

Application of R13 Moment Equations for Numerical Modeling of Micro-pumps

M.Yu. Timokhin^{1,2}, I.E. Ivanov^{1,2}, I.A. Kryukov^{2,3}

¹ *Moscow State University, Moscow, 119991, Russia*

² *Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993, Russia*

³ *Institute for Problems in Mechanics of the RAS, 119526, Moscow, Russia*
timokhin@physics.msu.ru

Abstract

This article continues the investigation of applicability of regularized 13-moment equation system (R13) as an alternative to the kinetic approach for modeling of transition (from continuum to free molecular) regime flows. During the research the analysis of the applicability R13 equations for numerical simulation of the operation of several types of micro-pumps was made. These compressors are capable create a pressure difference in the absence of moving mechanical parts in the device (Knudsen effect).

Keywords: moment method, R13, Knudsen compressor

УДК 533.1

Применение моментных уравнений R13 для моделирования газовых микронасосов

М.Ю. Тимохин^{1,2}, И.Э. Иванов^{1,2}, И.А. Крюков^{2,3}

¹Московский Государственный Университет, Россия, Москва, 119991, Ленинские горы, 1

²Московский Авиационный Институт, 125993, Волоколамское шоссе, 4

³Институт проблем механики РАН, Россия, Москва, 119526, просп. Вернадского, 101-1
timokhin@physics.msu.ru

Аннотация

В данной работе продолжается исследование применимости регуляризированной тринадцатимоментной системы уравнений R13 в качестве альтернативы кинетическому подходу при моделировании переходных течений по числу Кнудсена. В ходе данного исследования был проведен анализ применимости регуляризированных моментных уравнений R13 для численного моделирования функционирования нескольких типов микронасосов, способных создать разницу давлений при отсутствии подвижных механических частей в устройстве (микроустройства, работающие на эффекте Кнудсена).

Ключевые слова: моментные уравнения, R13, насос Кнудсена

1. Введение

Более пятидесяти лет назад динамика разреженного газа начала бурно развиваться во многом благодаря началу освоения ближнего космического пространства. Возникла необходимость решения задачи обтекания тел не только в континуальном режиме (вблизи поверхности Земли), но и в свободномолекулярном режиме, а также в переходном режиме течения (от свободномолекулярного к континуальному) при входе в верхние слои атмосферы. В континуальном режиме течения функция распределения молекул газа по скоростям оказывается близка к максвелловской равновесной функции распределения. С увеличением разреженности газа уменьшается количество столкновений молекул, следовательно, и растёт отличие функции распределения от равновесной.

В последнее время активно развиваются технологии, связанные с разработкой микроэлектро-механических систем (MEMS) для широкого спектра применений, в том числе и устройств, в которых реализуются микро- и/или нано-течения [1]. С уменьшением линейных масштабов течения точно так же уменьшается частота столкновений молекул, следовательно, растёт неравновесность (разреженность) рассматриваемого течения. Таким образом, и для сверхзвуковых разреженных течений, и для течений в микроканалах оказываются применимы одни и те же методы. Для достаточно разреженного течения, когда число Кнудсена (отношение средней длины свободного пробега молекул к линейному масштабу задачи) увеличивается до 10^{-1} , классические уравнения Навье-Стокса оказываются неприменимы для корректного описания течения [2]. Естественной альтернативой здесь является кинетический подход, основанный на решении уравнения Больцмана [3,4] или кинетических модельных уравнений [5-7], а также метод прямого статистического моделирования [8,9]. Сложность их применения для умеренно разреженного газа заключается в высокой требовательности к вычислительным ресурсам. Другой путь – так называемые уравнения расширенной газовой динамики. К ним относят уравнения Барнетта и их модификации, полученные из кинетического уравнения Больцмана с помощью метода Чепмена-Энскога

[2,10], а также моментные уравнения Грэда [2,11]. Преимущество расширенной газовой динамики заключается в том, что для описания течения по-прежнему используется континуальный подход уравнений в частных производных. Учёт большей неравновесности функции распределения с помощью полиномиального разложения (уравнения Барнетта) и разложения по полиномам Эрмита (моментный метод) позволяет заметно продвинуть континуальный подход описания в сторону разреженности по сравнению с уравнениями Навье-Стокса [2,12].

В данной работе используется регуляризованная система моментных уравнений R13 [13,14], предложенная в 2003 году. Регуляризация позволила лишить оригинальную моментную систему уравнений Грэда главного недостатка, заключающегося в появлении нефизических разрывов в решении задачи о структуре ударной волны для чисел Маха $M > 1.65$ [14,15]. Данная система уравнений успешно применялась как для моделирования сверхзвуковых течений [16-19], так и имеет большой успех в применении к задачам газовых микротечений [12,20]. Данное исследование посвящено моделированию газовых микросососов, работа которых основана на тепловом скольжении (эффекте Кнудсена) [21]. Большинство работ, посвященных моделированию подобных устройств, основано на кинетическом подходе (например, [22-24]). Здесь же предлагается применение континуального подхода для данных задач.

2. Математическая модель

2.1. Система уравнений R13

В качестве математической модели в данной работе была выбрана регуляризованная тринадцатимоментная система уравнений Грэда (R13), предложенная в работе [13]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{3}{2} \rho \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho v_k \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij} v_k}{\partial x_k} + \frac{4}{5} \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2p \frac{\partial v_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2\sigma_{k(i} \frac{\partial v_{j)}}{\partial x_k} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k} = -\frac{\sigma_{ij}}{\tau}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i v_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} p \frac{\partial (\frac{k}{m} T)}{\partial x_i} + \frac{5}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial (\frac{k}{m} T)}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \sigma_{ik} \frac{k}{m} T \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \\ + \frac{7}{5} q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{2}{5} q_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + m_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{2}{3} \frac{q_i}{\tau}, \end{aligned} \quad (5)$$

где плотность ρ , скорость v_i , давление p , тензор напряжений σ_{ij} и тепловой поток q_i составляют тринадцать примитивных переменных, четырнадцатая переменная, температура T , связана с остальными с помощью уравнения состояния. Уравнения (1)–(3) представляют собой классические соотношения неразрывности и законы сохранения импульса и энергии, а уравнения (4) и (5) - соотношения, полученные Грэдом в [11] для компонент тензора напряжений и компонент вектора теплового потока соответственно. Моменты более высокого порядка (новые члены в уравнениях по сравнению с системой Грэда [11]) имеют следующий аналитический вид:

$$m_{ijk} = -2\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} - \frac{k}{m} T \sigma_{ij} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k} + \frac{4}{5} q_{(i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right], \quad (6)$$

$$R_{ij} = -\frac{24}{5} \tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_j)} + \frac{k}{m} q_{(i} \frac{\partial T}{\partial x_j)} - \frac{k}{m} T q_{(i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_j)} - \frac{1}{\rho} q_{(i} \frac{\partial \sigma_{j)k}}{\partial x_k} - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \frac{5}{7} \frac{k}{m} T \left(\sigma_{k(i} \frac{\partial v_j)}{\partial x_k} + \sigma_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \sigma_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right], \quad (7)$$

$$\Delta = -12\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} \frac{k}{m} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{k}{m} T q_k \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} q_j \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]. \quad (8)$$

Соотношения (6)-(8) для новых членов, представляющих собой регуляризацию системы уравнений Грэда, имеют несколько вариантов [18,19]. В данной работе использовался вариант, предложенный в [13].

2.2. Граничные условия на твёрдой стенке

Тогда для того, чтобы получить условия для каждого момента на стенке, необходимо произвести интегрирование данного равенства для соответствующего веса каждого момента. После интегрирования были получены следующие граничные условия для твёрдой изотермической стенки [25]:

$$u = u_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_{xy} + \frac{m_{xy}}{2} + \frac{q_x}{5} \right), \quad (9)$$

$$\theta = \theta_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{q_y}{2} + \frac{\theta \sigma_{yy}}{4} + \frac{5R_{yy}}{56} + \frac{\Delta}{30} \right) + \frac{(u-u_w)^2}{4}, \quad (10)$$

$$R_{xy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[p_\alpha \theta u_s - \frac{1}{2} \theta m_{xy} - \frac{11}{5} \theta q_x - p_\alpha (u-u_w)^3 + 6p_\alpha (\theta-\theta_w)(u-u_w) \right], \quad (11)$$

$$m_{xy} = -n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{p_\alpha}{5} (\theta-\theta_w) - \frac{4p_\alpha}{5} (u-u_w)^2 + \frac{R_{xx}}{14} + \theta \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{5} \right) + \frac{\Delta}{150} \right], \quad (12)$$

$$m_{yy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{2p_\alpha}{5} (\theta-\theta_w) - \frac{R_{yy}}{14} + \frac{\Delta}{75} - \frac{7}{5} \theta \sigma_{yy} - \frac{3p_\alpha}{5} (u-u_w)^2 \right], \quad (13)$$

где n_y - нормаль к поверхности стенки, направленная внутрь газа, α - коэффициент аккомодации поверхности, F - внешняя сила, u_w и θ_w - скорость по касательной и температура

стенки соответственно, $p_\alpha = p + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{R_{yy}}{28\theta} - \frac{\Delta}{120\theta}$.

3. Численный метод

Для решения системы (1)-(5) использован численный метод, который представляет собой вариант метода Годунова повышенного порядка точности с использованием линейного восстановления параметров течения на каждом расчетном слое. Потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного по методу HLL (Harten, Lax, van Leer) [26] решения задачи Римана. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге-Кутты 2-го порядка [27].

В основе моделирования взаимодействия газа с твердой стенкой лежат граничные условия (9)-(13). Данные граничные условия были дополнены экстраполированными соотношениями уравнений для внутренней области течения [28,29]. Полученная система нелинейных уравнений решается итерационным методом Ньютона на каждом временном шаге. Подробно численный алгоритм описан в работах [28,29].

4. Численные результаты

4.1. Насос Кнудсена

Моделируется плоское двумерное течение умеренно разреженного максвелловского одноатомного газа в замкнутой области, представляющей собой два резервуара, соединённых каналом (рис. 1а). В левом и правом резервуарах поддерживаются постоянные температуры 300 и 500 К соответственно. Температура стенки канала изменяется линейно по x . В начальный момент времени давление постоянно. Число Кнудсена в горячем резервуаре равно $Kn = 0.48$. В силу достаточной разреженности газа на начальном этапе при наличии градиента температуры [30] возникает течение в сторону более нагретого сосуда (рис.1а). При этом течение обусловлено лишь градиентом температуры (градиента давления на начальном этапе нет). На рис. 1b представлено распределение продольной компоненты скорости вдоль плоскости симметрии в этот же момент времени. В дальнейшем за счёт этого течения происходит постепенное перетекание газа в горячий резервуар, и появляется градиент давления, который является причиной возникновения течения в обратном направлении. В стационарном состоянии устанавливается довольно сложная структура вихрей как внутри канала, так и в резервуарах. На рис.2а представлена общая картина линий тока для установившегося течения. На рис. 2b приведено распределение диагональных компонент тензора P_{ij} . В этом распределении наблюдается наличие существенных отличий данных компонент на входе в канал и на выходе из него. Полученные результаты хорошо соотносятся с численными результатами работы [23].

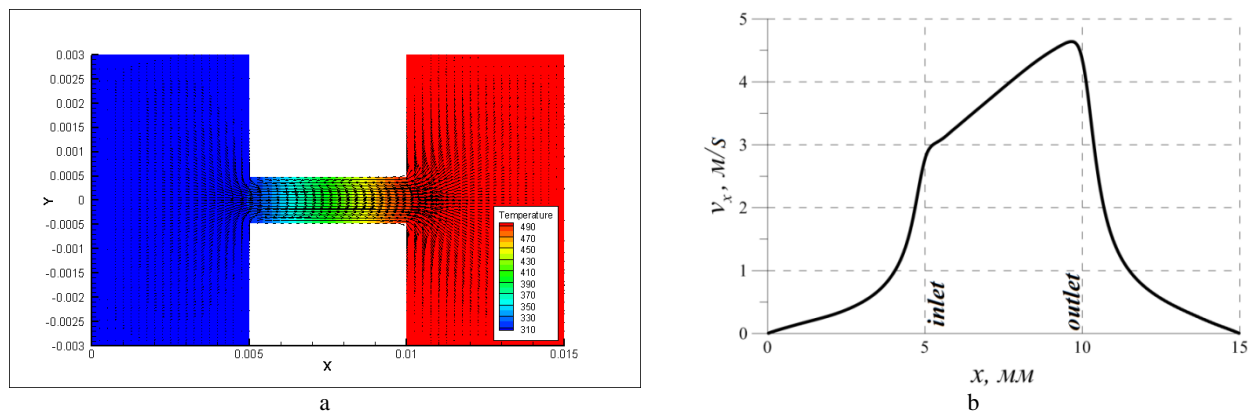


Рис. 1. Насос Кнудсена. Начальная фаза течения (а) и распределение продольной скорости в плоскости симметрии в этот же момент (b).

Интересным является построение зависимости показателя термомолекулярной разности давлений в зависимости от числа Кнудсена. Для бесконечно длинных каналов насоса Кнудсена можно записать следующее соотношение [31]:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^\varphi, \tag{14}$$

где p_1, T_1 и p_2, T_2 - давления и температуры слева и справа в установившемся течении, а φ - показатель термомолекулярной разности давлений (ТРД). В случае сплошной среды, когда $Kn \rightarrow 0$, этот показатель стремится к нулю. Градиент температуры перестаёт приводить газ в движение на начальном этапе при отсутствии градиента давления. Если же имеет место свободномолекулярный режим течения, то есть $Kn \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow 0.5$ [31]. На рис. 3 представлено распределение показателя ТРД в зависимости от числа Кнудсена. Из распределения видно, что для системы R13 график монотонно растёт в рассматриваемом диапазоне чисел Кнудсена, превышая значение $\varphi = 0.5$. Это объясняется тем, что используемая система уравнений является приближением Kn^3 . Таким образом, математический предел использования системы R13 является $Kn \approx 0.5$. Если учесть этот факт и принять во внимание конечную длину моделируемого канала, полученное распределение оказывается приемлемым при $Kn \leq 0.5$.

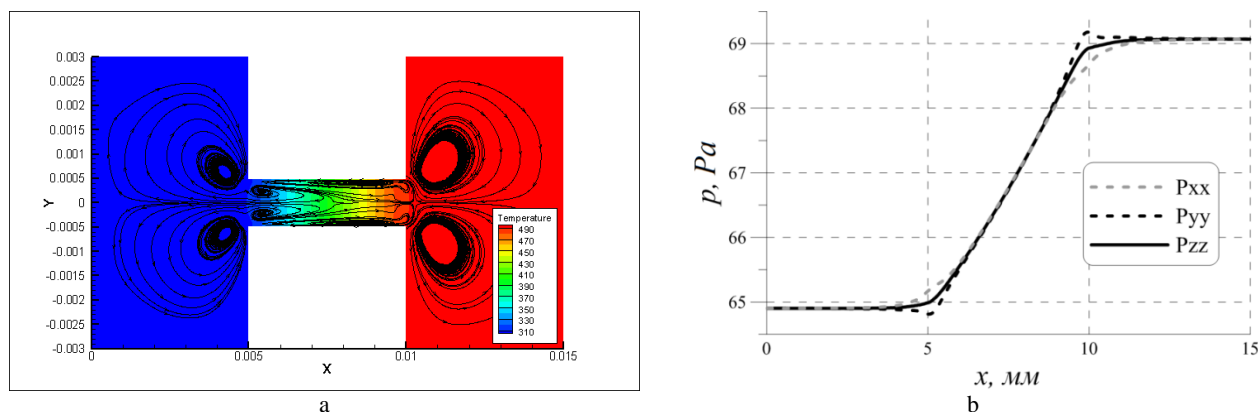


Рис. 2. Насос Кнудсена. Установившееся стационарное течение (а) и распределение тензора P_{ij} вдоль плоскости симметрии в установившемся течении (б).

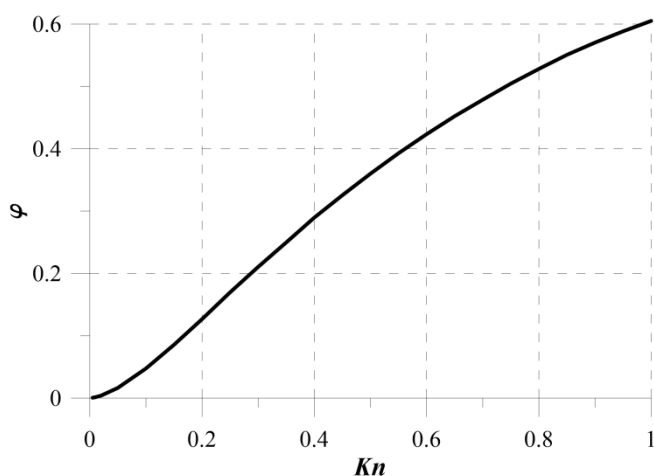


Рис. 3. Зависимость показателя ТРД от числа Кнудсена

4.1. Насос Кнудсена с несколькими микроканалами

Для двух таких же резервуаров из предыдущей задачи были аналогично проведены расчёты для системы одинаковых эквидистантных каналов, соединяющих два данных сосуда с различными температурами. На рис. 4 представлена картина линий тока для такого случая в верхней половине расчётной области в сравнении с результатами кинетического модельного уравнения Шахова [6], полученные с помощью унифицированной газокINETической схемы (UGKS, [32]) для $Kn=0.40$.

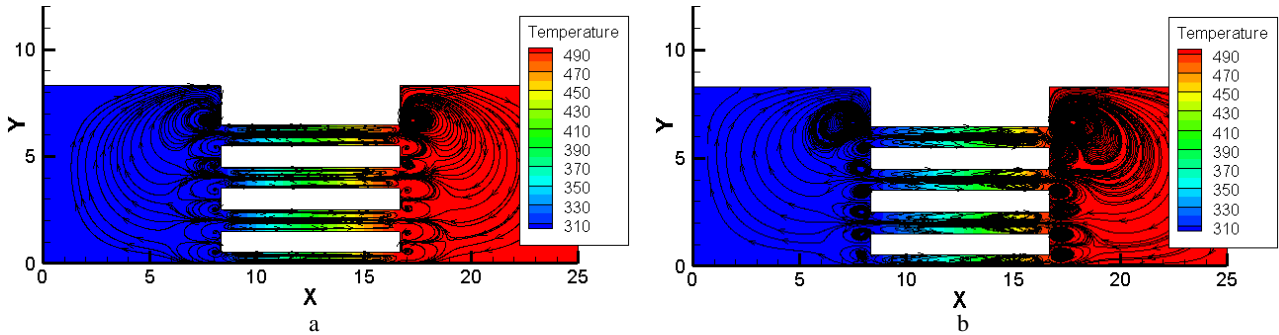


Рис 4. Насос Кнудсена с несколькими каналами. Линии тока и распределение температуры в верхней половине устройства в стационарном состоянии (a – R13, b – UGKS).

4.3. Насос на пограничном тепловом эффекте

Как пример моделирования работы микроустройств с достаточно сложной геометрией было рассчитано течение в другом типе насоса. Данный насос работает за счет пограничного теплового эффекта [24,30]. Устройство состоит из двух групп пластин с разными температурами T_1 и T_2 . Температура «холодных» пластин $T_1=300$ К. Эта же температура поддерживается на стенках насоса. Температура «горячих» пластин $T_2=600$ К. Численные расчёты проводились для случая десяти горячих и девяти холодных пластин. Задача решалась в верхней половине области в силу симметрии задачи. Начальное давление определяется числом Кнудсена равным $Kn=0.30$. На рис. 5 представлено сравнение распределений полей температуры в расчётной области, полученных с помощью уравнений R13 и кинетического подхода (UGKS). Аналогичное сравнение полей безразмерного давления представлено на рис. 6. На рис. 7 представлено сравнение одномерных распределений температуры и давления вдоль сечения $y=0.003$.

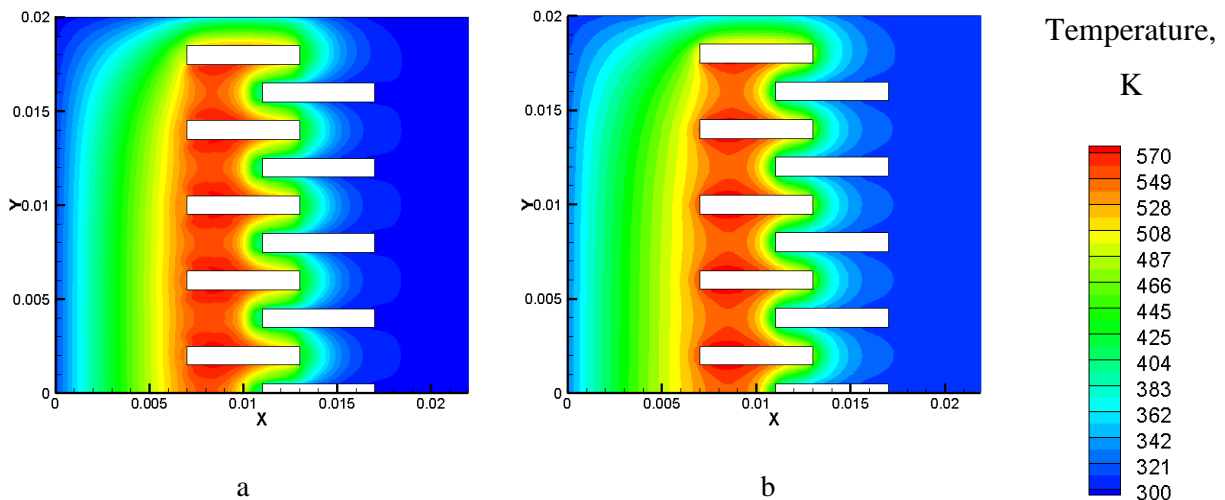


Рис. 5. Поля температуры для стационарного течения для $Kn = 0.30$ (a – результаты R13, b – результаты UGKS)

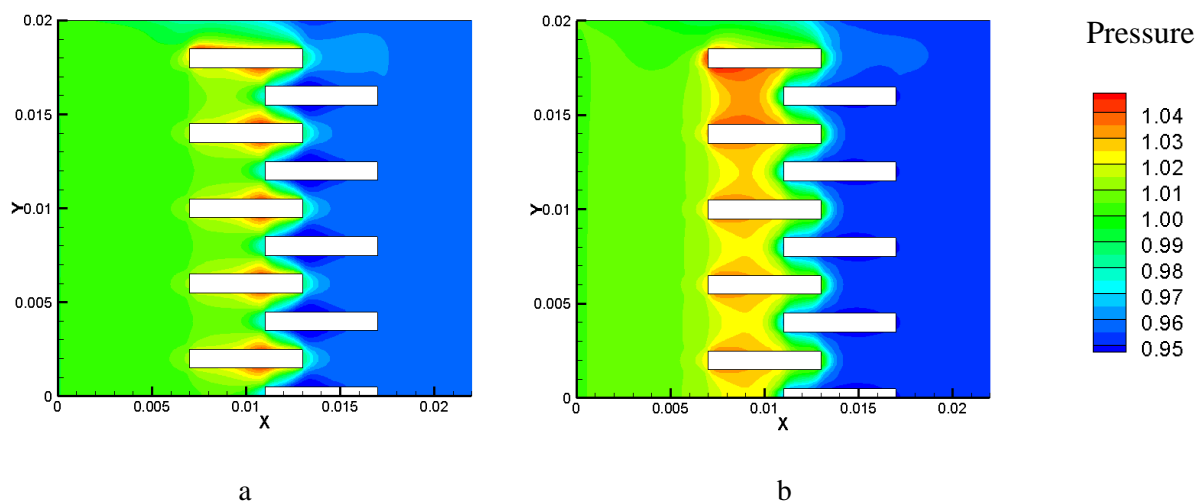


Рис. 6. Поля давления для стационарного течения для $Kn = 0.30$ (a – R13, b – UGKS).

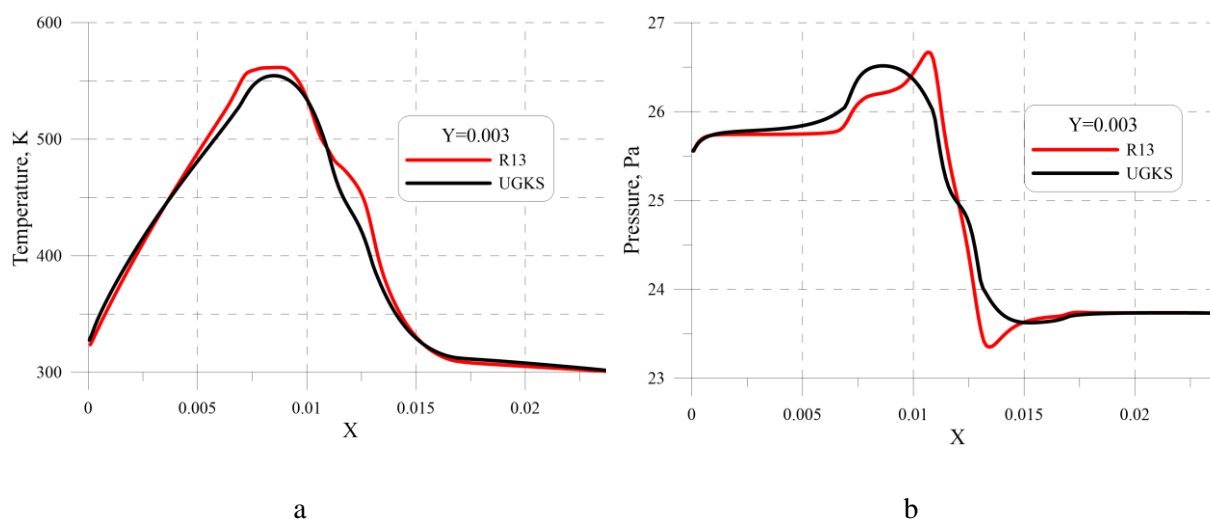


Рис. 7. Сравнение температуры (a) и давления (b) для стационарного течения для $Kn = 0.30$ вдоль $y=0.003$.

5. Заключение

Приведенные численные результаты показали применимость системы R13 для моделирования функционирования микронасосов, работающих на разных принципах, показали возможность применения континуального подхода, основанного на системе уравнений R13. Данная система уравнений позволяет получить численные результаты, которые качественно показывают наличие явлений, получаемы с помощью кинетического подхода. При этом ограничение применимости $Kn \leq 0.5$, о котором было упомянуто выше, не является критичным в этом случае, поскольку функционирование большинства подобных устройств как раз происходит в этом диапазоне чисел Кнудсена.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-31-60094).

Литература

1. Karniadakis G., Beskok A., Aluru N. *Microflows and Nanoflows Fundamentals and Simulation*. New York: Springer, 2005.
2. Коган М.Н. *Динамика разреженного газа*. М.: Наука, 1967.
3. Cercignani C. *The Boltzmann Equation and its Application*. New York: Springer-Verlag, 1988.
4. Черемисин Ф.Г. Консервативный метод вычисления интеграла столкновений Больцмана // Доклады РАН. 1997. Т. 357. №1. С. 53–56.
5. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.A. A Model for Collision Processes in Gases // *Phys. Rev.* V. 94. 1954. P. 511–525.
6. Shakhov E.M. Generalization of the Krook kinetic equation // *Fluid Dynamics* V. 3. 1968. P. 142–145.
7. Ларина И.Н., Рыков В.А. Расчет плоских течений разреженного газа при малых числах Кнудсена. // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 1996. Т. 36. №12. С.135–150.
8. Bird G.A. *Molecular Gas Dynamics and The Direct Simulations of Gas Flows*. Oxford: Oxford University Press, 1994.
9. Ivanov M.S. et al SMILE System for 2D/3D DSMC computations // *Proc. of 25th Int. Symp. on RGD*, ed. by M.S. Ivanov and A.K. Rebrov, Publishing House of the SB RAS, Novosibirsk, 2007, P. 539–544
10. Чепмен С., Каулинг Т. Д. *Математическая теория неоднородных газов*, пер. с англ. Москва: Издательство иностранной литературы, 1960.
11. Grad H. On the Kinetic Theory of Rarefied Gases // *Comm. Pure Appl. Math.* 1949. V. 2. P. 331–407.
12. Torrilhon M. Modeling nonequilibrium gas flow based on moment equations // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2016. V. 48. P. 429–458.
13. Struchtrup H., Torrilhon M. Regularization of Grad's 13-moment equations: Derivation and linear analysis // *Phys. Fluids*. 2003. V.15. P. 2668–2680.
14. Struchtrup H., *Macroscopic Transport Equations for Rarefied Gas Flows*. New-York: Springer, 2005.
15. Grad H. The Profile of a Steady Plane Shock Wave *Comm. // Pure Appl. Math.* 1952. V. 5. № 3. P. 257–300.
16. Знаменская И. А., Иванов И. Э., Крюков И. А., Мурсенкова И. В., Тимохин М. Ю. Образование ударно-волновых структур от наносекундного разряда в гелии // *Письма ЖТФ*. 2014. Т. 40. №12. С. 81–87.
17. Timokhin M. Yu., Bondar Ye. A., Kokhanchik A. A., Ivanov M. S., Ivanov I. E., Kryukov I. A. Study of the shock wave structure by regularized Grad's set of equations // *Phys. Fluids*. 2015. V. 27. P. 037101.
18. Timokhin M. Yu., Struchtrup H., Kokhanchik A. A., Bondar Ye. A. The analysis of different variants of R13 equations applied to the shock-wave structure. // *AIP Conf. Proc.* 2016. V. 1786. P. 140006.
19. Timokhin M. Yu., Struchtrup H., Kokhanchik A. A., Bondar Ye. A. Different variants of R13 moment equations applied to the shock-wave structure. // *Phys. Fluids*. 2017. V. 29. P. 037105.
20. Тимохин, М. Ю., Иванов, И. Э. Исследование течений в микроканалах и соплах микродвигателей с помощью континуальных методов. Сб. трудов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Изд-во Казанского (Приволжского) федерального университета. 2015. С. 3736–3738.
21. Knudsen M. Eine Revision der Gleichgewichtsbedingung der Gase. *Thermische Molekularströmung // Ann. Phys.* 1910. V. 31. P. 205.
22. Львов Б.Г., Ветров В.А. Анализ состояния миниатюрных вакуумных насосов. // *Вакуумная техника и технология*. 2003. Т. 13. №3. С. 141–151.

23. Han Ye.-L., Alexeenko A., Young M., Muntz E.P. Experimental and Computational Studies of Temperature Gradient Driven Molecular Transport in Gas Flows Through Nano/Micro-Scale Channels // *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*. 2007. V. 11. P. 151–175.
24. Dodulad O.I., Ivanova I.D., Kloss Yu. Yu., Shuvalov P.V., Tchremisssine F.G. Study of Gas Separation in Micro Devices by Solving the Boltzmann Equation // *AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1501. P. 816–82
25. Struchtrup H., Torrilhon M. Boundary Conditions for Regularized 13-moment-equations for Micro-channel-flows // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 1982–2011.
26. Harten A., Lax P.D., B. van Leer On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *SIAM Rev.* 1983. V. 25. P. 35–45.
27. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21. № 12. С. 103–121.
28. Timokhin M. Yu., Ivanov I. E., Kryukov I. A. 2D numerical simulation of gas flow interaction with solid wall by regularized Grad's set of equations // *AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1501. P. 843–848.
29. Иванов И. Э., Крюков И. А., Тимохин М. Ю. Применение системы моментных уравнений для математического моделирования газовых течений // *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*. 2013. Т. 53, № 10. С. 1721–1738.
30. Sone Y. *Molecular Gas Dynamics: Theory Techniques and Applications*. Birkhauser, 2007.
31. F. Sharipov, V. Seleznev, Data on internal rarefied gas flows // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1998. V. 27. №3. P. 657–706.
32. Xu K., Huang J.C. A Unified Gas-kinetic Scheme for Continuum and Rarefied Flows // *J. Comput. Physics*. 2010. V. 229. P. 7747–7764.

Статья поступила в редакцию 10 января 2017 г.