i , получим уравнение $\dot{\omega}_i dJ_{i_a} = dL$ [20, 21], где L – момент количества движения, J_{i_a} – момент инерции элементарного объема. Таким образом, обобщенный импульс следует написать в виде $\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \dot{\omega}_i \times \delta \mathbf{r}_i$, где \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i_a} – геометрический вектор и вектор центра тяжести элементарного объема.

В общем случае уравнение запишем в виде

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{p}_i dt, \mathbf{p}_i + \mathbf{F}_i dt) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_i = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_i, t) d\mathbf{r} d\mathbf{p}_i + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt.$$

Переход к уравнениям Навье-Стокса при такой записи затруднен, поэтому можно поступить следующим образом. Вычислим изменение момента количества движения L в элементарном объеме в произвольной точке (для одночастичной функции распределения). Так как при вращении тела вокруг оси \mathbf{a} с угловой скоростью $\dot{\omega}$ и моментом инерции \mathbf{J}_a имеем $\mathbf{L} = \mathbf{J}_a \dot{\omega}$. С другой стороны, в силу равенства $\mathbf{p}_i = \mathbf{c}_i + \dot{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i_a})$.

$$\delta \mathbf{L} = (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times f(t, \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{c}_i - \mathbf{r} \times f(t, \mathbf{r}, \mathbf{c}_i) \mathbf{c}_i.$$

Преобразуем формулу следующим образом:

$$\delta \mathbf{L} = m \delta \mathbf{r} \times \left(f + \mathbf{r} \cdot \frac{\delta f}{\delta \mathbf{r}} \right) \cdot \xi.$$

Здесь учтены изменения момента количества движения, связанные как с изменением функции распределения внутри объема, так и с приращением момента в результате перехода в другую точку. Вообще говоря, в интеграле столкновений необходимо учитывать поворот, но им можно пренебречь в силу малости радиуса взаимодействия молекул, но требуется учесть изменение функции распределения при больших скоростях. В случае расчета начального слоя или при быстром изменении силы сделаем аналогичную процедуру разложения в ряд по времени. Тогда появится член $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial}{\partial t}$, так как роль силы

выполняет производная по времени ($\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_a$). Момент количества движения относительно центра инерции \mathbf{r}_a равен нулю. Главный вклад дают одинаковые индексы, что связано с присутствием стенки и максимальным значением градиента функции по нормали к стенке. Новое уравнение Больцмана запишется следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} \right] + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} \left[r_{ij} \frac{\partial f}{\partial r_{ij}} \right] - \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}_i} = I.$$

После вычисления моментов имеем уравнение неразрывности с новым слагаемым

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Полученное новое уравнение имеет вид, отличный от традиционного. Отсутствие слагаемого со второй производной в законе сохранения плотности в классических уравнениях связано с неучтенностью вращения, создающего эффект диффузии в элементарных объемах. Закон сохранения количества движения имеет вид

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho u_i u_j + P_{ij} + x_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{X_i}{m} \rho = 0.$$

Модифицированное уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] = 0 \end{aligned}$$

Здесь t – время, x_i – координаты, u_j – скорости, $\bar{\nu}$ – вязкость, ρ – плотность, T – температура, q – тепловой поток, P_{ij} – тензор вязких давлений, X – сила.

В некоторых работах предлагалось выписывать отдельный закон сохранения момента количества движения. Речь шла о структурных частицах, обладающих собственным моментом количества движения. Попытаемся показать, что несмотря на то, что никаких новых характерных параметров в уравнение для бесструктурного газа не появляется, уравнение для момента придется выписывать в условиях больших градиентов. Это следует из изменения интеграла столкновений и условий равновесия обобщенных сил. Интеграл столкновений состоит из двух слагаемых: покидающих группу c_i и попадающих в нее.

Число столкновений, испытываемых всеми c_i молекулами будет зависеть от количества падающих молекул и их функция распределения отличается от аналогичной в рассматриваемой точке. Поэтому

$$\Delta^- = dt d\bar{x} d\bar{\xi} f(t, \bar{x}, \bar{\xi}) \int \left[f_1(t, \bar{x}, \bar{\xi}) + O\left(\Delta t \bar{\xi} \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \right] g b d b d \varepsilon d \bar{\xi}_1$$

$$\Delta^+ = dt d\bar{x} d\bar{\xi}' \int \left[f(t, \bar{x}, \bar{\xi}') f(t, \bar{x}, \bar{\xi}'_1) + O\left(\Delta t \bar{\xi} \frac{\partial f}{\partial x}\right) \right] g' b' d b' d \varepsilon' d \bar{\xi}'_1$$

$$I = \Delta^- - \Delta^+$$

Здесь ε — угол, b — расстояние от оси, $g = \xi_1 - \xi$, параметры после взаимодействия обозначены штрихом. Теперь получим уравнение для момента количества движения из модифицированного уравнения Больцмана. Классическое уравнение Больцмана получается из него при малом изменении функции распределения на длине свободного пробега. Если остаточный член проинтегрировать по скоростям на длине свободного пробега и разделить на плотность частиц, получится слагаемое, учитываемое в теории Б.В. Алексеева [22].

$$\int (\bar{r} \times m \bar{\xi}_i) \frac{\partial f}{\partial t} d\bar{\xi} + \int (\bar{r} \times m \bar{\xi}_j) \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\xi_i +$$

$$+ \int (\bar{r} \times \bar{\xi}_j m) \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\xi = I_M$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \times \bar{p}_x + \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \times \bar{p}_y + \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \times \bar{p}_z + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{P}_j) = M_I$$

Если условие малости изменения функции распределения выполняется, $M_I \approx 0$.

Из сказанного следует, что необходимо учитывать момент количества движения и записывать дополнительное уравнение для этой величины. Тензор напряжений становится несимметричным. Теорема об энтропии для модифицированного уравнения, так как ее вывод основывается на использовании свойств интеграла столкновений при предположениях, рассмотренных Н.Н. Боголюбовым, выполняется. Возникает вопрос правомерности решения задач о структуре ударной волны и расчете слоя Кнудсена, когда характерный размер имеет значение порядка единицы, используя традиционную форму записи уравнения Больцмана. Это забытый вопрос. Более того, в большинстве старых работ при численном решении уравнения Больцмана шаг разностной сетки, отнесенный к длине свободного пробега на бесконечности, в задачах обтекания выбирался равным единице или больше. Если вспомнить о слое Кнудсена и условиях применимости уравнения Больцмана становится очевидным ошибочность такого подхода. Конечно, при расчете структуры одномерной ударной волны нет влияния момента, хотя при ее двумерном возмущении влияние момента должно быть. Представляется вероятным, что именно поэтому наблюдается хорошее совпадение результатов численных расчетов с экспериментальными данными для модели сплошной среды в расчетах при использовании метода потоков, так как в этом случае неявно выполняется закон сохранения момента количества движения в связи с конечным значением шага по координате [23-24].

Простейшие задачи гидродинамики. Пластина

Рассмотрим систему уравнений вида

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$u=0, \quad v=0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y=0; \quad (4)$$

$$u=U_\infty, \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0; \quad u=U_\infty, \quad x=0.$$

Обозначения стандартные. Система уравнений напоминает систему уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости для полубесконечной пластины, но включает описание дополнительного эффекта, связанного с дисперсией (третья производная). Кроме этого, введено дополнительное краевое условие, которым часто пользуются в турбулентном пограничном слое для восстановления профиля скорости, не определяя его значения. Конкретные значения определяются из дополнительного исследования.

Для бесконечной пластины $u = u(y)$, $v = v(y)$, $P = \text{const}$. Система уравнений вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение и имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) + \frac{d}{dy} \left(v \frac{d^2 u}{dy^2} \right) = 0$$

с граничными условиями

$$u=0, \quad \mu \frac{du}{dy} = \tau_w, \quad y=0;$$

$$u=U_\infty, \quad y \rightarrow \infty.$$

Для обеспечения соответствующей размерности уравнения необходимо предположить линейную зависимость коэффициента дисперсии от координаты $\nu = \nu_1 y$. Далее индекс будем опускать. Такое предположение приводит к следующим результатам.

Проинтегрируем уравнение один раз:

$$\mu \frac{du}{dy} + \mu y \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{const} = \tau_w. \quad (5)$$

Постоянная в силу граничных условий равна $\text{const} = \tau_w$. Интеграл уравнения дается формулой

$$u = C \cdot \ln y + \tau_w / \mu \cdot y + \text{const}.$$

Возможный вариант удовлетворения граничных условий на стенке состоит в том, что при $y = \frac{\nu}{\nu_*}$, где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, $\nu_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho_w} \right)^{1/2}$, $C \cdot \ln y = 0$. Дальнейшее уменьшение скорости происходит до обращения ее в нуль, производная становится очень большой, но нулевые значения скорости на двух границах пристеночного слоя не дают течь в обратном

направлении. Толщина "покоящейся" жидкости при числах Рейнольдса $Re = 10^6$ равна 10^{-3} см. Действительно, для воздуха при одной атмосфере при движении пластины со скоростью 300 км/час на расстоянии 0,2 м при общей длине пластины 2 м для $\nu = 14 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\nu^* = 1.59 (Re_x \approx 10^6)$. Здесь ν – кинематическая вязкость, ν^* – динамическая скорость, Re_x – текущее значение числа Рейнольдса ([9], стр. 597). Измерений надежных в этой области нет. Для ламинарного слоя такой области нет, так как вблизи кромки работает градиент по x , вдали от кромки трение стремится к нулю, что приводит к уравнению (5), но $\tau_w = 0$. Обращение правой части уравнения (5) в нуль при граничных условиях по y 0 и 1 приводит к перестройке течения и формированию "заполненного" профиля экспоненциального типа, однако более толстого, чем вблизи кромки пластины. Из соотношения (5) при нулевом значении трения можно получить длину смещения Кармана. Еще раз отметим отсутствие асимптотического перехода между классическими решениями для полубесконечной и бесконечной пластинами. Для бесконечной пластины формально получается логарифмический профиль, однако задача сингулярна в силу асимптотического стремления трения к нулю пропорционально обратной степени \sqrt{x} , как следует из решения задачи Блазиуса и экспериментов. Логарифмические профили для бесконечных пластины и трубы, вообще говоря, получены для изделий конечной длины, хотя и достаточно удлиненных. Теоретический профиль определен введением напряжения Рейнольдса. Распределение скорости в ламинарном потоке $u = \frac{\tau_w}{\mu} y$ и $\mu \frac{du}{dy} = \text{const} = \tau_w$. Для турбулентного движения напряжение турбулентного трения $\tau = -\rho \overline{u'v'}$ на стенке равно нулю. Уравнение Рейнольдса получается в виде $\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\tau}{dy} = 0$. Если напряжение трения задать формулой Прандтля,

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w, \quad l = \alpha^2,$$

то

$$u = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln y + C, \quad C = \text{const}$$

Таким образом, использовано несколько предположений и решается не уравнение Навье-Стокса и не уравнение пограничного слоя, а уравнение Прандтля. Исходные уравнения не удовлетворяются ни на внешней границе, ни на поверхности. Полученный профиль удовлетворяет как модифицированному уравнению так и экспериментальным данным. Для отличающихся коэффициентов μ и ν не получается логарифмического профиля. Ниже (рис.2) приведен один из результатов А.И. Воронковой, полученный для полубесконечной пластины при изменении трения на стенке сначала по закону для полубесконечной пластины и смене этого значения на постоянную величину, равную последнему значению. Рассчитывается переходной слой, классическое уравнение неразрывности, модифицированное уравнение движения.

Рисунки, для определения смены условия.

$\alpha=1$, смена условия после 76-го слоя (различие 0.005)

76-й слой

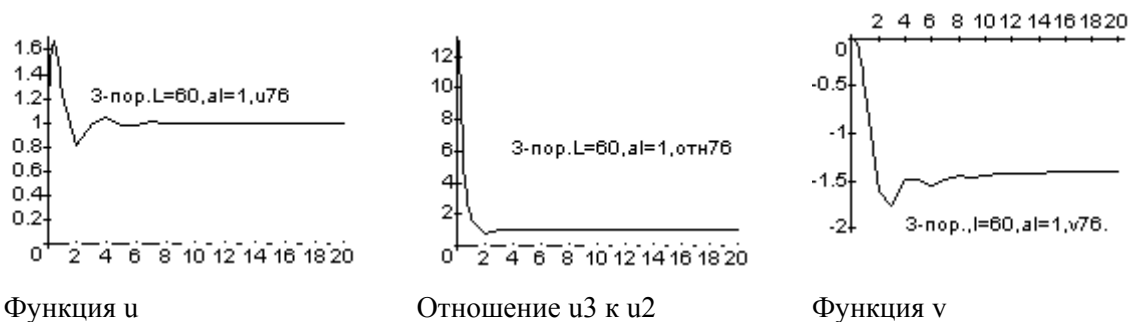


Рис.2

Более подробно результаты численного исследования представлены в работе [23].

Рассмотрим аналитический способ решения системы уравнений для полубесконечной пластины. Эксперименты указывают на автомодельность задачи. Группа преобразований этой задачи не может быть шире группы преобразований, характерной для соответствующей задачи о ламинарном пограничном слое, поскольку дополнительно входят новые постоянные. Поэтому решение можно представить в виде

$$u = \frac{\Phi}{x^l}, \quad v = \frac{V}{x^p}, \quad \eta = \frac{y}{x^k}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем следующие значения:
 $l = 0, \quad p = 1/2, \quad k = 1/2$

В результате вместо предыдущей получится система уравнений

$$-1/2\eta\Phi \frac{d\Phi}{d\eta} + V \frac{d\Phi}{d\eta} = \mu \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta} \left(v\eta \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} \right);$$

$$-1/2\eta \frac{d\Phi}{d\eta} + \frac{dV}{d\eta} = 0. \tag{6}$$

Определим V из уравнения (5.13) и будем считать $v = \mu$, что позволяет ограничиться одним коэффициентом молекулярной вязкости. Равенство коэффициентов выбрано в целях согласования с известными данными полученных далее результатов.

Для устранения интегралов, получающихся в ходе вычислений V , обозначим Φ за ψ'_η . Таким образом, мы придем к уравнению

$$\mu \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d^3\psi}{d\eta^3} \right) + \mu \frac{d^3\psi}{d\eta^3} + 1/2\psi \frac{d^2\psi}{d\eta^2} = 0.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\psi^* = \sqrt{\mu U_\infty} \psi, \quad y_1 = 1/2 \sqrt{\frac{\mu}{U_\infty}} \eta.$$

Далее, для простоты, в обозначениях оставляем старые переменные. Тогда

$$2\eta\psi'''' + 2\psi'''' + \psi\psi'' = 0 \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = \alpha, \quad \psi'(\infty) = 1.$$

Ищем решение уравнения (7) в виде ряда, построенного по степеням η по методике, изложенной в [11].

Последовательно дифференцируя уравнение (7), найдем

$$\psi'''(0) = 0, \quad \psi^{(4)}(0) = 0, \quad \psi^{(5)} = -1/6\alpha^2.$$

Обнаруживаем, что

$$\psi^{(3k)}(0) = \psi^{(3k+1)}(0); \quad k = (0, 1, \dots).$$

Положим, как и в [11],

$$\psi^{(3k+2)}(0) = (-1/2)^k c_k \alpha^{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

и найдем рекуррентные соотношения для коэффициентов c_k ; получаем $c_0 = 1, c_1 = 1/3$. Взяв от обеих частей уравнения (7) производную порядка $3k - 1$, получим

$$\psi^{(3k+2)} = -1/4[\psi^{(3k-1)}\psi'' + C_{3k-1}^1\psi^{(3k-2)}\psi''' + \dots + \psi\psi^{(3k+1)}].$$

Используя начальные значения для производных, получим равенство:

$$\begin{aligned} \psi^{(3k+2)}(0) = -1/4[\psi^{(3k-1)}(0)\psi''(0) + C_{3k-1}^1\psi^{(3k-2)}(0)\psi'''(0) + \dots \\ \dots + \psi(0)\psi^{(3k+1)}(0)] = -1/4 \sum_{r=0}^{k-1} C_{3k-1}^{3r} \psi^{(3k-1-3r)}(0)\psi^{(3k+2)}(0); \end{aligned}$$

После сокращения на $(-1/2)^k \alpha^{k+1}$ найдем рекуррентную формулу

$$c_k = \sum_{r=0}^{k-1} C_{3k-1}^{3r} c_{k-r-1} c_r, \quad k > 2.$$

В результате построим ряд Тейлора для функции ψ

$$\psi(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1/2)^k * \frac{c_k \alpha^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2}.$$

Как и для обычных уравнений Навье – Стокса, в случае обтекания пластины ряд при малых η и заданном α будет сходиться. При $\alpha = 1$ мы получаем функцию, дающую решение уравнения (7), определяющееся начальными условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = 1.$$

Сравнивая выражения последние уравнения, находим

$$\psi(\eta) = \alpha^{1/3} \psi_0(\eta \alpha^{1/3}).$$

Таким образом, структура ряда получилась прежней. Одни и те же коэффициенты обращаются в нуль; для функции тока различия в коэффициентах при пятом члене. Решение уравнения четвертого порядка, по крайней мере, вблизи поверхности оказалось близким структуре решения уравнения третьего порядка.

Рассмотрим сходимость ряда на бесконечности и коэффициенты μ и ν . Вопрос их равенства положителен в силу указанной автомодельности задачи. Полученный ряд является знакопеременным. Формальный признак равномерной сходимости ряда не

выполняется. Получить производную функции, которая нас интересует, не представляется возможным, но кое-что доказать можно.

Докажем, что $\psi'(\infty)$ – величина ограниченная. Напишем уравнение (7) в форме

$$2(\eta\psi_0''')' + \psi_0\psi_0'' = 0. \quad (8)$$

При всех положительных η функция $\psi_0(\eta)$ и ее производные $\psi_0'(\eta)$ и $\psi_0''(\eta)$ положительны, а производная $\psi_0'''(\eta)$ отрицательна.

Рассмотрим $\psi_0''(\eta)$ и допустим, что эта функция обращается в нуль в некоторой точке $\eta = 1$, оставаясь положительной при $\eta < \eta_1$. Тогда в этой точке обратятся в нуль $\psi_0'''(\eta)$ и $\psi_0''''(\eta)$.

После дифференцирования мы получили бы, что все производные, начиная со второй, обратились бы в нуль. Функция оказалась бы линейной, что противоречит начальным условиям. Отсюда следует положительность функции $\psi_0''(\eta)$. Следовательно, положительны $\psi_0'(\eta)$ и $\psi_0(\eta)$. Из уравнения (8) и граничных условий вытекает отрицательность $\psi_0'''(\eta)$ и $(\eta\psi_0''')$.

Вследствие сказанного,

$$\psi_0(\eta) > \psi_0(1) + \psi_0'(1)(\eta - 1).$$

Сходимость на бесконечности для производной функции ψ следует из того, что

$$\left(\eta \frac{\psi_0''''}{\psi_0''} \right) - \left(\frac{\psi_0''''}{\psi_0''} \right) < 0.$$

Отсюда имеем

$$\ln \psi_0'' > \int_0^\eta \frac{\eta \psi_0''''}{\psi_0''} d\eta.$$

Разделим уравнение (8) на ψ_0'' . После чего получим

$$2 \ln \psi_0'' = - \int_0^\eta \left(\psi_0'' + 2\eta \frac{\psi_0''''}{\psi_0''} \right) d\eta,$$

$$4 \ln \psi_0'' < - \int_0^\eta \psi_0'' d\eta.$$

Откуда следует ограниченность $\psi_0'(\eta)$.

$$\psi_0'(\eta) = \int_0^\eta \exp \left[- \int_0^\eta \left(\psi_0'' + \frac{\psi_0''''}{\psi_0''} \right) d\eta \right] d\eta.$$

Сходимость ряда будет более медленной, чем для обычной задачи Навье–Стокса. Значение постоянной предстоит определить непосредственным расчетом.

Пограничный слой. Малые времена

Новое уравнение движения и старое уравнение неразрывности при обтекании цилиндра имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{\nu} = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Здесь t – время, x_i – координаты, u, v – скорости, $\tilde{\nu}$ – вязкость, ρ – плотность, U_e – скорость на внешней границе. Для малых времен пограничный слой тонок, скорость близка к U_e , μ – динамическая вязкость; v близко к 0. Воспользуемся теорией малых возмущений. Тогда мы получим в первом приближении необходимость решения следующей задачи

$$\tilde{\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0$$

После введения новой функции и новой переменной

$$u_1 = U_e(x) f_1(\eta), \quad \eta = y / 2\sqrt{\tilde{\nu}t}$$

уравнение примет вид

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta} (\eta f_1'') + 2\eta f_1' = 0.$$

Для выяснения влияния дисперсии разложим уравнение в ряд около поверхности. Первый член ряда будет иметь вид функции вероятности

$$f_{10} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy$$

Следовательно, решение принимает классический вид для $\eta < 0.5$.

В общем случае нестационарный оператор в уравнении движения имеет вид $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial}{\partial t}$.

Это следует из факта, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеет размерность силы. Поэтому система уравнений в нестационарном случае

$$\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{\nu} = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Граничные условия остаются прежними. Вводя новую функцию и новое уравнение

$$u_1 = U_e(x) f_1(\eta), \quad \eta = y / 2\sqrt{\tilde{\nu}t}$$

вместо системы уравнений получим уравнение

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta} (\eta f_1'') + 2\eta f_1' + 2 \frac{d}{d\eta} (\eta^2 f_1') = 0$$

Непосредственно около стенки получается линейный профиль. Дальнейшее исследование связано с численным решением стационарной задачи с модифицированным уравнением неразрывности и определением влияния граничных условий.

Пограничный слой в окрестности границы раздела двух параллельных течений с различными скоростями

Два первоначально раздельных и невозмущенных параллельных течения, имеющих различные скорости U_1 и U_2 вследствие трения начинают взаимодействовать. Переход от скорости U_1 к U_2 можно описать следующей модифицированной системой уравнений (рассматривается задача в рамках ламинарного пограничного слоя, так как граница перемешивания считается невозмущенной)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

с граничными условиями

$$u = U_1 - U_2, \quad v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y = 0;$$

$$u = U_1, \quad y \rightarrow \infty, \quad x > 0; \quad u = U_\infty, \quad x = 0.$$

$$u = U_2, \quad y \rightarrow -\infty, \quad x > 0.$$

Задание граничного условия в виде трения на границе раздела с точки зрения практики является бессмысленным, но какие условия необходимо задавать не ясно. В общем случае, очевидно, необходимо задавать условие (условия) на поверхности разрыва, но пока ограничимся указанными.

Система уравнений напоминает систему уравнений пограничного слоя несжимаемой жидкости для полубесконечной пластины. Для обеспечения соответствующей размерности уравнения необходимо предположить линейную зависимость коэффициента дисперсии от координаты. Поэтому решение можно представить в виде (обозначения стандартные). В результате получится система уравнений

$$-1/2\eta\Phi \frac{d\Phi}{d\eta} + V \frac{d\Phi}{d\eta} = \mu \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta} \left(\nu_1 \eta \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} \right);$$

$$-1/2\eta \frac{d\Phi}{d\eta} + \frac{dV}{d\eta} = 0.$$

Определим V из уравнения неразрывности и будем считать $\nu_1 = \mu$, что позволяет ограничиться одним коэффициентом молекулярной вязкости. Равенство коэффициентов выбрано в целях согласования с известными полученными далее результатами. Для устранения интегралов, получающихся в ходе вычислений V , обозначим Φ за ψ'_η . Таким образом, мы придем к уравнению

$$\mu \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d^3\psi}{d\eta^3} \right) + \mu \frac{d^3\psi}{d\eta^3} + 1/2\psi \frac{d^2\psi}{d\eta^2} = 0.$$

Введем безразмерные переменные $\psi^* = \sqrt{\mu U_\infty} \psi$, $y_1 = 1/2\sqrt{\mu/U_1} \eta$. Далее, для простоты, в обозначениях оставляем старые переменные. Тогда

$$2\eta\psi''' + 2\psi''' + \psi\psi'' = 0$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1 - a, \quad \psi''(0) = \alpha, \quad \psi'(-\infty) = a.$$

Аналитического решения найти не удалось.

Задача Фокнера–Скен

Система уравнений в этом случае:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y = 0;$$

$$u = U_e \quad y \rightarrow \infty, \quad x > 0; \quad u = U_e, \quad x = 0.$$

Обозначения стандартные. Конкретный вид τ_w определим позднее. После перехода к автомодельным переменным

$$u = cx^m \phi(\eta), \quad \eta = \sqrt{\frac{c}{\mu}} y x^{(m-1)/2}, \quad v = \sqrt{\mu c} x^{(m-1)/2} V(\eta), \quad v = \mu y$$

получаем систему уравнений

$$m\Phi^2 + \frac{m-1}{2} \eta \Phi \frac{d\Phi}{d\eta} + V \frac{d\Phi}{d\eta} = m + \mu \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta} \left(\mu \eta \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} \right);$$

$$m\Phi + \frac{m-1}{2} \eta \frac{d\Phi}{d\eta} + \frac{dV}{d\eta} = 0.$$

Последняя задача путем преобразования $\Phi = \psi'$ сводится к следующей:

$$(\eta\psi''')' + \psi''' + \frac{m-1}{2} \psi\psi'' = m(\psi'^2 - 1)$$

с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad \psi''(0) = \alpha, \quad \psi'_{\infty} = 1.$$

Возможно, что граничные условия нуждаются в уточнении. Например, коэффициент α определится, если потребовать, чтобы $\psi'(\infty) = 0$.

Следует отметить, что при переходе к безразмерным переменным новых параметров не появляется.

Выводы

Представляется необходимым в уравнениях механики сплошной среды учитывать закон сохранения момента количества движения.

Дополнительные сведения можно найти в [26-28].

Литература

1. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Наука. Новосибирск. 1981. 304с.
2. Турбулентность. Принципы и применения. Ред. Фрост У., Моулден Т. М.: Мир, 1980, 535с.
3. Новожилов В.В. Теория плоского турбулентного течения в несжимаемой жидкости./ – Ленинград: Судостроение, 1977, 164с.
4. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. – М.: Физматлит, 1998. 343с.
5. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. – Екатеринбург: РАУО УрО РАН, 2001, 161с.
6. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Турбулентность. Новые подходы. – М.: Наука, 2003, 286с.
7. Кокошинская Н.С. О системе уравнений для описания течений вязкой жидкости и газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса./ Математические модели естествознания. – М.: Изд-во МГУ, 1994, с.60-65.
8. Методы расчета турбулентных течений. Пер. с англ. / Под. ред. Кольмана. – М.: Мир, 1984, 464 с.
9. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа./ – М.: Наука.1970. 904с.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Мир, 1974, 712 с.
11. Кочин Н. Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2./ – М.: физ-мат. 1963, 728 с.
12. Смольяков А.В. Шум турбулентных потоков. ЦНИИ им. А.Н. Крылова Санкт-Петербург. 2005. 312с.
13. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.: Гостехиздат. 1946, 146 с.
14. Гуров К.П. Основания кинетической теории. – М.: Наука, 1966. 350 с.
15. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука. 1967, 440 с.
16. Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и плазмы.М.: Наука.352 с.
17. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004, 332с.
18. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. – М.: Мир, 1976, 554с.
19. Рудяк В.Я. Статистическая аэрогидродинамика гомогенных и гетерогенных сред. – Новосибирск: НГАСУ, 2004, 320с.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1965, 204 с.
21. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит. 1960, 295с.
22. Алексеев Б. В. Математическая кинетика реагирующих газов. М.: Наука. 1982. 420 с.
23. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984, 520с.
24. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980, 352с.
25. Воронкова А.И., Прозорова Э.В. Влияние дисперсии на распространение возмущений в некоторых задачах механики. Сборн. докл. конф.: ВЕМ-FEM-2005, – С.Петербург:

26. Prozorova E.V. Influence of dispersion in mechanics. Seventh International Workshop on Nondestructive testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Proceedings of SPIE. v. 5400. 2003, p. 212-219.
27. Prozorova E.V. Some singulaties of the Boltzmann equation. 6 International Congress on Mathematical Modeling. Book of Abstracts. – Nizhny Novgorod: 2004, p.297.
28. Прозорова Э.В. Влияние дисперсионных эффектов в задачах аэродинамики. Математическое моделирование. N 6. 2005. с. 13-20