

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА, ОСНОВАННЫЙ НА СООТНОШЕНИЯХ НА РАЗРЫВАХ

*А.В. Сафронов.**ЦНИИМАШ. г. Королев, Московская обл.*

Email: a\_safron@korolev-net.ru

### Аннотация

Представлены численные схемы типа Годунова для расчета нестационарных и стационарных сверхзвуковых течений на основе аппроксимации параметров на границах ячеек разностной сетки с помощью приближенного решения соответствующих модельных задач о распаде нестационарного газодинамического разрыва и о взаимодействии равномерных сверхзвуковых потоков. Решение данных задач основано на соотношениях выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии для уравнений газодинамики в массовых переменных при максимальной оценке скоростей волн. Приведены результаты тестовых расчетов. Схемы экономичны, имеют широкий диапазон применимости и обеспечивают расчет зон разрежения, «гладкое» прохождение звуковой точки при смене знака характеристик, также отсутствие осцилляции на интенсивных скачках. В качестве применения рассмотрены результаты расчетов и измерений при взаимодействии сверхзвуковой неизобарической струи с преградой.

### A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING EULER EQUATIONS BASED ON JUMP CONDITION

Present robust numerical method for the computation of discontinuous solutions of the Euler equations base on approximate Riemann solvers that do not need an iteration process with jump condition for the equations of a gas dynamics in the form of mass variables.

### Введение

Рассматриваются разностные схемы типа Годунова [1,2] основанные на решении одномерной задачи о распаде газодинамического разрыва для нестационарных уравнений и задачи о взаимодействии двух равномерных сверхзвуковых потоков для стационарных уравнений газодинамики. Предложенный подход основан на приближенном решении указанных задач из

соотношений на газодинамических разрывах записанных для уравнений в массовых переменных, с максимальной оценкой скоростей волн.

В нестационарном случае схематически начальный разрыв газа с различными состояниями в левом и правом полупространстве распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. Левые и правые волны могут быть в зависимости от перепада давления, как веером волн разрежения, так и скачками. Точное решение данной задачи сводится к итерационному решению системы нелинейных алгебраических уравнений [1] и требует значительных затрат машинного времени. В настоящей работе представлена схема на основе приближенного решения задачи Римана, с выполнением соотношений на газодинамических разрывах при выборе скоростей волн исходя из максимальных оценок. Основоположным подходом к оценке скоростей волн является двухволновой метод HLL (Harten, Lax, van Leer) [3] с учетом разрывов типа левой и правой ударных волн, без рассмотрения контактного разрыва. В схеме HLL использующей консервативные переменные, предложен простой, но эффективный способ выбора скоростей движения этих волн по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках разностной сетки. При этом веер волн разрежения заменяется скачком, но со скоростью распространения соответствующей максимальному наклону характеристик в этой волне разрежения, поэтому этот выбор исключил проблему расчета "звуковой" точки при смене знака характеристик. Расчет ударных волн также проводится со скоростью превышающей точное значение. В этой связи схема HLL эффективна при расчете ударных волн и зон разрежения. Однако, в расчете энтропийных скачков методом установления принятое допущение приводит к неприемлемому "размазыванию" контактного разрыва. Развитием подхода HLL является схема HLLC (*C-contact*) [4] учитывающая контактный разрыв, скорость которого вычисляется из решения задачи Римана в рамках "звукового" приближения. Уточнение выбора скоростей распространения волн при распаде разрыва в рамках схемы HLLC проведено в работе [5]. В схеме HLLC [4,5] наряду с использованием консервативных переменных применяются «простые» переменные, так соотношения на левой и правой волне записываются в потоковых и консервативных переменных (также как в схеме HLL), а на контактном разрыве - в «простых» переменных. В работе [6] предложен подход из соотношений на газодинамических разрывах выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии для уравнений газодинамики в лагранжевых массовых переменных. В этом случае задача о распаде разрыва упрощается тем, что решается в "простых" переменных, а параметрами являются массовые скорости (скорости потока массы) через поверхности волн. Причем, на контактном разрыве массовая скорость  $m=0$ , поэтому решение зависит от двух параметров: массовых скоростей на левой и правой волне, которые определяются исходя из максимальной оценки. По ним, в свою очередь вычисляются скорости левой и правой волны. При этом расчет зон разрежения прово-

дится со скоростью волны соответствующей характеристике с максимальным наклоном, а расчет ударных волн со скоростью превышающей точную величину. Диссипативные свойства схемы в этом случае, как в зонах разрежения, так и на скачках несколько превышают свойства схемы Годунова. Этот факт обеспечивает расчет сложных течений в широком диапазоне изменения параметров.

В стационарном сверхзвуковом случае аппроксимация параметров на границах ячеек сетки основана на приближенном способе решения задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков. Стационарный разрыв газа схематизировано распадается на три волны: два разрыва типа косых скачков и контактный разрыв между ними. Задача решается с помощью соотношений выражающих законы сохранения массы импульса и энергии на поверхности разрыва для уравнений газодинамики в координатах Мизеса. Решение задачи в этом случае, также выражается в "простых" переменных и зависит от двух параметров - массовых скоростей газа через "крайние" волны, которые задаются аналогично нестационарной схеме, исходя из максимальных оценок по состояниям газа в соседних ячейках сетки [7].

### 1. Разностный метод для нестационарных уравнений газодинамики.

Рассмотрим описание схемы на примере уравнений одномерной газовой динамики:

$$U_t + F_x = 0 \quad (1.1)$$

$$U = \{\rho, \rho u, \rho E\}^T, \quad F(U) = \{\rho u, \rho u^2 + P, \rho u E + P u\}^T,$$

где  $U$ -вектор консервативных переменных,  $F$ -вектор потока,  $\rho$ -плотность газа,  $u$ -скорость,  $P$ -давление,  $E = P/\rho/(\gamma-1) + u^2/2$  – полная внутренняя энергия на единицу объема,  $\gamma$ -показатель адиабаты.

Разностную схему запишем в консервативном виде:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (1.2)$$

где  $n$ -номер шага по времени с интервалом  $\Delta t$ ,  $i$ -номер ячейки сетки по оси  $x$  с разбиением  $\Delta x$ .

В методах типа Годунова [1] поток на границе ячеек  $F_{i+1/2}$  вычисляется из решения задачи Римана распада произвольного разрыва с параметрами равными параметрам газа в соседних ячейках сетки. При этом схема устойчива при числе Куранта  $CFL = w_{max} \Delta t / \Delta x < 1$ , где  $w_{max}$ -максимальная скорость распространения возмущений.

Настоящий метод основан на соотношениях на газодинамических разрывах:

$$\Delta F = w \Delta U, \quad (1.3)$$

где  $w$ -скорость распространения разрыва, символ  $\Delta$  обозначает разность значений соответствующей величины на разрыве.

Основная идея предложенного метода состоит в применении выражений законов сохранения массы, импульса и энергии на поверхности газодинамического разрыва (1.3) в следующем виде:

$$w = u - m/\rho \tag{1.4}$$

$$\Delta u - m\Delta(1/\rho) = 0 \tag{1.5}$$

$$m\Delta u + \Delta P = 0 \tag{1.6}$$

$$m\Delta E + \Delta(Pu) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь  $m$  – массовая скорость (плотность потока газа) через поверхность разрыва. В дальнейшем условимся считать  $m$  положительным. На контактном разрыве  $m=0$ . Для волн сжатия и разрежения  $m \sim \rho c$  ( $c$  – скорость звука).

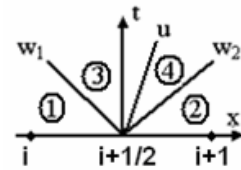


Рис. 1. Схема течения

Соотношения (1.4-1.7) соответствуют записи уравнений газодинамики в лагранжевых массовых переменных. С помощью уравнений (1.4-1.7) применяемых для одиночных волн решаем задачу Римана с распадом на левую волну, контактный разрыв и правую волну. Обозначим индексами: 1- параметры в левой ячейке сетки, 2- в правой, 3- между левой волной и контактным разрывом, 4- между контактным разрывом и правой волной как показано на схеме течения рис 1.

Решение имеет вид:

$$w_1 = u_1 - m_1/\rho_1 \tag{1.8}$$

$$w_2 = u_2 + m_2/\rho_2 \tag{1.9}$$

$$u_3 = u_4 = u = (u_2 m_2 + u_1 m_1 - P_2 + P_1) / (m_1 + m_2) \tag{1.10}$$

$$P_3 = P_4 = P = (P_2 m_1 + P_1 m_2 - m_1 m_2 (u_2 - u_1)) / (m_1 + m_2) \tag{1.11}$$

$$1/\rho_3 = 1/\rho_1 + (u - u_1)/m_1 \tag{1.12}$$

$$E_3 = E_1 - (Pu - P_1 u_1)/m_1 \tag{1.13}$$

$$1/\rho_4 = 1/\rho_2 - (u - u_2)/m_2 \tag{1.14}$$

$$E_4 = E_2 + (Pu - P_2 u_2)/m_2 \tag{1.15}$$

Здесь индексы соответствуют номеру зоны схемы течения.

Когда скорость распространения контактного разрыва  $u \geq 0$ : при скорости левой волны  $w_1 \geq 0$  параметры на границе ячеек равны параметрам в зоне 1, а при  $w_1 < 0$  параметрам в зоне 3. В случае  $u < 0$ : при скорости правой волны  $w_2 \leq 0$  параметры на границе ячеек равны параметрам в зоне 2, а при  $w_2 > 0$  параметрам в зоне 4.

Решение задачи зависит от двух параметров  $m_1$  и  $m_2$ , точное вычисление которых приводит к итерационной схеме Годунова. В предлагаемой схеме эти параметры задаются априорно, исходя из максимальной оценки их величин.

Рассмотрим "левую" волну (или волну, обращенную влево), поток газа через нее вдоль оси  $x$  направлен слева направо и некоторые свойства перехода из состояния газа до разрыва «1» в состояние после, которое обозначим параметрами без индекса. Введем обозначение  $c$  - скорость звука. В случае ударной волны (УВ) в соответствии с теоремой Цемплена для плотности потока массы  $m$  и скорости волны  $w$  справедливы следующие неравенства:

$$\rho c > m > \rho_1 c_1, \quad u_1 - c_1 > w > u - c.$$

Подставляя минимальное значение скорости распространения УВ ( $u - c$ ) в выражение для массовой скорости  $m = \rho_1(u_1 - w)$ , получим:

$$\rho c > \rho_1(u_1 - u + c) > m > \rho_1 c_1.$$

В случае если левая волна является волной разрежения, максимальное значение скорости распространения возмущения определяется характеристикой  $w_{max} = u_1 - c_1$ , а максимальное значение массовой скорости определяется по состоянию «1»  $m_{max} = \rho_1 c_1$ .

В итоге, максимальное значение массовой скорости левой волны определяется по формулам:

$$m_{max} = \max(\rho_1 c_1, \rho c) \quad \text{или} \quad m_{max} = \rho_1(u_1 - \min(u_1 - c_1, u - c)).$$

Для правой волны соотношения аналогичны.

Исходя из максимальных оценок изменения массовой скорости на разрыве, для схемы (1.8-1.15) определим величины массовых скоростей на левой и правой волне по состояниям газа в соседних ячейках сетки следующим образом:

$$m_1 = m_2 = \max(\rho_1 c_1, \rho_2 c_2), \quad (1.16)$$

или

$$m_1 = \rho_1(u_1 - \min(u_1 - c_1, u_2 - c_2)), \quad m_2 = \rho_2(\max(u_2 + c_2, u_1 + c_1) - u_2) \quad (1.17)$$

Соотношения (1.17) соответствуют выбору скоростей волн по схеме [3], причем для величин скорости (1.10) и давления (1.11) схема является двухволновой.

Расчет волн разрежения с выбором (1.16) или (1.17) проводится с численной скоростью волны соответствующей распространению характеристики с максимальным наклоном, т.е. с определенным "запасом" поэтому проблем расчета этих зон нет. Расчет ударных волн проводится с задаваемой скоростью волны превышающей точное значение, поэтому нет и осцилляций на разрывах.

Метод легко обобщается на пространственный случай, так для двумерного случая ( $u$ -компонента скорости перпендикулярная грани ячейки,  $v$ -параллельная) система (1.8-1.16) дополняется соотношениями:

$$v_3 = v_1 \quad (1.18)$$

$$v_4 = v_2 \quad (1.19)$$

Таким образом, предлагаемое приближенное решение задачи Римана из соотношений на разрывах (1.4-1.7) заключается в вычислении "простых" переменных по формулам (1.10-1.19), а по ним в свою очередь непосредственно вычисляется вектор потока на границе ячеек  $F_{i+1/2}$ . Полученный поток используется затем в разностном уравнении (1.2) аналогично схеме Годунова.

Представленная схема для нестационарных уравнений верифицирована при решении различных одномерных и пространственных задач. В работе [6] приведены результаты тестовых одномерных расчетов. В работе [8] приведены расчеты течений в зоне взаимодействия сверхзвуковой неизобарической струи с преградой при различных расстояниях от среза сопла. В качестве иллюстрации, на рисунке 2 приведены сравнительные результаты расчетов по изложенной схеме (условно схема С) и схеме Годунова при взаимодействии затопленной осесимметричной струи с преградой в виде изолинии чисел Маха.

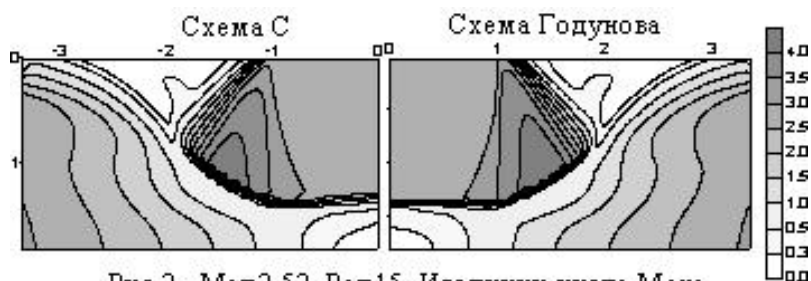


Рис.2.  $Ma=2.52$ .  $Pa=15$ . Изолинии числа Маха

Параметры на срезе сопла: число Маха  $Ma=2.5$ , отношение давления к внешнему  $P_a/P_e=15$ ,  $\gamma=1.4$ , температура торможения равна внешней температуре. Расчеты проводились по схемам 1 порядка, на квадратной сетке  $30 \times 100$  ячеек. Граничные условия: на оси симметрии и на стенке - условия отражения, на срезе сопла-параметры истечения, на свободных границах задавались параметры внешней среды. В обоих случаях через 6000 итераций при одинаковом числе Куранта  $CFL=0.95$ , максимальное изменение плотности за шаг по времени в ячейках сетки по отношению к этому параметру на 1-ом шаге счета имело порядок  $10^{-10}$ , при этом время счета по предложенной схеме в 3 раза меньше, чем по схеме Годунова. Метод также существенно экономичнее и проще в реализации, чем другие схемы на основе приближенного решения задачи Римана.

Ниже представленный подход обобщен на стационарный сверхзвуковой случай.

## 2. Разностный метод для стационарных уравнений газодинамики.

Рассмотрим описание схемы на примере двумерных уравнений газовой динамики:

$$E_x + F_y = 0, \quad (2.1)$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uH]^T, \quad F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vH]^T,$$

здесь  $\rho$ -плотность газа,  $u, v$ -компоненты скорости по координатам  $x$  и  $y$  соответственно,  $P$ -давление,  $H$ -энтальпия.

Рассматривается сверхзвуковое течение по оси  $x$ . В этом случае уравнения (1) имеют  $x$ -гиперболический тип.

Разностную схему запишем в консервативном виде:

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta x}{\Delta y} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}), \quad (2.2)$$

где  $n$ -номер сечения по оси  $x$  шагом  $\Delta x$ ,  $i$ -номер ячейки сетки по оси  $y$  с шагом  $\Delta y$ .

Поток на границе ячеек  $F_{i+1/2}$  вычисляется из приближенного решения задачи о распаде стационарного разрыва (задачи о взаимодействии сверхзвуковых плоских потоков). Схема явная и устойчива при выполнении условия  $CFL$ .

Основная идея метода состоит в решении задачи распада стационарного разрыва на основе законов сохранения массы импульса и энергии на поверхности разрыва в виде:

$$\Delta m = 0, \quad m \Delta u - w \Delta P = 0, \quad m \Delta v + \Delta P = 0, \quad m \Delta H = 0, \quad (2.3)$$

где  $m = \rho u(v/u - w)$  – плотность потока газа (массовая скорость) через поверхность разрыва,  $w$ -направление распространения разрыва. Условимся считать  $m$  положительной.

Соотношения (2.3) соответствуют записи уравнений (2.1) в координатах Мизеса.

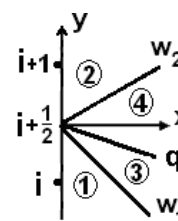


Рис.3. Схема течения

Рассмотрим задачу распада разрыва как показано на схеме рис.3.

Стационарный разрыв газа распадается на три волны: «нижнюю» волну (НВ), контактный разрыв (КР) и «верхнюю» волну (ВВ). На КР  $m=0$ , поэтому решение задачи с использованием соотношений (2.3) зависит от двух параметров: массовых скоростей на НВ и ВВ обозначим их соответственно  $m_1$  и  $m_2$ . Этот факт является отличительной особенностью предложенной схемы, поскольку в сеточно-характеристических схемах необходимо задавать три параметра: наклон трех характеристических волн, при этом возникают проблемы расчета при смене их знака [9].

Обозначим индексами: 1- параметры в нижней ячейке сетки, 2- в верхней, 3- между НВ и КР, 4- между КР и ВВ (рис. 3). Применяя уравнения (2.3) на одиночных разрывах получим следующие соотношения.

На КР:  $P_3 = P_4 = P \quad (2.4)$

$$v_3/u_3 = v_4/u_4 = q \quad (2.5)$$

На НВ:  $w_1 = v_1/u_1 - m_1/(\rho_1 u_1) = q - m_1/(\rho_3 u_3) \quad (2.6)$

$$P + m_1 v_3 = P_1 + m_1 v_1 = a_1 \quad (2.7)$$

$$m_1 u_3 - w_1 P = m_1 u_1 - w_1 P_1 = b_1 \quad (2.8)$$

$$H_3 = H_1 \quad (2.9)$$

На ВВ:  $w_2 = v_2/u_2 + m_2/(\rho_2 u_2) = q + m_2/(\rho_4 u_4)$  (2.10)

$$P - m_2 v_4 = P_2 - m_2 v_2 = a_2 \quad (2.11)$$

$$m_2 u_4 + w_2 P = m_2 u_2 + w_2 P_2 = b_2 \quad (2.12)$$

$$H_4 = H_2 \quad (2.13)$$

Здесь обозначения  $q$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  введены для компактности записи.

Из уравнений (2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.10) следует:

$$q = (a_1 - P)/(b_1 + w_1 P) = (P - a_2)/(b_2 - w_2 P). \quad (2.14)$$

Это равенство дает выражение для вычисления давления в зоне 3-4:

$$P = B - (B^2 - C)^{1/2}, \quad (2.15)$$

где  $B = (b_2 + a_1 w_2 + b_1 - a_2 w_1)/(w_2 - w_1)/2$ ,  $C = (a_1 b_2 + b_1 a_2)/(w_2 - w_1)$ .

Формула (2.15) физически означает выбор режима течения. При сверхзвуковом течении  $B^2 > C$ . В противном случае течение дозвуковое и подход в целом не правомерен.

После определения  $P$ , неизвестные скорости в зонах 3 и 4 находятся из уравнений (2.7, 2.8, 2.11, 2.12), наклон КР  $q$  находится из (2.14), а плотности из выражений (2.6, 2.10).

В случае  $q \geq 0$ , при  $w_1 = (v_1 - m_1/\rho_1)/u_1 \geq 0$  параметры на границе ячеек определяются по параметрам в ячейке 1, а при  $w_1 < 0$  по параметрам в зоне 3. В случае  $q < 0$ , при  $w_2 = (m_2/\rho_2 - v_2)/u_2 \leq 0$  параметры на границе ячеек вычисляются по параметрам в ячейке 2, а при  $w_2 > 0$  по параметрам в зоне 4.

В силу выполнения условий (2.3) точное вычисление параметров  $m_1$  и  $m_2$  не требуется. Схема не имеет осцилляций на скачках и проблем расчета зон разрежения в случае определения их аналогично нестационарной схеме по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках:

$$m_1 = \rho_1 u_1 (v_1/u_1 - w_1), \quad m_2 = \rho_2 u_2 (w_2 - v_2/u_2), \quad (2.16)$$

где  $w_1 = \min(\lambda_1^-, \lambda_2^-)$ ,  $w_2 = \max(\lambda_1^+, \lambda_2^+)$ , (2.17)

здесь  $\lambda^- = (uv - cd)/(u^2 - c^2)$ ,  $\lambda^+ = (uv + cd)/(u^2 - c^2)$ ,  $d = (u^2 + v^2 - c^2)^{1/2}$ ,  $c$  - скорость звука.

С применением соотношений (2.17) определяются параметры газа  $\rho, u, P, H$  по которым в свою очередь вычисляется вектор потока на границе ячеек  $F_{i+1/2}$  без привлечения уравнения состояния, что облегчает использование схемы случае переменных свойств газа.

Наклон волн (2.17) соответствует максимальным диссипативным свойствам схемы, и по видимому возможен иной, менее "жесткий" выбор.

Ниже приведены некоторые результаты, полученные с помощью выбора (2.17).

Примеры рис. 4-7 относятся к сквозному расчету течения плоских сверхзвуковых недорасширенных и перерасширенных струй, истекающих в затопленное пространство.



Граница струи выделялась в процессе расчета, с помощью решения модельной задачи о повороте сверхзвукового потока по отношению давления в граничной ячейке к давлению внешней среды. Координата  $x$  направлена по оси струи. Радиус сопла обозначен  $Ra$ . Число Куранта в расчетах принято 0.9.

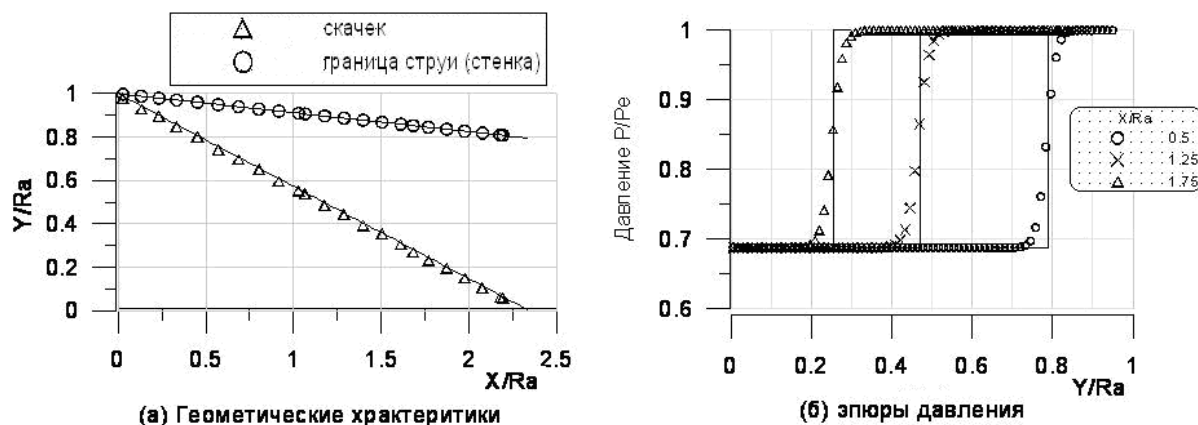


Рис. 4.  $Ma=3$ ,  $Pa/Pe=0.688$ .  $Im=80$ .

Течение аналогично течению в плоском канале, рассмотренному в работе [2]. На рис. 4-5 приведены результаты расчета перерасширенной струи числом Маха на срезе  $Ma=3$  и степенями нерасчетности  $n=Pa/Pe=0.688$  и  $0.157$ , отвечающими наклону границы струи (стенки) к оси на  $5^\circ$  и  $30^\circ$ . Число сеточных разбиений  $Im=80$ . Точное решение показано сплошными линиями, значками обозначены результаты численного решения. На рис. 4а и 5а показаны граница струи и положение скачка. На рис. 4б и 5б показаны распределения давления в различных сечениях по оси  $x$ .

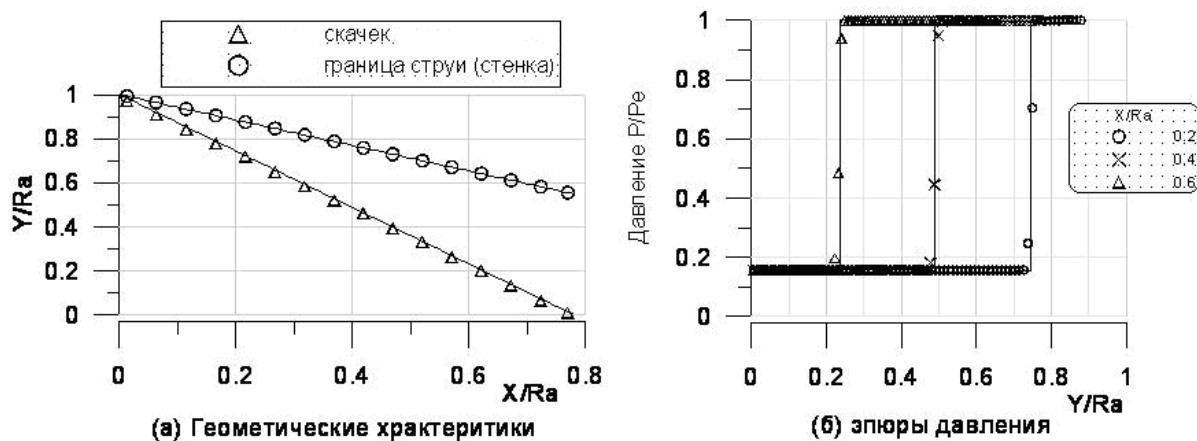


Рис. 5.  $Ma=3$ ,  $Pa/Pe=0.157$ .  $Im=80$ .

Как видно схема не имеет осцилляций на разрывах. Скачок малой интенсивности размывается на 5-6 ячеек, для скачка большей интенсивности эффект «размывания» уменьшается.

На рис. 6-7 показаны результаты расчетов центрированных волн в недорасширенной струе  $Ma=2$  и  $Ma=4$  при нерасчетностях  $n=8.065$  и  $66.23$ , с углом поворота потока от оси на  $30^\circ$ .

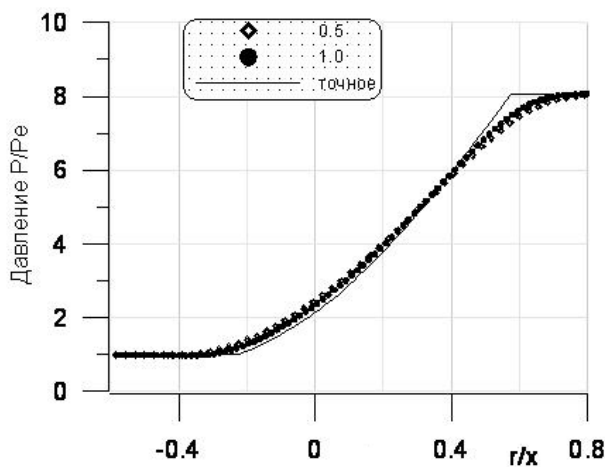


Рис. 6.  $Ma=2, n=8.065, lm=100$

Для двух значений  $x$  отнесенных к радиусу сопла 0.5 и 1.0 даны распределения давления по автомодельной переменной  $r/x$ , здесь  $r=(y-Ra)/Ra$ . Как видно совпадение численных результатов с точным решением улучшается с ростом  $x$ , что обусловлено увеличением числа ячеек попадающих в область волны.

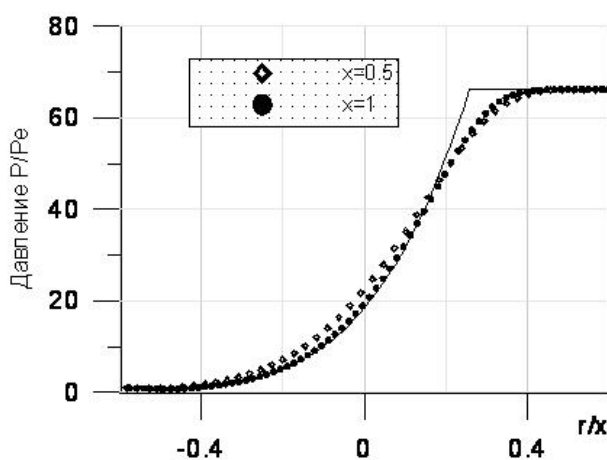


Рис. 7.  $Ma=4, n=66.23, lm=100$

С целью сравнения, на рис. 8 приведены распределения давления в различных поперечных сечениях ( $x/Ra=6, 9$  и  $11$ ) осесимметричной струи  $Ma=3, n=2$ , полученные по приведенной схеме (условно СН) и методом Годунова [2]. Число разбиений  $lm=60$ . На этом графике давление отнесено к критическому скоростному напору ( $q^*$ ), а поперечная координата к координате границы струи ( $y_m$ ) в рассматриваемом сечении. Как видно имеется хорошее совпадение результатов численных расчетов.

Численное решение различных задач показало эффективность схемы.

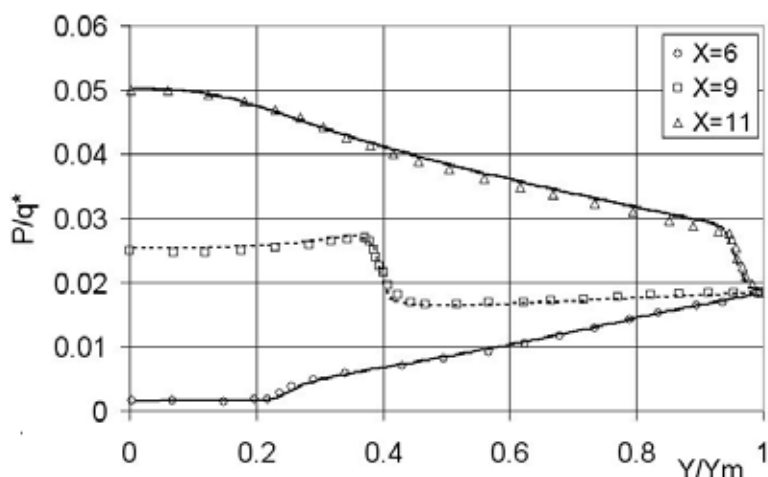


Рис. 8. Распределение давления в поперечных сечениях осесимметричной недорасширенной струи  $Ma=3$ ,  $Pa/Pe=2$ .  
Линии - схема СН, значки- схема Годунова.

Снижение числа Куранта на сильных разрывах не требуется. Результаты расчетов близки к схеме Годунова основанной на точном итерационном решении задачи, при этом время счета типовых задач в 2-2.5 раза меньше.

### 3. Применение схем

Сверхзвуковой подход апробирован для расчета неизобарических струйных течений реагирующих газов на основе решения параболизированных уравнений Навье-Стокса [10].

Предложенные алгоритмы применены также к расчету взаимодействия сверхзвуковых затопленных струй продуктов сгорания с преградой, расположенной на расстояниях от среза сопла в пределах сверхзвукового участка струи [8]. В расчетах использовался зональный подход, с разделением течения на зоны - свободной струи, взаимодействия струи с преградой и растекающейся веерной струи. Расчет свободной и растекающейся струй проводится маршевым методом [10]. Параметры течения в зоне взаимодействия струи с преградой описываются нестационарными уравнениями Эйлера, которые решаются методом установления по предложенной нестационарной схеме [6]. Входными параметрами является поле набегающего потока из расчетов свободной струи. Общий подход верифицирован на результатах измерений давления в критической точке при различных расстояниях от среза сопла. Результаты приведены в приложении 1.

### Заключение.

Представлены экономичные разностные методы расчета нестационарных и стационарных сверхзвуковых течений газа. Подход основан на аппроксимации параметров на границах ячеек сетки с помощью решения задачи о распаде разрыва и задачи о взаимодействии сверхзвуковых потоков. Указанные задачи решаются из соотношений на разрывах записанных для уравнений в массовых переменных, при максимальной оценке скоростей волн. Подход имеет широкий диапазон применимости и апробирован в расчетах сложных течений.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959, **47**, вып. 3. 271-306.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Под редакцией С.К. Годунова. Москва.:Наука. 1976
3. A.Harten, P.D.Lax, B.Van Leer. On Upstream Diffrencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM Review*. 1981, **25**, No.1. 35-61.
4. E.F.Toro, M.Spruce, S.Speares. Restoration of the Contact Surface in the HLL Riemann Solver // *Shock Saves*. 1994,**4**. 25-34.
5. P.Batten, N.Clarke, C.Lambert, D.M.Causon. On the Coice of Savespeeds for the HLLC Riemann Solver // *SIAM J. Comput.* 1997, **18**, No. 6. 1553-1570.
6. Сафронов А.В. Разностный метод решения нестационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // *Космонавтика и ракетостроение*. 2006. Вып.2 (43). 152-158.
7. Сафронов А.В. Разностный метод расчета стационарных сверхзвуковых течений газа из соотношений на разрывах // *Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006)* 26 июня-1 июля 2006г. Санкт-Петербург.-М.:Вузовская книга,2006. 294-286.
8. Сафронов А.В. Расчет воздействия сверхзвуковых затопленных струй продуктов сгорания на преграду // *Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006)*, 26 июня-1 июля 2006 г., Санкт-Петербург. -М.: Вузовская книга, 2006. 286-288.
9. А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю.Семенов. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит. 2001.
10. Сафронов А.В. Метод расчета струй продуктов сгорания при старте // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2006. **4** (<http://chemphys.edu.ru/2006-10-23-001.pdf>.)

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАСЧЕТ ВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ НА ПРЕГРАДУ<sup>1</sup>

Представлен метод расчета сверхзвуковых турбулентных неизобарических затопленных струй ракетных двигателей взаимодействующих с преградой расположенной на расстояниях от среза сопла в пределах сверхзвукового участка струи. Структура данных течений, например необходима при выборе газодинамической схемы старта, обеспечивающей отвод газов от ракеты в условиях взаимодействия струй со стартовым сооружением. При истечении сверхзвуковой неизобарической струи в затопленное пространство возникает сложная система волн разрежения и скачков уплотнения, на фоне которой происходит турбулентное смешение догорающих газов истекающей струи с воздухом, приводящее к постепенному выравниванию статического давления в струе с окружающим. Внешняя часть слоя смешения в струе и зона взаимодействия - области с дозвуковыми скоростями, в которых задача является эллиптической. В общем случае, расчет таких течений необходимо проводить в рамках уравнений Навье-Стокса, решаемых методом установления. Однако разномасштабность процессов приводит в этом случае к значительным затратам машинного времени. Более экономичным является разделение течения на зоны, адекватно описываемые различными системами уравнений с последующей стыковкой локальных решений, полученных в этих зонах. В настоящей работе представлен метод расчета сверхзвуковых неизобарических струй натекающих на преграду, с разделением течения на зоны - свободной струи, взаимодействия струи с преградой и растекающейся веерной струи, см. рис.1.

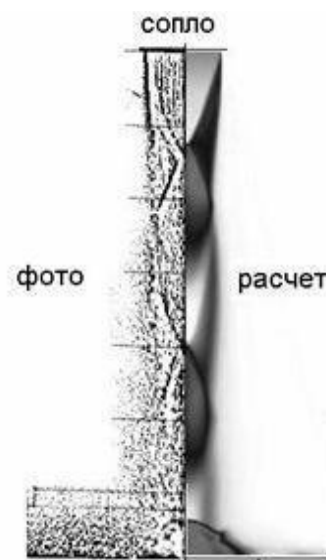


Рис. 1.

Течение в свободной и растекающейся струях разбивается на сверхзвуковую и дозвуковую области. Расчет струй проводится маршевыми методами на основе стыковки параболизированных уравнений Навье-Стокса (ПУНС), описывающих течение в сверхзвуковой неизобарической зоне струи и уравнений пограничного слоя (УПС), описывающих течение в дозвуковой части слоя смешения [1]. Параметры течения в зоне взаимодействия струи с преградой описываются нестационарными уравнениями Эйлера (УЭ), которые решаются методом установления. Численное решение ПУНС, УПС и УЭ проводилось на основе экономичных схем [2,3]. Подход верифицирован на результатах измерений параметров холодных воздушных и горячих струй продуктов сгорания. В качестве иллюстраций, на рис.1. приведены теневая фотография, и расчетные изолинии плотности при натекании струи на преграду. На рисунке 3 приведено сравнение расчетного и измеренного давлений в критической точке в зависимости от расстояния преграды до среза сопла. Рисунки 1,3 показывают высокую точность метода. На рисунке 2 приведены расчетные значения величины отхода скачка от преграды в зоне оси симметрии. Из рисунка видно три максимума величины отхода скачка. На этих расстояниях расположения преграды распределение давления по преграде «двугорбое» с минимумом в центре, установление течения не происходит из-за гидродинамической неустойчивости течения. Акустические измерения в этих положениях дают дискретную составляющую на частоте  $\sim 2000$ Гц, при диаметре сопла 60мм.

<sup>1</sup> Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006), 26 июня-1 июля 2006г., Санкт-Петербург.  
-М.: Вузовская книга, 2006.

В работе исследованы характерные особенности рассматриваемых струйных течений: влияние температуры струи на ее дальность и ударно-волновую структуру, влияние догорания топлива, рассмотрены характерные изменения параметров.

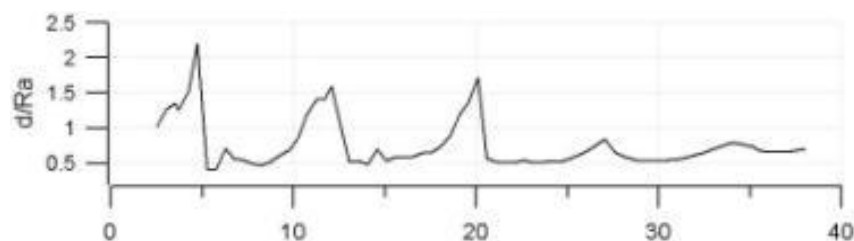


Рис. 2. Расчет величины отхода скачка.

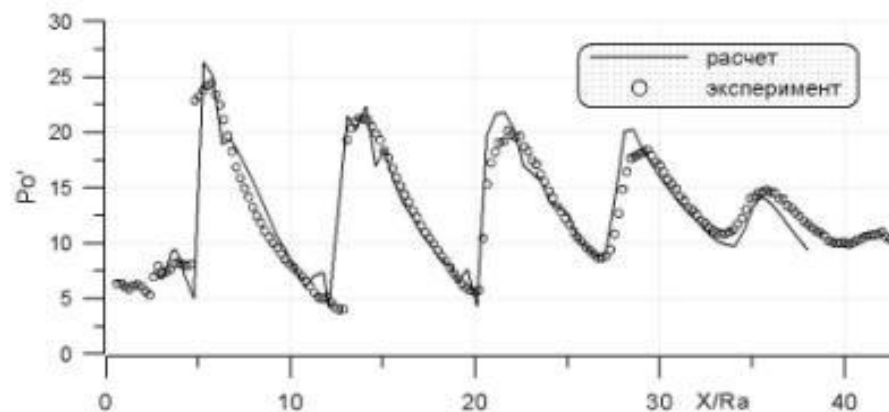


Рис. 3. Давление в критической точке  $Ma=4$ ,  $Pa=0.7$ ,  $To=300K$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В. Кудрявцев, А.В. Сафронов.* Численное моделирование параметров затопленных струй продуктов сгорания на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса. Тезисы докладов Третьей международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2000), Истра-Москва, 3-7 июля 2000г.-М.:МГИУ,2000.
2. *А.В.Сафронов.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах вектора потока. Материалы XVII Школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов». ЦАГИ 2006.
3. *А.В.Сафронов.* Разностный метод расчета стационарных сверхзвуковых течений газа из соотношений на разрывах. Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006) 26 июня-1 июля 2006г. Санкт-Петербург.-М:Вузовская книга,2006.