

УДК 519.95

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

Глушко Г.С.<sup>1</sup>, Иванов И.Э.<sup>2</sup>, Крюков И.А.<sup>1,3</sup>, Ларина Е.В.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1*

<sup>2</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва*

<sup>3</sup> *Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова»  
Москва, 127055, Суцевская ул., д.22*

<sup>4</sup> *Московский авиационный институт, Москва  
kryukov@ipmnet.ru*

### Аннотация

В статье рассматриваются автомодельные решения для турбулентных струй на основе нелинейных моделей для напряжений Рейнольдса. Получена система уравнений в автомодельных переменных для плоских, осесимметричных и веерных турбулентных струй. Для получения автомодельных решений используется численный метод, который тестируется на известном автомодельном решении для плоской турбулентной струи с  $k$ - $\varepsilon$  моделью турбулентности. Особое внимание уделено проверке описания изотропности турбулентных пульсаций в нелинейных моделях для напряжений Рейнольдса.

## TURBULENT JET SIMILARITY SOLUTION BASED ON NONLINEAR MODELS FOR REYNOLDS STRESSES

Glushko G.S.<sup>1</sup>, Ivanov I.E.<sup>2</sup>, Kryukov I.A.<sup>1,3</sup>, Larina E.V.<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics RAS, Russia, Moscow, 119526*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Russia, Moscow, 119991*

<sup>3</sup> *Federal state unitary enterprise All-Russia research institute of automatics (VNIAA),  
Russia, Moscow, 127055*

<sup>4</sup> *Moscow Aviation Institute, Russian Federation, Moscow*

This article is devoted to turbulent jet similarity solution based on nonlinear models for Reynolds stresses. The equation system for plane, axisymmetrical and veer jet is derived. The used numerical method is tested using the well-known similarity solution for plane turbulent jet with  $k$ - $\varepsilon$  turbulence model. Ability of the nonlinear models for Reynolds stresses to describe of anisotropy of turbulent fluctuations is especially considered.

### 1. Введение

Несмотря на определенные успехи, достигнутые за последние годы в прямом численном моделировании турбулентности и в разработке дифференциальных моделей для напряжений Рейнольдса, двухпараметрические модели турбулентности еще довольно долгое время будут главным инструментом моделирования турбулентности при проведении массовых расчетов большинства практических важных классов турбулентных течений. Использование двухпараметрических моделей представляет собой компромисс между точностью и эффективностью. За прошедшие несколько десятилетий интенсивного использования двухпараметрических моделей турбулентности их достоинства и недостатки хорошо изучены. К последним в первую очередь следует отнести недостаточную точность при рас-

чете течений с сильной кривизной линии тока, сильно закрученных течений, течений вблизи точки торможения и ряд других.

Достаточно подробное изучение причин снижения точности двухпараметрических моделей в этих случаях показало, что это происходит из-за использования модели вихревой вязкости, т.е. линейной зависимости тензора напряжений Рейнольдса от тензора скоростей деформации. Линейная модель вихревой вязкости для течений типа пограничного слоя была предложена еще Буссинеском [1] в конце прошлого века. Эта модель легко обобщается на случай трехмерных течений (например, [12]).

С перечисленными выше недостатками двухпараметрических моделей разработчики и пользователи столкнулись практически сразу с момента начала использования моделей этого класса. Для преодоления этих недостатков значительные усилия многих исследователей были направлены на разработку нелинейных или анизотропных моделей напряжений Рейнольдса. Для случая турбулентного пограничного слоя первую нелинейную модель для турбулентной вязкости предложил Г.С.Глушко [24] в 1971 г. Долгое время его модель была единственной явной моделью, которая удовлетворяла условию реализуемости (т.е. при стремлении градиента средней скорости к бесконечности касательное напряжение стремилось к некоторому фиксированному значению, а не к бесконечности как в линейной модели).

Для случая трехмерного течения общего вида первую нелинейную (квадратичную) модель для всего тензора напряжений Рейнольдса предложили Ламли и др. [12].

Следующим важным этапом на пути развития нелинейных моделей для напряжений Рейнольдса явилось использование гипотезы о локальном равновесии [14] и [16]. В основе этой гипотезы лежит предположение о пропорциональности конвективного и диффузионного переноса напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности. Использование этой гипотезы позволяет получить нелинейные алгебраические выражения для тензора напряжений Рейнольдса, которые следует разрешать либо итерационно, либо вводить некоторую эмпирическую функцию от отношения  $P_k/\varepsilon$  произведения  $P_k$  кинетической энергии турбулентности к скорости ее диссипации  $\varepsilon$ .

В работе [14] получено с точностью до коэффициентов общая полиномиальная зависимость тензора напряжений Рейнольдса  $\tau_{ij}$  от градиентов средней скорости, т.е. от тензора скоростей деформации  $\mathbf{S}$  и тензора завихренности  $\mathbf{W}$ . На основе теоремы Гамильтона-Якоби доказано, что тензор напряжений Рейнольдса может зависеть максимально от квадратов тензоров скоростей деформации и завихренности в двумерном случае и от четвертых степеней этих тензоров в трехмерном.

Интерес к разработке нелинейных моделей напряжений Рейнольдса обусловил появление теоретических исследований этого класса моделей. Так в работе [21] была получена квадратичная модель напряжений Рейнольдса общего вида на основе двухмасштабного приближения прямых взаимодействий (DIA). Аналогичная модель в [17] была получена с применением ренорм-группового подхода.

Так же квадратичная модель (с некоторыми дополнительными членами) была получена в [19] путем разложения тензора напряжений Рейнольдса в ряд Тейлора и последующего применения инвариантности преобразования Галилея в двумерном случае к членам полученного ряда.

Квадратичные модели, полученные на основе этих теоретических исследований, имели один существенный недостаток – все коэффициенты, стоящие перед градиентами средней скорости, были константами, что в случае полиномиальной модели неизбежно приводит к нарушению реализуемости этих моделей. То есть напряжения Рейнольдса растут неограниченно при росте градиентов средней скорости и, кроме того, нормальные напряжения могут становиться отрицательными. Поэтому появившиеся в середине 90-х годов и получившие довольно широкое распространение нелинейные модели напряжений Рейнольдса содержат еще и нелинейную зависимость коэффициентов модели от градиентов средней скорости. Среди этих моделей следует отметить квадратичную модель [7], кубиче-

скую модель [3], модель [8], в которой введено понятие о слабом локальном равновесии, и модель [10], которая была первой моделью, использующей все десять членов в полиномиальном представлении напряжений Рейнольдса через тензора скоростей деформации и завихренности.

Тензор напряжений Рейнольдса может зависеть не только от градиентов средней скорости. Например, в [24] показано, что существует зависимость напряжения трения от градиентов энергии турбулентности и масштаба турбулентности. В [22] на основе модели турбулентного смешения [25] построена квадратичная модель напряжений Рейнольдса, в которой тензор напряжений Рейнольдса зависит не только от градиентов средней скорости, но и от градиента кинетической энергии турбулентности.

В настоящей работе нелинейные модели напряжений Рейнольдса исследуются на примере турбулентных струйных течений несжимаемой жидкости. Этот класс турбулентных течений выбран по ряду причин:

- 1) турбулентные струи хорошо изучены экспериментально и теоретически;
- 2) расчеты плоских турбулентных струй с использованием "стандартной"  $k$ - $\epsilon$  модели [11] дают хорошее совпадение с экспериментальными результатами [15];
- 3) на автомодельном участке струи течение достаточно простое – производная  $M_{i1}/M_{x2}$  существенно больше других, т.е. можно существенно упростить тензор скоростей деформации и, следовательно, выражения для тензора напряжений Рейнольдса;
- 4) с другой стороны, производная  $M_{i1}/M_{x2}$  не постоянна и существенно меняется в зависимости от расстояния до оси струи, что позволяет проверить выражения для напряжений Рейнольдса в довольно широком диапазоне значений безразмерного градиента скорости;
- 5) на автомодельном участке струи отсутствуют дополнительные факторы, которые необходимо учитывать в модели турбулентности: близость стенки, переход и т.п.

## 2. Результаты расчетов

Для решения уравнений в приближении пограничного слоя использовался метод из работы [23]. Метод имеет второй порядок точности и использует локальное адаптивное сгущение/разрежение расчетной сетки в областях больших градиентов параметров.

Все расчеты проводились от автомодельных распределений  $u, v, k$  и  $\epsilon$  из работы [26] при  $x=1$ . Начиная с  $x=10$  проводилось сравнение рассчитанных распределений  $u$  и  $k$  на двух последовательных шагах по маршевой координате. Если в автомодельном виде распределения  $u/U_{cl}$  и  $k/U_{cl}^2$  от  $\eta$  на одном шаге мало ( $< 10^{-4}$ ) отличались от распределений на предыдущем шаге, то предполагалось, что автомодельное состояние достигнуто и расчет прекращался.

Для апробации метода [23], примененного для решения системы уравнений с двухпараметрической моделью турбулентности, был выполнен расчет автомодельного решения для плоской турбулентной струи с использованием "стандартной"  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. В работе [26] приведены результаты расчета этого течения в табличном виде. Сравнение результатов показано на рис. 1–3. На этих рисунках результаты данной работы показаны сплошной линией, а результаты из работы [26] – крестиками. Для полноты на рис. 1 и рис. 2 нанесены также экспериментальные данные из работ [2] и [9]. Видно, что совпадение с результатами расчетов из работы [26] весьма хорошее. Следует отметить и вполне удовлетворительное совпадение результатов расчетов с экспериментальными данными работ [2] и [9].

На рис. 4–5 и в табл.1 приведены результаты расчета плоской автомодельной струи с использованием различных моделей напряжений Рейнольдса. Все обозначения как на рис. 1.

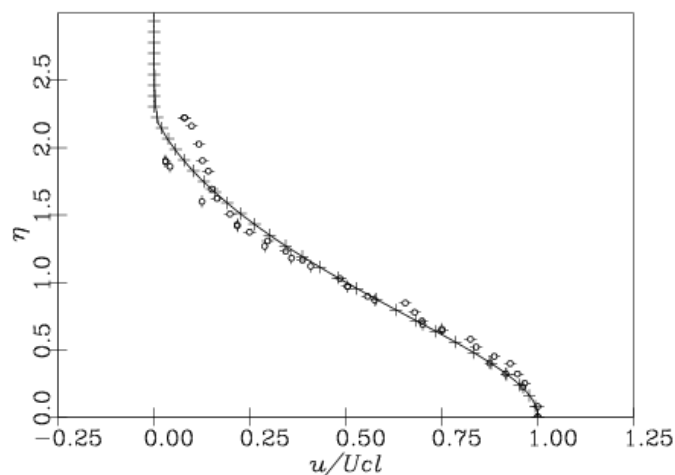


Рис. 1. Сравнение результатов данной работы и расчета из работы [26].  
Распределение продольной средней скорости поперек струи

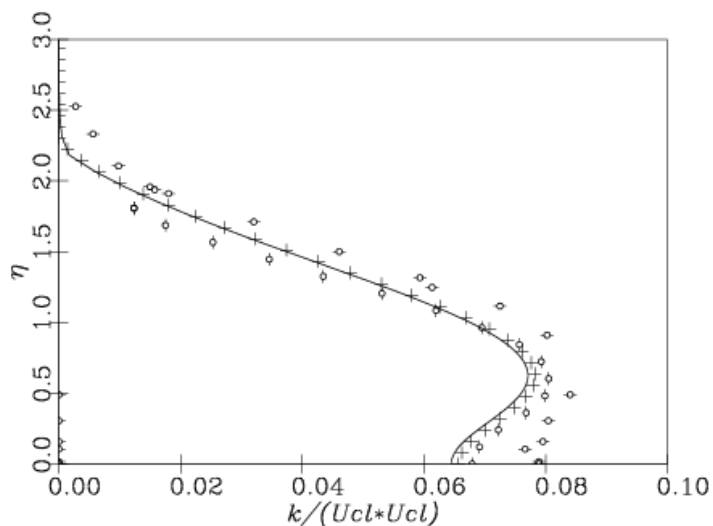


Рис. 2. Сравнение результатов данной работы и расчета из работы [26].  
Распределение кинетической энергии турбулентности поперек струи

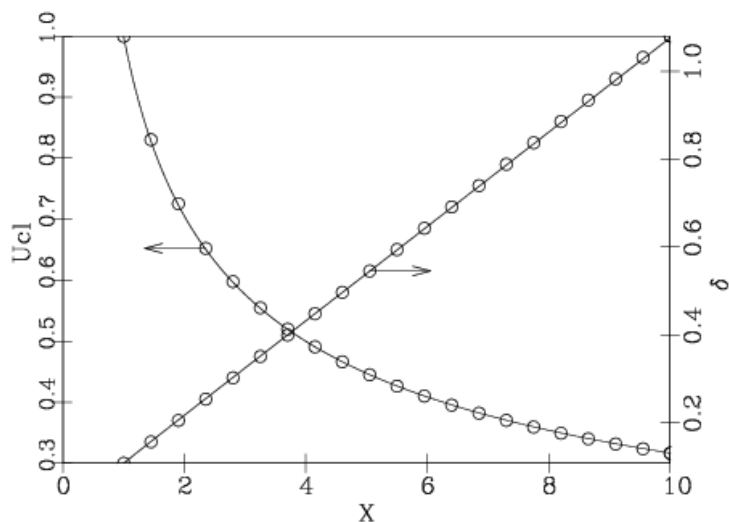


Рис. 3. Сравнение результатов данной работы и расчета из работы [26].  
Распределение параметров вдоль оси струи. Сплошная линия – данная работа, маркеры – работа [26]

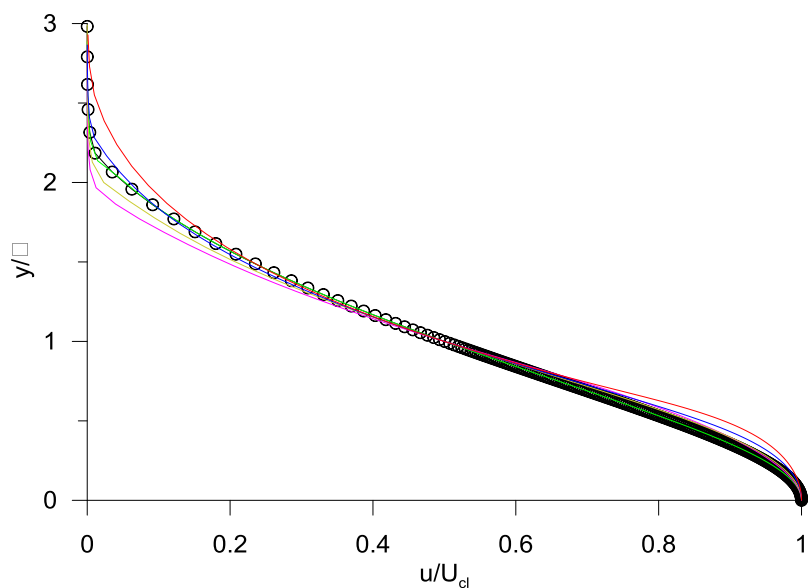


Рис. 4. Автомоделное решение для плоских струй. Распределение продольной средней скорости

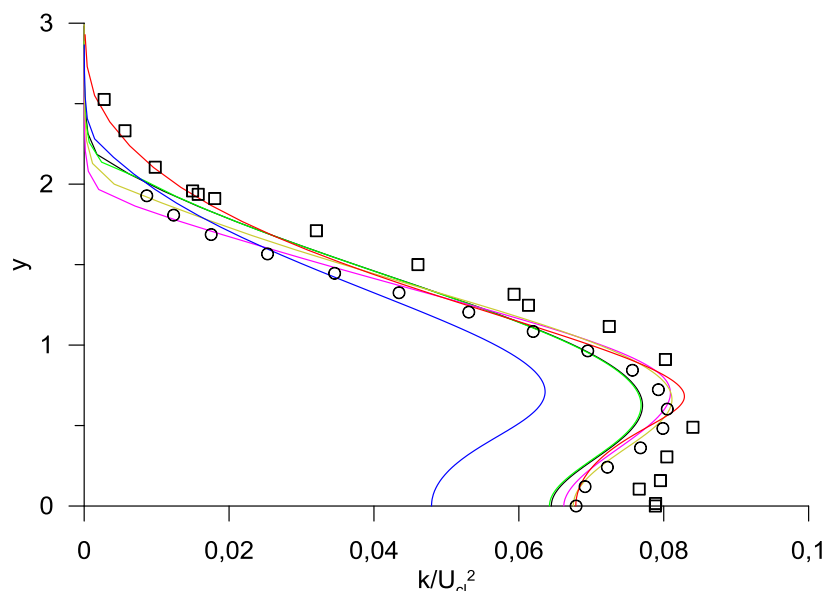


Рис.5. Автомоделное решение для плоских струй. Распределение кинетической энергии турбулентности

В целом по приведенным результатам следует отметить следующее:

1. Как уже отмечалось ранее [6] модель (24) дает завышенные значения напряжений Рейнольдса вблизи оси следа. Модификация коэффициентов уравнений  $k$ - $\varepsilon$  модели (26) приводит к существенно более высокой скорости затухания характеристик турбулентности вблизи оси струи по сравнению со "стандартной"  $k$ - $\varepsilon$  моделью. Результаты, полученные по этой модели, слишком сильно отличаются от результатов, полученных по другим моделям, поэтому в дальнейшем они не будут рассматриваться.

2. Во всех рассмотренных моделях напряжения Рейнольдса зависят только от первых производных скорости и энергии турбулентности. Поэтому ни одна из этих моделей не может описать анизотропию нормальных напряжений вблизи оси струи, которая наблюдается в эксперименте [5].

3. Практически все нелинейные модели напряжений Рейнольдса, рассмотренные в данной работе (за исключением моделей [13] и [19], которые отличаются от "стандартной"

$k$ - $\varepsilon$  модели только выражениями для нормальных напряжений (1.42) и (1.43)), дают более высокую скорость расширения плоской струи по сравнению со "стандартной"  $k$ - $\varepsilon$  моделью. Это говорит о том, что область в поле течения плоской струи, где  $c_\mu > 0.09$ , т.е. область малых  $Z$ , имеет в этом случае большее влияние на расширение струи, чем область больших  $Z$ .

Рассчитанные по различным моделям распределения средней скорости в автомодельных переменных совпадают между собой достаточно хорошо (см. рис. 4). Наибольшее отличие наблюдается вблизи внешней границы струи. Самый широкий профиль средней скорости в автомодельных переменных дает модель [22]. Это видно как на распределении средней скорости, так и на распределениях характеристик турбулентности. Такое поведение связано с зависимостью напряжений Рейнольдса в этой модели от безразмерного градиента кинетической энергии турбулентности, который начинает заметно влиять на турбулентную вязкость именно вблизи внешней границы струи.

Распределения кинетической энергии турбулентности, полученные с использованием различных моделей напряжений Рейнольдса, совпадают между собой вполне удовлетворительно (см. рис. 5). Небольшое увеличение максимума в энергии турбулентности, полученное с использованием моделей [22], [3] и [4], по сравнению со "стандартной"  $k$ - $\varepsilon$  моделью вполне согласуется с экспериментальными данными на рис. 5.

Таблица 1

**Скорость расширения плоской струи  $\delta_{1/2}/x$  и максимальные значения напряжений Рейнольдса для различных моделей**

Модель напряжений	$\delta_{1/2}/x$	$\tau_{11}/u_{cl}^2$	$\tau_{22}/u_{cl}^2$	$\tau_{33}/u_{cl}^2$	$-\tau_{12}/u_{cl}^2$
эксперимент					
Bradbury [2]	0.11	0.064	0.058	0.046	0.026
Gutmark, Wygnanski [9]	0.10	0.095	0.043	0.038	0.024
Robins [5]	0.10	0.057	0.036	0.042	0.020
расчет					
"стандартная" [11]	0.107	0.051	0.051	0.051	0.023
Глушко, Крюков [22]	0.139	0.090	0.045	0.045	0.031
Demuren, Rodi [4]	0.133	0.075	0.045	0.050	0.029
Craft et al [3]	0.113	0.077	0.044	0.050	0.026
Nisizima, Yoshizawa [13]	0.107	0.085	0.043	0.043	0.023
Speziale [19]	0.107	0.078	0.043	0.045	0.023
Rubinstein, Barton [17]	0.104	0.075	0.043	0.046	0.022
Gatski, Rumsey [6]	0.089	0.060	0.032	0.038	0.019

## Заключение

В работе рассматривались автомодельные решения для турбулентных струй на основе нелинейных моделей для напряжений Рейнольдса. Получена система уравнений в автомодельных переменных для плоских, осесимметричных и веерных турбулентных струй.

В случае плоских турбулентных струй система уравнений для автомодельных турбулентных струй решалась численно. Для проверки метода решения было проведено сравнение с известным автомодельным решением на основе "стандартной"  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности. Совпадение результатов хорошее.

На ряду со "стандартной"  $k$ - $\varepsilon$  моделью в работе рассматривались семь нелинейных моделей напряжений Рейнольдса. На основе численных расчетов показано, что все рассмотренные модели напряжений Рейнольдса позволяют получить вполне удовлетворительное совпадение результатов по средней скорости и кинетической энергии турбулентности (за исключением модели [6], для которой плохое совпадение результатов с эксперимен-

тальными данными не анализировалось и поэтому не вполне ясно). При этом модели с переменным  $c_\mu$  дают более высокую скорость затухания плоской струи.

Все рассмотренные модели напряжений дают заметный рост  $\langle u'^2 \rangle / u_{cl}^2$ , вдали от оси струи, что вполне согласуется с экспериментальными данными. Однако, все модели не описывают анизотропию нормальных напряжений вблизи оси струи из-за того, что они дают зависимость нормальных напряжений только от первых производных скорости. Кроме того, все рассмотренные модели дают  $\langle w'^2 \rangle \geq \langle v'^2 \rangle$ , что не соответствует экспериментальным данным [5].

Работа была выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант №14-08-01286а).

## Литература

1. Поллей А.Д., Мелник Р.Е., Рубел А., Рудман С., Сиклари М.Д. Автомодельные решения для плоских и осесимметричных струй, использующие  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности // ТОИР, 1985, 1, 180–188.
2. Амбарцумян Е.Н., Глушко Г.С., Крюков И.А., Определение коэффициентов турбулентного переноса в плоских течениях несжимаемой жидкости // Изв. РАН, МЖГ, 1997, 3, 83–92.
3. Глушко Г.С., Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом // Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, 4, 128–136.
4. Глушко Г.С., Модель турбулентного смешения в потоках со сдвигом, Турбулентные течения, М.: Наука, 1974, С. 56–61.
5. Глушко Г.С., Крюков И.А., Численный метод для решения уравнений пограничного слоя // Вычислительные технологии, 1995, 4, 12, 77–86.
6. Boussinesq T.V., Essai sur la theory des eaux courantes // Mem. pres. Acad. Sci., 1877, 23, 46-50.
7. Bradbury L.J.S., The structure of a self-preserving turbulent plane jet // J. Fluid Mech., 1965, 23, 1, 31–64.
8. Craft T.J., Launder B.E., Suga K., Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence // Int. J. Heat Fluid Flow, 1996, 17, 108–115.
9. Demuren A.O., Rodi W., Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts // J. Fluid Mech., 1984, 140, 189–222.
10. Everitt K.W., Robins A.G., The development and structure of turbulent plane jets // J. Fluid Mech., 1978, 88, 3, 563–583.
11. Gatski T.B., Rumsey C.L., Linear and nonlinear eddy viscosity model, Closure strategies for turbulent and transitional flows (Launder B.E., Sandham N.D., eds.), Cambridge University Press, NY, 2000.
12. Gatski T.B., Speziale C.G., On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // J. Fluid Mech., 1993, 254, 59–78.
13. Girimaji S.S., Fully explicit and self-consistent algebraic Reynolds stress model // Theoret. Comput. Fluid Dynamics, 1996, 8, 6, 387–402.
14. Gutmark E., Wygnanski I., The planar turbulent jet // J. Fluid Mech., 1976, 73, 3, 465-495.
15. Jongen T., Gatski T.B., General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows // Int. J. Eng. Sci., 1998, 36, 739–763.
16. Launder B.E., Spalding D.B., The numerical computation of turbulent flows // Computer Meth. Appl. Mech. Engr., 1974, 3, 3, 269–289.
17. Lumley J.L., Toward a turbulent constitutive equation // J. Fluid Mech., 1970, 41, 413–434.
18. Nisizima S., Yoshizawa A., Turbulent channel and Couette flows using an anisotropic  $k$ - $\varepsilon$  model // AIAA J., 1987, 25, 414–420.
19. Pope S.B., A more general effective viscosity hypothesis // J. Fluid Mech., 1975, 72, 2, 331–340.
20. Rodi W., A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses // ZAMM, 1976, 56, T219–T221.
21. Rodi W., Spalding D.B., A two-parameter model of turbulence and its application to free jets // Wärme und Stoffbertragung, 1970, 3, 85–95.

22. Rubinstein R., Barton J.M., Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group // *Phys. Fluids A*, 1990, **2**, 1472–1476.
23. Rumsey C.L., Gatski T.B., Morrison J.H., Turbulence model predictions of extra-strain rate effects in strongly-curved flows, AIAA Pap. 99–0157, 1999.
24. Speziale C.G., On nonlinear  $k-l$  and  $k-\varepsilon$  models of turbulence // *J. Fluid Mech.*, 1987, **178**, 459–475.
25. Wood P.E., Leal L.G., Similarity solutions of free shear flows with mean Reynolds stress turbulent models // *Numer. Heat Transf.*, 1983, **6**, 235–244.
26. Yoshizawa A., Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation // *Phys. Fluids*, 1984, **27**, 6, 1377–1387.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2014 г.