

Introduction to the Theory of the eRC-Models of High-Speed Aerophysics. The General Concepts

Sergey T. Surzhikov

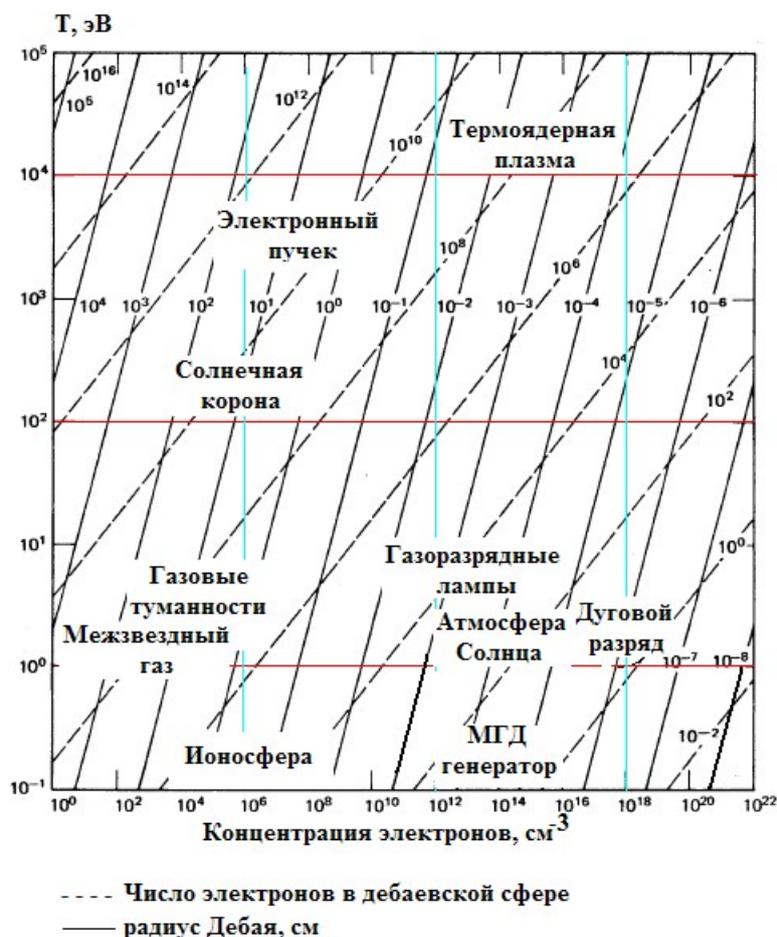
Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS), Moscow, 119526, Russia

surg@ipmnet.ru

Abstract

A nomenclature of elementary processes in partially ionized gases, which are the subject of high-speed aerophysics research, which are taken into account in the eRC-models, is presented. Discussion of the processes nomenclature is accompanied by the formulation of kinetic equations necessary to obtain quantitative characteristics of the corresponding processes, as well as to explicitly highlight the specifics of radiation-collisional processes and processes of electronic kinetics.

Key words: aerophysics of high speeds, electron-radiation-collisional models.



Typical plasma parameters for various laboratory and natural phenomena, which are used for the formulation of the eRC-models. The prototype of the figure is borrowed from [Mitchner, M., Kruger, G.H., Partially Ionized Gases, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons. New York. 1973]

УДК 533.92:533.6.01

Введение в теорию eRC-моделей аэрофизики высоких скоростей. Общие понятия

С. Т. Суржиков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1*

surg@ipmnet.ru

Аннотация

Представлена номенклатура элементарных процессов в частично ионизованных газах, являющихся предметом исследования аэрофизики высоких скоростей, которые учитываются в eRC-моделях. Обсуждение номенклатуры процессов сопровождается формулировкой кинетических уравнений, необходимых для получения количественных характеристик соответствующих процессов, а также для явного выделения специфики радиационно-столкновительных процессов и процессов электронной кинетики.

Ключевые слова: аэрофизика высоких скоростей, электронно-радиационно-столкновительные модели.

1. Введение

Создание самосогласованных электронно-радиационно-столкновительных моделей газодинамики больших скоростей имеет важное значение не только для решения конкретных задач аэрофизики, но и в целом для фундаментальной физической газовой динамики, физики низкотемпературной плазмы и астрофизики. В указанных моделях совместно решаются ключевые задачи целого ряда самостоятельных научных направлений: газовая динамика, физическая и химическая кинетика частично ионизованных газов и низкотемпературной плазмы, прикладная квантовая механика расчета вероятностей квантовых переходов между возбужденными квантовыми состояниями, задачи теории переноса селективного теплового излучения, модели компьютерной физики.

Решение самосогласованных задач требует не только знания и умения использовать современные методы исследования обозначенных научных направлений, но и оптимального их сочетания в условиях совместного решения нелинейных задач исключительно высокой вычислительной трудоемкости. В качестве примера можно привести исключительно удачный пример развития теории физики ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, продемонстрированный в монографии [1], где детальное изложение классической теории ударных волн сочетается с не менее детальным описанием современных (на время выхода указанной монографии) методов физической и химической кинетики, квантовой механики и теории переноса теплового излучения.

Прошедшие половина века выдвинули требование развития указанной концепции в части использования методов компьютерной физики и достижений последних лет в указанных направлениях. Например, использование современных компьютерных технологий позволяет применять в расчетах матрицы вероятностей ровибронных (электронно-колебательных) переходов в двухатомных молекулах, полученных при *ab-initio* решении системы уравнений квантовой химии. При этом оказывается, что для расчета фотоионизационных процессов весьма удобно использовать такую разновидность точных (Хартри – Фоковских) квантово-механиче-

ских методов, как метод квантового дефекта в различных его вариантах. А при решении нестационарных высокотемпературных задач оказывается более целесообразным использовать упрощенные квазиклассические соотношения.

Хорошо известной проблемой компьютерной физики последних десятилетий является решение жестких систем большого числа кинетических дифференциальных уравнений. Однако – это проблема вычислительной математики. Но еще существует не менее важная проблема выбора номенклатуры решаемых дифференциальных уравнений, что означает необходимость решения задач химической и физической кинетики: определение номенклатуры учитываемых химических компонент и набора учитываемых квантовых уровней энергии у каждой частицы. Применительно к физической кинетике высокотемпературных газовых течений именно радиационно-столкновительные (radiative-collisional - RC) модели могут представлять собой оптимальный компромисс между поуровневыми моделями, в которых учитывается наиболее полное число квантовых уровней, и приближенными квазиклассическими моделями. Одна из разновидностей RC-моделей, развитию которой в последние годы уделяется весьма много внимания, получила название электронно-радиационно-столкновительной (eRC) модели. В этой модели большое внимание уделяется изучению электронной кинетики в неравновесно возбужденных газовых потоках. Отличием простейшей eRC-модели от семейства RC-моделей является учет уравнения сохранения энергии электронного газа. В более сложных моделях решается кинетическое уравнение для электронов и, тем самым, предположения о максвелловости функции распределения электронов по скоростям не делается.

Успешное применение eRC-моделей при решении задач неравновесного излучения релаксационной области сильных ударных волн подтвердило целесообразность применения этой модели, по крайней мере для решения указанных задач. Выбор в качестве базовых экспериментальных данных по неравновесному излучению сильных ударных волн обусловлен тем, что развитая в последние годы экспериментальная техника регистрации спектрального теплового излучения сильных ударных волн открывает большие возможности по валидации теоретических моделей и компьютерных кодов по химической и физической кинетике, а также по достоверности расчета спектральных оптических свойств неравновесных газовых смесей.

Данная работа является первой из серии трех работ, посвященных формулировке и исследованию радиационно-столкновительных моделей. Здесь излагаются общие понятия и обобщается номенклатура элементарных процессов, принимаемых в учет в RC-моделях. В заключении дана формулировка обобщенного кинетического уравнения, которое, в общем случае, должно формулироваться для каждого персонально учитываемого квантового состояния.

Вторая работа посвящена подробному рассмотрению электронной кинетики двухатомных молекул. В третьей, заключительной работе данной серии, дается пример использования eRC-модели для решения задачи радиационной газовой динамики возвращаемого из космоса космического аппарата.

Рассмотрим основные характеристики плазмы в различных условиях ее существования.

К макроскопическим характеристикам относятся:

– Дебаевский радиус

$$r_D = \sqrt{\frac{kT_e}{4\pi n_e e^2}} = 4.86 \sqrt{\frac{T_{e,[K]}}{n_e}} = 525 \sqrt{\frac{T_{e,[eV]}}{n_e}}, \text{ см}, \quad (1)$$

где T_e, n_e – температура и концентрация электронов; e – заряд электрона; k – постоянная Больцмана. Дебаевский радиус задает пространственный масштаб, выше которого допускается макроскопическое описание плазмы.

– Плазменная частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = 5.65 \times 10^4 \sqrt{n_e}, \text{ с}^{-1}, \quad (2)$$

где m_e – масса электрона.

Характерное время протекания отдельного микроскопического взаимодействия не может превысить величину

$$\tau_p = \omega_p^{-1} \quad (3)$$

К основным микроскопическим характеристикам плазмы принято относить:

- средняя тепловая скорость электронов (в приближении локального термодинамического равновесия)

$$v_e = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} = 6.21 \times 10^5 \sqrt{T_{[K]}} = 6.71 \times 10^7 \sqrt{T_{[eV]}} \text{, см/с;} \quad (4)$$

- средняя тепловая скорость частиц массой m

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi M_0 A}} = 1.45 \times 10^4 \sqrt{\frac{T_{[K]}}{A}} = 1.56 \times 10^6 \sqrt{\frac{T_{[eV]}}{A}} \text{, см/с,} \quad (5)$$

где A – атомный номер частицы; M_0 – атомная единица массы;

- число частиц плазмы в объеме дебаевской сферы

$$n_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n, \quad (6)$$

где n – объемная концентрация частиц (число частиц в 1 см^3).

Если $n_D \gg 1$, то для описания плазмы применимо приближение сплошной среды.

Заметим, что тепловая скорость электронов выражается через макроскопические характеристики – плазменную частоту и дебаевский радиус

$$(\omega_p \cdot r_D)^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \frac{kT_e}{4\pi n_e e^2} = \frac{kT_e}{m_e} \approx v_e^2 \quad (7)$$

Это означает, что за один период плазменных колебаний частица перемещается на одну дебаевскую длину.

На рис. 1 изображены области концентраций электронов и температуры, характерные для различных физических явлений. В данной работе будет дан анализ элементарных процессов, связанных с электронной кинетикой в сжатых слоях и ударных волнах применительно к аэрофизическим приложениям. Оба указанных объекта играют важную роль в современной физике неравновесных процессов применительно к аэрокосмическим приложениям.

Излагаемые ниже модели элементарных процессов в плазме, которые используются при построении радиационно-столкновительных моделей в аэрофизике и физике газовых разрядов, основаны на работах [2–4].

2. Термодинамические модели плазмы

При формулировке радиационно-столкновительных моделей важным является определить тип термодинамических моделей, наиболее адекватных рассматриваемым условиям. Ниже дано описание основных моделей, используемых в аэрофизике.

2.1. Модель локального термодинамического равновесия

При полном термодинамическом равновесии распределение тяжелых частиц и электронов по скоростям описывается уравнением Максвелла. Например, для электронов

$$dn_v = 4\pi n_e \sqrt{\left(\frac{m_e}{2\pi kT_e}\right)^3} e^{-(m_e v^2/2kT_e)} v^2 dv, \quad (8)$$

где n_e – плотность электронов (см^{-3}). При этом температура электронов равна температуре ионов и нейтральных частиц ($T_e = T_i = T_n$).

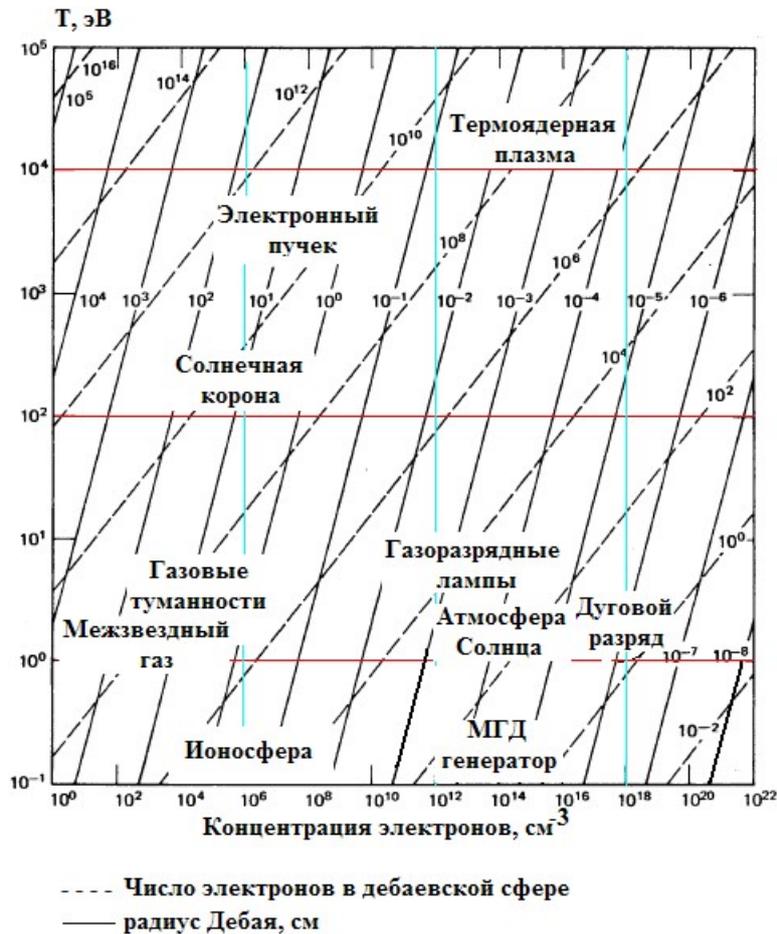


Рис. 1. Характерные параметры плазмы для различных лабораторных и природных явлений [3]

Распределение атомов и ионов по связанным состояниям дается уравнением Больцмана

$$\frac{n(u)}{n(l)} = \frac{g_u}{g_l} e^{\frac{E_u - E_l}{kT_e}}, \quad (9)$$

где E_u, E_l – энергия связанного верхнего и нижнего состояний; g_u, g_l – статистические веса. Здесь и далее индексы l и u отвечают нижнему и верхнему энергетическим состояниям.

Распределение ионов по кратности ионизации выражается уравнением Саха

$$\frac{n_z n_e}{n_{z-1}} = \frac{2g_z}{g_{z-1}} \left(\frac{2\pi m_e kT_e}{h^2}\right)^{3/2} e^{\frac{I}{kT_e}}, \quad (10)$$

где I – потенциал ионизации атома ($z=1$) или иона ($z \geq 2$) из основного состояния. Принято, что условие $z=1$ соответствует нейтральному атому.

В условиях термодинамического равновесия

$$U_\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (11)$$

где U_λ – спектральная плотность излучения в интервале длин волн от λ до $(\lambda + d\lambda)$. Однако, весьма часто плазма ударных волн оптически тонкая. Поэтому плазма излучает не по формуле Планка (11).

Если выполняются условия (8)–(10), но не выполняется (11) – плазма находится в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР).

Заметим, что существует несколько моделей локального термодинамического равновесия [5]

- частичное локальное термодинамическое равновесие (ЛТР);
- полное ЛТР;
- нестационарная однородная плазма;
- неоднородная стационарная плазма.

2.2. Модель частичного локального термодинамического равновесия (ЧЛТР)

В работах [6] было указано на случаи, когда в оптически тонкой плазме уравнение Саха неприменимо к основному состоянию атомов и ионов. Однако, как показано в работе [7], для возбужденных состояний уравнение Саха может быть использовано (при относительно низких плотностях электронов). Плазма находится в состоянии ЧЛТР, если населенность возбужденных уровней, вплоть до уровня j (сверху вниз) будет определяться уравнением Саха.

2.3. Корональная модель плазмы

Рассмотрим простейшую двухуровневую модель излучающей атомарной плазмы



где A^* – возбужденный атом.

В процессе (12) происходит возбуждение атома при столкновении с частицей B (в том числе – с электроном), а в процессе (13) – девозбуждение атома с испусканием кванта электромагнитной энергии $h\nu$. Кинетическая схема, соответствующая (12) и (13), имеет вид

$$\frac{d[A^*]}{dt} = k_f [A][B] - k_r [A^*][B] - \frac{[A^*]}{\tau_{rad}} \quad (14)$$

В стационарных условиях

$$k_f [A][B] = [A^*] \left(k_r [B] + \frac{1}{\tau_{rad}} \right) \quad (15)$$

Если $\frac{1}{\tau_{rad}} > k_r [B]$, то реализуется так называемая *корональная модель*, когда заселенность возбужденных уровней определяется скоростью радиационного распада верхнего уровня.

2.4. Столкновительно-излучательная модель или радиационно-столкновительная модель (СИ- или РС (RC)-модель)

По всей видимости, впервые РС-модель была предложена в работах [8,9]. В этой модели учитываются электронные столкновения, вызывающие переходы между верхними уровнями



и тройную рекомбинацию



Наиболее полной столкновительно-излучательной моделью является так называемая *по-уровневая* модель с подробным учетом столкновительных и излучательных процессов, учитываемыми для каждого энергетического состояния. С целью построения такой модели рассмотрим наиболее важные элементарные процессы.

3. Номенклатура радиационно-столкновительных процессов

3.1. Ионизация частиц при столкновении с электронами

Кинетическая модель процесса

$$A^{(z-1)}(n) + e \rightarrow A^{(z)}(1) + e + e, \quad (18)$$

где $A^{(z-1)}(n)$ – атом, молекула или ион кратности $(z-1)$ ($z=1$ – нейтральная частица) в квантовом состоянии n ; $A^{(z)}(1)$ – ион кратности z в основном состоянии.

Кинетическое уравнение скорости процесса (18)

$$\frac{d[A^{(z-1)}]}{dt} = -k_i^{(e)} [A^{(z-1)}][e], \quad (19)$$

где $[A^{(z-1)}], [e]$ – концентрация частиц; $k_i^{(e)}$ – коэффициент скорости ионизации.

Коэффициент скорости реакции (18) при максвелловском распределении сталкивающихся частиц

$$k_i^{(e)} = \langle v \rangle \int_0^\infty \sigma(n) e^{-(E/kT)} \left(\frac{E}{kT} \right) d\left(\frac{E}{kT} \right), \quad (20)$$

где $\sigma(n)$ – сечение ионизации из квантового состояния n . В общем случае под n следует понимать полный набор квантовых чисел.

Сечение ионизации электронами n -го уровня водородоподобного атома (здесь и далее все оценки будут выполнены для водородоподобных атомов и ионов)

$$\sigma(n) = 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_n} \right)^2 f_n \xi_n \frac{U_n - 1}{U_n^2} \ln(1.25 \beta_n U_n), \quad (21)$$

где $U_n = \frac{E_e}{E_n}$, $E_e = \frac{m_e v_e^2}{2}$, $E_n = z^2 \frac{I_1^H}{n^2}$, $\beta_n = 1 + \frac{z-1}{z+1}$, $I_1^H = 13.59$ eV; ξ_n – число эквивалентных электронов на уровне n (для водорода $\xi_n = 1$); f_n – сила осциллятора для процесса ионизации с уровня n в расчете на один электрон ($f_1 = 0.66$, $f_2 = 0.71$, $f_3 = 0.81$, $f_4 = 0.94$, $f_{n>5} = 1$); E_n – энергия ионизации с n -го уровня.

С учетом (21) можно получить для оценки коэффициента скорости ионизации

$$k_i^{(e)} = 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_n} \right)^2 f_n \xi_n \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} u_n \Psi_1(u_n, \beta_n), \quad (22)$$

где $u_n = \frac{E_n}{kT_e}$, $\Psi_1(u_n, \beta_n) = \int_{u=x}^\infty \left[\left(1 - \frac{x}{u} \right) e^{-u} \ln \frac{1.25 \beta u}{x} \right] du$.

Функция Ψ_1 является квантово-механической поправкой для атомов.

3.2. Рекомбинация ионов при тройном столкновении

Кинетическая модель процесса



Скорость процесса (23) имеет вид

$$\frac{d[A_n^{(z-1)}]}{dt} = k_r^{(e)} [A^{(z)}(1)] \cdot [e]^2, \quad (24)$$

где $k_r^{(e)}$ – константа скорости рекомбинации.

По принципу детального равновесия

$$k_r^{(e)} = \frac{g_n}{2g_z} \frac{1}{Q_e} k_i^{(e)} e^{u_n}, \quad (25)$$

где g_n – статистический вес уровня n (для водородоподобных ионов $g_n = 2n^2$, где n – главное квантовое число); g_z – статистический вес основного состояния иона (для протона $g_z = 1$); коэффициент 2 учитывает вырождение электрона по спину (+1/2 и -1/2);

$$Q_e = \frac{(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} \quad (26)$$

– статистическая сумма поступательного движения электронов.

3.3. Излучательная рекомбинация ионов

Кинетическая модель процесса



где $h\nu$ – квант электромагнитного излучения.

Скорость процесса (27)

$$\frac{d[A_n]}{dt} = \beta_{r,n} [A^{(z)}(1)] \cdot [e], \quad (28)$$

где $\beta_{r,n}$ – коэффициент скорости излучательной рекомбинации.

$$\beta_{r,n} = 5.20 \times 10^{-14} z u_1^{3/2} G_n n^{-3} [-E_i(u_n)] e^{u_n}, \quad (29)$$

G_n – эффективный коэффициент Гаунта ($G_1 = 0.8$; $G_{n>1} = 1.0$);

$$-E_i(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x}, & x > 5; \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \mathbb{C}, & x < 0.2; \end{cases} \quad (30)$$

где $\mathbb{C} = \lim \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} \right) - \ln n \right]$ – постоянная Эйлера.

3.4. Фотоионизация частиц с уровня n

Кинетическая модель процесса

$$A^{(z-1)}(n) + h\nu \rightarrow A^{(z)}(1) + e \quad (31)$$

Скорость процесса (31) записывается в следующем виде:

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -\sigma_{i,n}[A_n] \cdot U_\nu, \quad (32)$$

где $\sigma_{i,n}$ – коэффициент фотоионизации.

Для фотоионизации с уровня n водородоподобного атома

$$\sigma_{i,n} \cong \frac{16}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_0}{\alpha^3 c^2} \frac{\xi_n n v_n^3}{z^2} [-E_i(u_n)], \quad (33)$$

где σ_0 – сечение рассеяния электронов по Томсону

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2;$$

$$\alpha = \frac{1}{137} \text{ – постоянная тонкой структуры; } u_n = z^2 \frac{I_1^H}{n^2 kT}.$$

Для того, чтобы избежать решение уравнения переноса излучения для определения U_ν , приближенно используют коэффициент прозрачности $\chi_{i,n}$. Тогда

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -\sigma_{i,n}[A_n] \cdot [e](1 - \chi_{i,n}) \quad (34)$$

При $\chi_{i,n} = 1$ плазма разрежена, и фотоионизация отсутствует; при $\chi_{i,n} = 0$ плазма непрозрачна.

3.5. Электронное возбуждение частиц с уровня n

Кинетическая модель процесса

$$A^{(z-1)}(n) + e \rightarrow A^{(z-1)}(m) + e, \quad m > n \quad (35)$$

Скорость процесса (35) имеет вид

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -k_{ex}^{(e)}(A, n; E_e | A, m)[A_n] \cdot [e] \quad (36)$$

Для максвелловского распределения частиц

$$k_{ex}^{(e)}(A, n; E_e | A, m) = \sigma(A, n; E | A, m) \langle v_e \rangle_{m>n} = 8.69 \times 10^{-8} f_{n,m} \frac{u_1^{3/2}}{z^3 u_{n,m}} \begin{cases} \Psi_1(\beta_{n,m}, u_{n,m}), \\ \Psi_2(\beta_{n,m}, u_{n,m}), \end{cases} \quad (37)$$

где Ψ_1 (для атомов) и Ψ_2 (для ионов) определены в работах [10]; $f_{n,m}$ – сила осциллятора квантового перехода ($n \rightarrow m$).

3.6. Электронное девозбуждение частиц с уровня m на уровень n

Кинетическая модель процесса

$$A^{(z-1)}(m) + e \rightarrow A^{(z-1)}(n) + e \quad (38)$$

Скорость процесса (38) записывается в виде

$$\frac{d[A_n]}{dt} = +k_{de}^{(e)}(A, m; E_e | A, n)[A_m] \cdot [e] \quad (39)$$

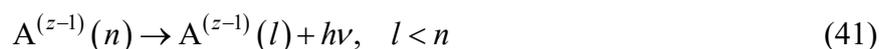
Согласно принципу детального равновесия коэффициенты электронного возбуждения и девозбуждения связаны соотношением

$$k_{de}^{(e)}(A, n; E_e) = \frac{g_m}{g_n} k_{ex}^{(e)}(A, m; E|A, n) e^{u_{n,m}}, \quad (40)$$

где $u_{n,m} = \frac{E_m - E_n}{kT_e}$.

3.7. Спонтанное (радиационное) девозбуждение частиц с уровня n

Кинетическая модель процесса



Скорость процесса (41) записывается в виде

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -\tilde{A}_{n,l}(A, n|A, l, h\nu)[A_n] \quad (42)$$

Коэффициенты скорости спонтанных радиационных переходов оцениваются для атомов и ионов по формуле

$$\tilde{A}_{n,l} = \tilde{A}_{n,l}(A, n|A, l, h\nu) = 0.667 \frac{g_l}{g_n \lambda^2} f_{l,n}, \quad (43)$$

где $f_{l,n}$ – сила осциллятора в поглощении; $\tilde{A}_{n,l}$ – коэффициент Эйнштейна.

3.8. Фотовозбуждение уровня n с уровня l

Кинетическая модель процесса



Скорость процесса (44) записывается в виде

$$\frac{d[A_n]}{dt} = \tilde{B}_{l,n} U_\nu, \quad (45)$$

где U_ν – плотность спектральной энергии излучения на частоте ν ; $\tilde{B}_{l,n}$ – коэффициент Эйнштейна поглощения. Для того, чтобы не решать уравнение переноса излучения, влияние поля излучения можно заменить влиянием коэффициента реабсорбции $(1 - \chi_{n,l})$. Если $\chi_{n,l} \ll 1$, то оптический слой толстый, а при $\chi_{n,l} \rightarrow 0$ – оптически тонкий

$$\frac{d[A_n]}{dt} = \tilde{A}_{n,l}[A_n](1 - \chi_{n,l})$$

3.9. Ионизация частицы $A^{(z-1)}(n)$ при столкновении с другой тяжелой частицей

Кинетическая модель процесса



Скорость такого процесса

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -k_i^{(M)}(A^{(z-1)}, n; M|A^{(z)}, 1; e, M)[A_n^{(z-1)}] \cdot [M] \quad (47)$$

Коэффициент скорости ионизации при максвелловском распределении тяжелых частиц

$$\begin{aligned} k_i^{(M)} &= k_i^{(M)} \left(A^{(z-1)}, n; M \mid A^{(z)}, 1; e, M \right) = \sigma_{n,M} \langle v_M \rangle = \\ &= 32\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_n} \right)^2 f_p \xi_p \left(\frac{kT_B}{\pi m_B} \right)^{1/2} \frac{m_e m_B}{m_H (m_B + m_e)} \Psi_{m_B}(w_n), \end{aligned} \quad (48)$$

где T – температура тяжелых частиц;

$$w_n = \frac{I_n}{kT} = \frac{z^2 I_1^H}{kT \cdot n^2}; \quad (49)$$

$$\Psi_{m_B}(x) \approx \left(1 + \frac{2}{x} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{2m_e}{(m_B + m_e)x} \right]^2} \right\} e^{-x} \quad (50)$$

Сечение процесса ионизации равно

$$\sigma_{n,M} = 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_n} \right)^2 \frac{m_M}{m_H} f_n \xi_n \frac{2m_e}{m_M + m_e} \frac{W_n - 1}{\left[1 + \frac{2m_e}{m_M + m_e} (W_n - 1) \right]^2}, \quad (51)$$

где W_n – приведенная кинетическая энергия сталкивающихся частиц

$$W_n = \frac{E_M - E_n}{E_n}, \quad E_M = \frac{m_M v_M^2}{2}, \quad (52)$$

где m_M, m_n, m_H, m_e – массы частиц М, А, водорода и электрона; f_n – сила осциллятора для процесса ионизации с уровня n в расчете на один электрон ($f_1 = 0.66, f_2 = 0.71, f_3 = 0.81, f_4 = 0.94, f_{n \geq 5} = 1$); ξ_n – число эквивалентных электронов на уровне n .

3.10. Рекомбинация ионов при тройном столкновении

Кинетическая модель процесса



Скорость такого процесса

$$\frac{d[A_n]}{dt} = -k_r^{(M)} \left(A^{(z)}; e; M \mid A, n; M \right) [A^{(z)}][M][e] \quad (54)$$

Коэффициент рекомбинации при тройном столкновении с атомами водорода ($M \equiv H$)

$$k_r^- = k_r^{(M)} \left(A^{(z)}; e; M \mid A, n; M \right) = \frac{g_n}{2g_z} \left(\frac{m_M + m_e}{m_M m_e} \right)^{3/2} \frac{n^3}{(2\pi k)^{3/2}} k_f^{(i)} \frac{1}{T^{1/2} T_e} \exp(-u_n + 2u_n^{1/2} w_n^{1/2}) \quad (55)$$

Поскольку $k_f^{(i)}$ пропорционален e^{-w_n} , то при $T_M = T_e$ общий экспоненциальный множитель в k_r^- равен

$$\exp(-w_n - u_n + 2u_n^{1/2} w_n^{1/2}) = 1 \quad (56)$$

3.11. Возбуждение квантового уровня n при столкновении с тяжелой частицей

Кинетическая модель процесса



Скорость такого процесса

$$\frac{d[A_m]}{dt} = k_{ex}^{(M)}(A; n; M | A, m; M)[A_n][M], \quad m > n \quad (58)$$

По аналогии с соотношениями, записанными для ионизации

$$k_{ex}^{(M)}(n, m) = \sigma_{n,m} \langle v_m \rangle = 32\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_{n,m}} \right) f_{n,m} \left(\frac{kT}{\pi m_M} \right)^{1/2} \frac{m_M m_e}{m_H (m_M + m_e)} \Psi_{m_M}(w_{n,m}), \quad (59)$$

где $w_{n,m} = \frac{|E_m - E_n|}{kT}$; $f_{n,m}$ – сила осциллятора для квантового перехода ($n \rightarrow m$).

Сечение процесса $\sigma_{n,m}$ имеет следующий вид:

$$\sigma_{n,m} = 4\pi a_0^2 \left(\frac{I_1^H}{I_m - I_n} \right)^2 f_{n,m} \frac{2m_M m_e}{m_H (m_M + m_e)} \frac{W_{n,m} - 1}{\left[1 + \frac{2m_M}{m_M + m_e} (W_{n,m} - 1) \right]^2}, \quad (60)$$

$$W_{n,m} = \frac{E_M - |E_m - E_n|}{|E_m - E_n|}$$

3.12. Столкновительное девозбуждение частицы с уровня m

Кинетическая модель процесса



Скорость процесса (61) записывается в виде

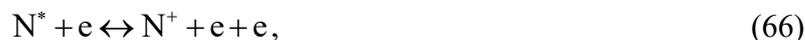
$$\frac{d[A_n]}{dt} = k_{de}^{(M)}(m, n)[A_m] \cdot [M] \quad (62)$$

В соответствии с условием детального баланса

$$k_{de}^{(M)}(m, n) = \sigma_{m,n} \langle v_M \rangle = \frac{g_n}{g_m} k_{ex}^{(M)}(n, m) e^{-w_{m,n}} \quad (63)$$

3.13. Квазиклассическая модель ионизации атомов азота с участием электронно-возбужденных состояний

Рассмотрим следующую кинетическую схему ионизации атомов азота, основанную на квазиклассической теории [11]:



где N^* – электронно-возбужденные атомы азота.

Важные для рассматриваемого случая энергетические состояния атома азота приведены в таблице 1.

Таблица 1

Параметры основного и первых возбужденных уровней атома N и иона N ⁺			
N			
	<i>n</i>	<i>E</i> , см ⁻¹	<i>g</i>
⁴ S ⁰	2	0	4
² D ⁰	2	19228	10
² P ⁰	2	28840	6
⁴ P	2	83337	12
⋮			
<i>I</i> ₀ = 117345 см ⁻¹			
N ⁺			
³ P	2	89.	9
⋮			
<i>I</i> ₁ = 238847 см ⁻¹			

Примечание. *n* – главное квантовое число; *E* – энергия уровня, статистический вес; *I*₀ – энергия ионизации атома; *I*₁ – энергия ионизации N⁺

Воспользовавшись классическими представлениями о механизме возбуждения электронных состояний атомов [2] константу скорости для перехода из состояния 1 в состояние 2 запишем в виде

$$k_f(1,2) = 2C_e \sqrt{\frac{2}{\pi m_e}} (kT_e)^{3/2} \left(\frac{E_2 - E_1}{kT_e} + 2 \right) e^{-E_2/kT_e}, \quad (67)$$

где *E*₁, *E*₂ – энергии уровней; *m*_{*e*}, *T*_{*e*} – масса и температура электронов, определяемая по средней тепловой скорости

$$v_e = \sqrt{8 \frac{kT_e}{\pi m_e}} = 6.21 \times 10^5 \sqrt{T_e} \text{ см/с;}$$

*C*_{*e*} = 0.368 × 10⁻⁵ – константа аппроксимации сечения возбуждения атома N.

Для расчета константы скорости обратной реакции (реакции дезактивации) используется принцип детального баланса

$$k_r(2,1) = k_f(1,2) \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{kT_e}\right) \quad (68)$$

Подставляя в (67) и (68) параметры 1-го возбужденного состояния, получим

$$k_f(1,2) = 0.239 \times 10^{14} T_e^{0.5} e^{-120000/T_e} \text{ см}^3/\text{моль} \cdot \text{с},$$

$$k_r(2,1) = 0.106 \times 10^{14} T_e^{0.5} \text{ см}^3/\text{моль} \cdot \text{с}.$$

Заметим, что константа равновесия рассмотренного процесса

$$K(1,2) = 2.25e^{-120000/T_e}$$

Для процесса ионизации из основного состояния

$$k_f(1,\infty) = k_{f,e} = C_e k T_e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} \left(\frac{I_0}{kT_e} + 2 \right) e^{-I_0/kT_e} \approx 0.337 \times 10^{14} T_e^{0.5} e^{-169506/T_e} \text{ см}^3/\text{моль}\cdot\text{с},$$

$$k_{r,e} = k_{f,e} K_{1,e}^{-1}(T_e) \approx 5.16 \times 10^{11} T_e^{-1} \text{ см}^3/\text{моль}\cdot\text{с},$$

$$K_{1,e}(T_e) = \left(\frac{n_e n_i}{n_1} \right)_{eq} = 2 \frac{g_i}{g_1} \frac{(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-I_0/kT_e} \approx 65.3 \cdot T_e^{3/2} e^{-169506/T_e},$$

где g_i – статистический вес основного состояния иона.

Для процесса ионизации из возбужденного состояния

$$k_f(2,\infty) = C_e \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} k T_e \left(\frac{I_0 - E_2}{kT_e} + 2 \right) e^{-\frac{I_0 - E_2}{kT_e}} \approx 0.988 \times 10^{15} T_e^{0.5} e^{-49506/T_e} \text{ см}^3/\text{моль}\cdot\text{с},$$

$$k_r(\infty,2) = k_f(2,\infty) K_{2,e}^{-1}(T_e) \approx 1.51 \times 10^{13} T_e^{-1} \text{ см}^3/\text{моль}\cdot\text{с},$$

$$K_{2,e}(T_e) = 2 \frac{g_i}{g_2} \frac{(2\pi m_e k T_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{I_0 - E_2}{kT_e}} \approx 0.636 \times 10^2 T_e^{3/2} e^{-49506/T_e}$$

Представленные соотношения позволили получить хорошее описание ионизационных процессов в аэрофизическом эксперименте [11].

4. Электронная кинетика атомов и ионов. Автоматизация расчета сил осцилляторов

Анализ радиационно-столкновительных процессов в атомарной плазме, выполненный выше показал, что для расчета возбуждения и дезактивации дискретных уровней энергии атомов и ионов необходимо знание сил осцилляторов соответствующих квантовых переходов. Соотношения, представленные в разделе 2, позволяют сделать оценки сечений и констант скоростей возбуждения, дезактивации, ионизации и рекомбинации электронных уровней атомных частиц.

При разработке компьютерных кодов, реализующих РС-модели, большое значение приобретают компьютерно-ориентированные (автоматизированные) способы расчета сечений элементарных квантовых процессов в атомах. Главной целью создания таких расчетных моделей является автоматизация процесса обработки больших объемов спектральной информации по атомам и молекулам. В работе [12] представлена компьютерная система расчета сил осцилляторов и вероятностей оптически разрешенных квантовых переходов. Дана база данных спектральных линий атомов и ионов N, O, N⁺, O⁺, C, C⁺. Прежде чем изложить основные принципы работы такого компьютерного кода рассмотрим некоторые общие вопросы.

Практически все базы данных атомных линий, используемые в настоящее время, ориентированы на задачи астрофизики и спектральной диагностики плазмы. Среди наиболее известных следует назвать базу данных Национального института стандартов США (NIST), которая основана на хорошо известных табличных данных [13]. Информация о ряде баз данных содержится в интернете. Среди отечественных баз данных следует, прежде всего, отметить [14–16].

Главной особенностью указанных баз данных является повышенные требования к точности предсказания местоположения атомных линий и сил осцилляторов, а также к достоверности их идентификации. Первые, и до недавнего времени единственные, две отечественных

базы данных, ориентированные на решение задач физической механики и теплообмена излучением, были созданы в начале 70-х годов [17, 18].

Достоинством этих баз данных явилось то, что для специалистов по физической механике были созданы таблицы атомных линий элементов высокотемпературного воздуха, включающие в себя всю необходимую информацию для расчета линейчатого атомного спектра: энергию нижнего квантового уровня, его статистический вес, местоположение атомной линии, ее силу осциллятора и константу, необходимую для расчета уширения линий. Предложенные в этих работах расчетные соотношения делали процедуру построения линейчатого атомного спектра замкнутой. Тем самым, фактически была решена проблема использования специалистами по физической механике, радиационной газо- и плазмодинамики полной информации об атомных линиях без необходимости решения задач, характерных для квантовой механики и спектроскопии высокого разрешения.

Однако недостатком этих баз данных явилось их ограниченность по числу учтенных атомных частиц (N , O , N^+ , O^+ , N^{++} , O^{++}), далеко не полный учет атомных линий и некоторая неопределенность в способе расчета уширения атомных линий. Заметим, что способ расчета уширения атомных линий обычно выносится за пределы информации по атомным линиям, содержащейся во всех базах данных. Причиной этому является то, что уширение определяется не только атомной структурой, но и условиями в плазме. Это с неизбежностью вносит неопределенность в результаты расчетов. Подход, предложенный в работе [18], состоял в том, что на основе предварительного анализа условий в низкотемпературной плазме, типичной для аэрокосмических приложений, были даны рекомендации по расчету штарковского уширения линий.

База данных атомных линий элементов C , C^+ , N , N^+ , O , O^+ , представленная в работе [12], явилась развитием подхода, реализованного в работе [28] в следующих направлениях:

- разработана автоматизированная компьютерная процедура расчета параметров атомных линий атомных частиц, для которых справедлива LS-модель векторной связи;
- учтены все известные из экспериментальных исследований уровни энергии атомных частиц, что позволило существенно увеличить номенклатуру учитываемых атомных линий;
- разработана процедура автоматизированного компьютерного построения электронных баз данных атомных линий;
- реализован новый метод расчета радиальных волновых функций атомных частиц в приближении центрального поля.

Подробное изложение структуры построения указанной базы данных, а также использованных численных методов приведено в работе [19].

5. Фундаментальное уравнение кинетики электронных квантовых состояний в однородной квазистационарной атомно-молекулярной плазме (уравнение Паули)

Представленные выше сведения об элементарных радиационно-столкновительных процессах в частично ионизованных газах позволяют дать формулировку обобщенного кинетического уравнения для каждого из отдельно выделенных квантовых состояний атомных и молекулярных частиц.

Кинетика заселения и девозбуждения некоторого квантового состояния в ансамбле атомных или молекулярных частиц описывается кинетическим уравнением, которое было сформулировано Паули в 1928 г. [20]. Данное уравнение, называемое «управляющим уравнением» (“master equation”), можно также получить из кинетического уравнения Больцмана. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d[A_n]}{dt} = & \sum_{j=1}^{n-1} k_{ex}^{(e)}(A, j; E_e | A, n) [A_j] [e] + \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} k_{de}^{(e)}(A, m; E_e | A, n) [A_m] [e] - \\
 & - \sum_{j=1}^{n-1} k_{de}^{(e)}(A, n; E_e | A, j) [A_n] [e] - \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} k_{ex}^{(e)}(A, n; E_n | A, m) [A_n] [e] - \\
 & - k_i^{(e)} [A_n] [e] + k_r^{(e)} [A^+(1)] [e]^2 + \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} \tilde{A}_{m,n}(A, m | A, n; h\nu) [A_m] + \\
 & + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{B}_{j,n} U_\nu (1 - \chi_{n,j}) - \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{A}_{n,j}(A, n | A, j; h\nu) [A_n] - \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} \tilde{B}_{n,m} U_\nu (1 - \chi_{n,m}) + \\
 & + \beta_{r,n} [A^+(1)] [e] - \sigma_{i,n} [A_n] U_\nu (1 - \chi_{i,n}) - k_i^{(M)}(A, n; M | A^+, 1; e; M) [A_n] [M] + \\
 & + k_r^{(M)}(A^+, 1; e; M | A, n; M) [A^+(1)] [M] [e] + \sum_{j=1}^{n-1} k_{ex}^{(M)}(A, j; M | A, n; M) [A_j] [M] + \\
 & + \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} k_{de}^{(M)}(A, m; M | A, n; M) [A_m] [M] - \sum_{j=1}^{n-1} k_{de}^{(M)}(A, n; M | A, j; M) [A_n] [M] - \\
 & - \sum_{m=n+1}^{m_{\max}} k_{ex}^{(M)}(A, n; M | A, m; M) [A_n] [M] \tag{69}
 \end{aligned}$$

При записи этого уравнения использовались следующие обозначения:

$k_i^{(e)}, k_r^{(e)}$ – коэффициенты скоростей ионизации и рекомбинации при столкновении с электронами (e);

$k_i^{(M)}, k_r^{(M)}$ – коэффициенты скоростей ионизации и рекомбинации при столкновении с тяжелыми частицами (M);

$k_{ex}^{(e)}, k_{de}^{(e)}, k_{ex}^{(M)}, k_{de}^{(M)}$ – коэффициенты скоростей возбуждения (ex) и девозбуждения (de) при столкновении с электронами (e) и тяжелыми частицами (M);

$\sigma_{i,n}, \beta_{r,n}$ – коэффициенты фотоионизации и фоторекомбинации на уровень n ;

$\tilde{A}_{n,j}$ – коэффициент Эйнштейна спонтанного испускания излучения при переходе с уровня n на уровень j ($j < n$);

$\tilde{B}_{j,n}$ – коэффициент Эйнштейна поглощения излучения с переходом с уровня j на уровень n ($j < n$);

U_ν – спектральная объемная плотность теплового излучения;

$[A_n]$ – концентрация частиц A в квантовом состоянии n ;

$[A^+(1)]$ – концентрация ионов в основном состоянии (если A_n – ион кратности z , то $A^+(1)$ – ион кратности $(z + 1)$; предполагается, что ион следующей кратности образуется в основном состоянии).

В списке аргументов констант скоростей элементарных процессов дана информация о характеристиках квантового перехода, которые были определены выше. Например, $k_{ex}^{(e)}(A, j; E_e | A, n)$ означает, что квантовый переход в состояние n частицы A обусловлен исходным состоянием j частицы A, взаимодействующим со свободным электроном энергией E_e . Данное обозначение имеет непосредственное отношение к системе обозначений, принятых в квантовой механике для обозначения матричных элементов квантовых переходов.

Рассмотренная кинетическая схема показывает, что при решении конкретных задач, например, для анализа структуры ударных волн по спектральному излучению (такая практика

широко распространена при изучении релаксационных процессов за фронтом ударной волны), необходимо сформулировать расчетные модели возбуждения и девозбуждения электронных состояний атомов, молекул и их ионов. При этом, если иметь в виду решение задачи о кинетике газа за фронтом ударной волны (даже для одномерной задачи о плоском фронте, не говоря уже о двумерных и трехмерных задачах), то современный опыт показывает, что необходимости формулировки полностью уровневой радиационно-столкновительной модели нет. Этому есть две главных причины: недостаточный уровень знания констант скоростей элементарных процессов и чрезмерная трудоемкость решения получаемой системы уравнений.

Практически все реализуемые к настоящему дню модели являются гибридными, в которых часть наиболее важных электронных состояний учитываются индивидуально, а основная масса квантовых состояний описывается в рамках модели максвеллово-больцмановского распределения. В качестве критерия удачности введения в рассмотрение отдельных квантовых уровней в данной работе выбраны результаты сравнения экспериментальных и расчетных данных по спектральной излучательной способности.

При решении задач аэрофизики высоких скоростей необходимо рассмотреть кинетику радиационно-столкновительных процессов с участием двухатомных молекул и способы формулировки уравнения сохранения электронного газа. Этим вопросам будут посвящены следующие части данного обзора электронно-радиационно-столкновительных моделей.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690135-5) и при поддержке гранта РФФИ 19-01-00515.

Литература

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966. 686 с.
2. Raizer Yu. P. Gas Discharge Physics. Springer-Verlag. 1991. 449 p.
3. Mitchner, M., Kruger, G.H., Partially Ionized Gases, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons. New York. 1973.
4. Семиохин И.А. Элементарные процессы в низкотемпературной плазме. – М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова. 1988. 142 с.
5. Griem H.R. Plasma Spectroscopy. McGraw Hill Book Company. New York. 1964.
6. Bates D.R., Kingston A.E., McWhirter R.W.P.//Proc. Roy. Soc. 1962. Vol. A267. pp.297–312; Proc. Roy. Soc. 1963. Vol. A270. pp. 155–167.
7. McWhirter R.W.P., and Hear A.G.// Proc. Phys. Soc. London. 1963. Vol.82. pp. 641–654.
8. Giovanelli R.G.//Austral. J. Sci. Research. 1948. Vol. A1. pp. 275–304.
9. D'Angelo N.// Phys. Rev. 1961. Vol.121. pp.505–507.
10. Drawin, H.W., “Collision and Transport Cross Sections,” Report EUR-CEA-FC 383. 1967.
11. Суржиков С.Т. Компьютерная аэрофизика спускаемых космических аппаратов. Двухмерные модели. М.: Физматлит. 2018. 544 с.
12. Surzhikov S.T. Data Base of Atomic Lines for Radiative Gas Dynamic Models. AIAA Paper 02-2898. 2002. 41 p.
13. Wiese W.L., Smith M.W., Glennon B.M. Atomic transition probabilities. National Standard Reference Data Series. National Bureau of Standards 4. 1966. Vol. 1; 1969. Vol. 2.
14. Зайдель А.Н., Прокофьев В.К., Райский С.М. и др. Таблицы спектральных линий. М.: Наука. 1977. 800 с.
15. Стриганов А.Р., Свентицкий Н.С. Таблицы спектральных линий нейтральных и ионизованных атомов. М.: Атомиздат. 1966. 899 с.

16. Касабов Г.А., Елисеев В.В. Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы. М.: Атомиздат. 1979. 160 с.
17. Авилова И.В., Биберман Л.М., Воробьев В.С. и др. Оптические свойства горячего воздуха. М.: Наука. 1970. 320 с.
18. Каменщиков В.А., Пластинин Ю.А., Николаев В.М. и др. Радиационные свойства газов при высоких температурах. М.: Машиностроение. 1971. 440 с.
19. Суржиков С.Т. Оптические свойства газов и плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004. 575 с.
20. Pauli W. Probleme der modern Physik: Zun A. Sommerfeld 60 Geburtstage. Leipzig. Springer-Verlag. 1928. 30 p.

References

1. Zeldovich, Ya. B., Raizer, Yu. P., *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, Dover Publications Inc., 2002, 913 p.
2. Raizer, Yu. P., *Gas Discharge Physics*, Springer-Verlag, 1991, 449 p.
3. Mitchner, M., Kruger, G.H., *Partially Ionized Gases*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, New York, 1973.
4. Semiohin, I. A. *Jelementarnye processy v nizkotemperaturnoj plazme* (Elementary processes in low-temperature plasma), М.: Izd-vo MGU im. M.V. Lomonosova, 1988, 142 p.
5. Griem, H. R., *Plasma Spectroscopy*, McGraw Hill Book Company. New York, 1964.
6. Bates, D. R., Kingston, A. E., McWhirter, R.W.P., *Proc. Roy. Soc.*, Vol. A267, 1962, pp.297–312; *Proc. Roy. Soc.*, Vol. A270, 1963, pp. 155–167.
7. McWhirter, R.W.P., and Hear, A.G., *Proc. Phys. Soc. London*, Vol.82, 1963, pp. 641–654.
8. Giovanelli, R.G., *Austral. J. Sci. Research*, Vol. A1, 1948, pp. 275–304.
9. D'Angelo, N., *Phys. Rev.*, Vol.121, 1961, pp. 505–507.
10. Drawin, H.W., "Collision and Transport Cross Sections," Report EUR-CEA-FC 383, 1967.
11. Surzhikov, S. T., *Komp'yuternaja aerofizika spuskaemyh kosmicheskikh apparatov. Dvuhmernye modeli* (Computer Aerophysics of Descent Vehicles. Two-dimensional models), М.: Fizmatlit, 2018, 544 p.
12. Surzhikov, S. T., "Data Base of Atomic Lines for Radiative Gas Dynamic Models," *8th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference*, AIAA Paper 02-2898, June 2002. <https://doi.org/10.2514/6.2002-2898>
13. Wiese, W. L., Smith, M. W., Glennon, B. M., "Atomic transition probabilities," *National Standard Reference Data Series*, National Bureau of Standards 4. Vol. 1, 1966; Vol. 2, 1969.
14. Zajdel', A. N., Prokof'ev, V. K., Rajskij, S. M., et al., *Tablicy spektral'nyh linij* (Spectral line tables), М.: Nauka, 1977, 800 p.
15. Striganov, A. R., Sventickij, N. S., *Tablicy spektral'nyh linij nejtral'nyh i ionizovannyh atomov* (Spectral lines tables of neutral and ionized atoms), М.: Atomizdat, 1966, 899 p.
16. Kasabov, G. A., Eliseev, V. V., *Spektroskopicheskie tablicy dlja nizkotemperaturnoj plazmy* (Spectroscopic tables for low-temperature plasma), М.: Atomizdat, 1979, 160.
17. Avilova, I. V., Biberman, L. M., Vorob'ev, V. S., et al., *Opticheskie svojstva gorjachego vozduha* (Optical properties of hot air), М.: Nauka, 1970, 320 p.
18. Kamenshchikov, V. A., Plastinin, Ju. A., Nikolaev, V. M., et al., *Radiacionnye svojstva gazov pri vysokih temperaturah* (Radiative properties of gases at high temperatures), М.: Mashinostroenie, 1971, 440 p.
19. Surzhikov, S. T., *Opticheskie svojstva gazov i plazmy* (Optical properties of gases and plasma), М.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, 2004, 575 p.
20. Pauli, W., *Probleme der modern Physik: Zun A. Sommerfeld 60 Geburtstage*. Leipzig. Springer-Verlag, 1928, 30 p.

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2021 г.