

The Influence of Angular Momentum and Boundary Conditions in Continuous Mechanics and in Kinetics

E. V. Prozorova

St. Petersburg State University, St. Petersburg, 198504, Russia

e.prozorova@spbu.ru

Abstract

An analysis of the assumptions underlying the classical models of continuum and kinetic theory has been carried out. Previous works have shown that classical models do not consider the influence of the law of conservation of angular momentum if the moment does not act as a given force action. Mathematical analysis of the equations of continuum mechanics with the initial asymmetric stress tensor showed that in the plane case for four unknowns in the classical formulation we have three equations: two equations from the stress equilibrium condition and one equation - the moment equilibrium condition. To close the problem, we need an additional condition. In the classical version, such a condition is the condition of symmetry of the stress tensor a method for closing the problem and examples are proposed for the asymmetric stress tensor. The problems that arise when using the Hamiltonian formalism under the action of forces of a more complex form than the classical ones, the influence of boundary conditions, are discussed. A possible model for the sliding of a gas interacting with a metal surface is presented.

Keywords: Ostrogradsky – Gauss theorem, Boltzmann Equations, Chapman – Enskog Method, discrete media

УДК (546.212 + 533.16)

Влияние момента и граничных условий в механике сплошной среды и в кинетике

Э. В. Прозорова

*С.-Петербургский государственный университет,
Россия, С.-Петербург, 198504, Университетский проспект, 28
e.prozorova@spbu.ru*

Аннотация

Проведен анализ предположений, лежащих в основе классических моделей сплошной среды и кинетической теории. В предыдущих работах показано, что классические модели не рассматривают влияние закона сохранения момента количества движения, если момент не выступает как заданное силовое воздействие. Математический анализ уравнений механики сплошной среды с исходным несимметричным тензором напряжений, показал, что в плоском случае для четырех неизвестных в классической формулировке мы имеем три уравнения: два уравнения из условия равновесия напряжений и одно уравнение - условие равновесия момента. Для замыкания задачи нам нужно дополнительное условие. В классическом варианте таким условием является условие симметрии тензора напряжений. Предлагается метод замыкания задачи и примеры для несимметричного тензора напряжений. Обсуждаются проблемы, возникающие при использовании гамильтонова формализма под действием сил более сложного вида, чем классические, влияние краевых условий. Представлена возможная модель скольжения газа, взаимодействующего с металлической поверхностью.

Ключевые слова: момент количества движения, законы сохранения, уравнение Больцмана, тензор напряжений, функция Гамильтона.

1. Введение

Подводным камнем любой теории является выбор математической модели, которая получается из физической модели. Физическая модель получается из экспериментов или из предыдущих теорий. Эксперимент делается на базе материальных объектов. Математические модели отличаются от физических определением точки [1]. Точка не имеет размера, физический объект всегда характеризуется размером, хотя бы длиной волны. Вращательное движение точки не имеет смысла. Результатом абстракции является потеря части информации об исследуемом объекте. Мы рассматриваем наиболее общие открытые нестационарные системы, являющиеся объектами исследования в механике сплошной среды и в кинетике. Математическое моделирование таких объектов вызывает сложности, так как их описание представляется системой нелинейных нестационарных уравнений. В предыдущих работах показано, что классические модели не включают один из важнейших законов – закон сохранения момента количества движения, если момент не выступает как заданное силовое воздействие. Выполненный математический анализ уравнений механики сплошной среды с исходным несимметричным тензором напряжений, показал, что в плоском случае для четырех неизвестных в классической формулировке мы имеем три уравнения: два уравнения из условия равновесия напряжений и одно уравнение – условие равновесия момента. Таким образом, мы

нуждаемся в замыкании задачи с помощью дополнительного условия. В классическом варианте таким условием является условие симметрии тензора напряжений. Из определения давления, как из классического уравнения Больцмана, так и модифицированного, не следует, что гидростатическое давление есть одна треть от суммы давлений на координатных площадках. Используя закон Паскаля для равновесия, выбирают давление равным одной трети давлений на координатных площадках. Однако теория остается прежней при определении разного давления на каждой из площадок, т.е. p_x, p_y, p_z . Использование одного давления возможно при равновесных условиях (закон Паскаля), но для неравновесных условий факт не очевиден. Пренебрежение вне интегральным слагаемым при взятии интегралов по частям (теоремы Остроградского – Гаусса) возможно только для медленных ламинарных течений. О разнице давлений говорит анализ определения давлений при сравнении результатов по его определению через потенциальные скорости подстановкой в уравнения Эйлера. Выписывая отдельно закон равновесия для сил и отдельно для моментов сил без учета их взаимного влияния, хотя момент создает дополнительную силу, мы приходим к выводу о симметрии тензора напряжений. В случае, если мы рассматриваем равные давления по разным направлениям, мы теряем момент силы, а градиент давления есть сила. Анализируя результаты решения уравнений Эйлера и расчеты потенциальных течений, мы получаем вихревую пелену, что указывает на существование момента [2–6], расчеты [7].

Итак, анализ соответствия решений для потенциального течения и для уравнений Эйлера говорит об их несовпадении. В стохастических процессах открытых систем движение быстрых молекул сопровождается изменением положения центра инерции, что сопровождается появлением момента. Появление момента приводит к изменению направления скоростей и формированию локальных структур. Молекулы двигаются по всем направлениям, создавая не только нормальную, но и тангенциальную силу. В результате формируется циркуляция скорости, создавая, например, для самолетов дополнительную силу. В численных расчетах широко используется метод конечных объемов. Метод конечных объемов является интегральным методом. Если он исходит из исходных экспериментальных данных, то схватывает все составляющие, участвующие в изменении физических величин в объеме. Обратный переход от дифференциальных уравнений к интегральным неоднозначный.

Основное уравнение в классической механике и стохастической физике – уравнение Лиувилля [8–11]. В уравнении коллективные взаимодействия происходят через внешнюю силу, основное взаимодействие – бинарное взаимодействие частиц. Начальные и граничные условия не рассматриваются, оговаривается невозможность их рассмотрения ввиду огромного количества частиц. Однако формализм Гамильтона правомерно использовать в случае системы без диссипации, когда нет зависимости от скорости, что при наличии возмущающих поверхностей или в условиях больших градиентов скоростей, температур, плотностей или других характеристик не наблюдается. Используя формализм Н.Н. Боголюбова, для определенных условий выводят уравнение Больцмана. При выводе уравнения Больцмана и других кинетических уравнений используется предположение о «марковости» процесса, т.е. нет зависимости от «прошлого». Однако в реальности она частично проявляется через потоки на границе. Уравнение Больцмана, как и уравнение Лиувилля, написано для замкнутых систем. Существенно, что эффект границы виден при расчетах методом молекулярной динамики и численном решении уравнения Больцмана. Гамильтонов формализм включает частный вид сил (потенциальные силы плюс силы вида $\Phi(r_i - r_j)$), где r_i, r_j – радиусы молекул. Реальные силы имеют более сложные составляющие. Примером других сил является, например, потенциал Леннарда – Джонса. Его часто используют при вычислении интеграла столкновений. В таком случае можно говорить о несовпадении уравнений Больцмана, полученных из классического уравнения Лиувилля и широко используемого. Рассмотрение стохастических уравнений, базирующееся на сумме двух интегралов и понятии физически бесконечно малом масштабе, приводит к эффекту дополнительной диффузии [5]. Выявление соответствия типов

сил уравнения Лиувилля и уравнений механики сплошной среды указывает на ответственность потенциальных сил за уравнения Эйлера. В уравнении Больцмана следят за динамикой системы через функцию распределения. Исследований, касающихся влияния перестановки операций осреднения сечения столкновений и потенциала, нет. При вычислении макропараметров через функцию распределения и проектировании значений на оси координат симметрия некоторых величин может нарушаться. Так может произойти при вычислении давления и тензора давлений: $P_{ij} = m \int \mathbf{c}_i c_j f d\xi$. Обычно на основании указанного вида постулируется симметрия тензора напряжений, $\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{u}$. Здесь f – функция распределения в фазовом γ -пространстве. При выводе модифицированного уравнения обозначения оставим общепринятыми, т.е. r – радиус-вектор; x – координата точки; ξ – скорость точки, m – молекулярный вес, и, согласно определению функции распределения f_N , вероятность нахождения системы в точках (x_i, ξ_i) в интервалах $dx_i d\xi_i$ равна $f_N(t, x_1, \dots, x_N, \xi_1, \dots, \xi_N) dx_1, \dots, d\xi_1, \dots, d\xi_N$. В связи с разницей моделей, построенных на базе функции распределения и методом молекулярной динамики, гипотеза о молекулярном хаосе сохраняется, но «марковость» процесса частично теряется, так как через поверхности проходят потоки, что приводит к появлению диффузии не только в интеграле столкновений, но и вне интеграла столкновений. Потоки зависят от истории их формирования. Потоки вне интеграла столкновений не являются диссипативными. В классическом варианте уравнение Лиувилля является линейным и обратимым. Добавление влияния момента оставляет уравнение обратимым.

Решения, построенные методом молекулярной динамики и как решения уравнения Больцмана, совпадают, если берется большое количество частиц и нет потоков через границу. Таким образом, теоретическое уравнение Больцмана учитывает изменение состояния только внутри элементарного объема. Поэтому оно годится только при малых градиентах. В этой же работе доказывается справедливость гипотезы Гильберта о зависимости функции распределения от времени только через зависимость от макропараметров. Как правило, из уравнения Больцмана методом Чепмена – Энскога или каким-либо другим выводятся уравнения Навье – Стокса (Барнетта и т. д.), определяется уравнение неразрывности, совпадающее по форме с уравнением Лиувилля. Таким образом, доказывается непротиворечивость всей теории. Предложенная первоначально теория для решения релаксационных задач экстраполирована на решение задач, связанных с динамикой газа, в том числе для решения задач о течении газа вблизи поверхности.

Уже отмечалось, «математическая» и «физическая» точки сильно различаются. Пока мы рассматриваем «материальную точку» нас не очень интересует вращается ли она или нет. Для физической «точки» существенно как ее вращение, так и структура рассматриваемой «точки». Известно, что за вращение отвечает момент силы (момент количества движения). Роль момента количества движения проявляется во всех процессах, связанных с неравномерным распределением частиц. Величина дополнительной силы определяется значением градиента физических величин (плотности, скорости, количества движения, температуры). Действие момента количества движения, т.е. момента сил существенно зависит от положения оси инерции (центра инерции). Момент величина векторная. Аддитивные схемы расчета межмолекулярных взаимодействий, в которых «неаддитивность» включена в параметры атом-атомных потенциалов, не учитывает всего разнообразия условий.

Таким образом, проведенный итоговый анализ говорит о важности включения момента как дополнительной силы в уравнения механики сплошной среды, кинетической теории и в стохастические процессы. Момент создает «коллективную» силу. Его роль повышается при больших градиентах, малых и очень больших размерах объектов исследования.

Особую роль момент играет при движении газа и жидкости около поверхности. Хотя термин взаимодействие с поверхностью не верен, идет процесс взаимодействия с твердым телом, в работе рассматривается «взаимодействие с поверхностью». В настоящее время основным источником информации являются эксперименты с пучками и численные расчеты,

привязанные к этим экспериментам. Основная масса расчетов, как в рамках квантовых расчетов, так и классическим методом молекулярной динамики, выполнены для равновесных условий. Единичные расчеты не дают возможность понять общую природу поведения газа и жидкости вблизи тела. Экспериментальные исследования показали [12-18], что структуризация поверхности понижает сопротивление ламинарного потока на $10 \div 40$ %. Физическая природа эффекта вызывает споры. В работе предлагается возможный вариант формирования адсорбционных процессов и скольжения газа около кристаллической поверхности. Далее приводятся простейшие примеры совместного действия сил и моментов сил, полученные за последние годы.

2. Динамика Гамильтона

Класс систем, рассмотренных в учебниках по статистической механике, включает системы, описываемые динамикой Гамильтона. В современном варианте к этому классу принадлежат все системы, описываемые законами классической или квантовой механики. Поскольку в предлагаемой нами теории важная роль отводится закону сохранения момента силы (количества движения) необходимо изучить, как изменятся свойства и структура системы при использовании закона сохранения момента, так как в статистические теории он не включался. Мы уже отмечали, что особенностью классических теорий является выявление свойств систем без исследования влияния граничных и начальных условий на их состояние. Обычно Гамильтониан содержит только потенциальные силы. В действительности силы представляются суммой сил (q -обобщенные координаты) [19].

$$Q = -B - Cq, \quad \dot{q}_i = 0, \quad B = D + \Gamma, \quad D^T = D, \quad \Gamma^T = -\Gamma,$$

Dq – диссипативные, Gq – гироскопические, C – потенциальные.

$$-\Gamma\dot{q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}, \quad V(q, \dot{q}) = -\frac{1}{2} q^T \Gamma q$$

Матрица потенциальных сил C также представляет сумму симметричных и несимметричных сил:

$$C = K + N, \quad K^T = K, \quad N^T = -N$$

Консервативные силы имеют потенциал

$$-Kq = \frac{\partial U}{\partial q}, \quad U = -\frac{1}{2} q^T K q$$

Следовательно, $L = T - Q_r$, где последнее слагаемое есть обобщенные силы. Формально можно написать формулу классической

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}, \quad \ddot{q}_i = -\frac{\partial H(q, \dot{q})}{\partial q_i}$$

Однако часто работают с более общими силами:

$$(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l, p_{l+1}, \dots, p_n), \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$H = \sum_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + U(r_i, t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq N, i \neq j} \Phi(|r_i - r_j|).$$

Часто

$$\Phi = \left(\frac{a}{r^6} - \frac{b}{r^{12}} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -6 \frac{a}{r^7} + 12 \frac{b}{r^{13}}$$

Тогда получается сумма двух потенциалов, система не относится к Гамильтоновой системе [20].

3. Уравнение Больцмана

При решении уравнения Больцмана методом Чепмена – Энского при взятии производной от локально-равновесной функции распределения в классическом случае используют уравнения Эйлера. Возникает вопрос о правомерности использования параметров, определенных из уравнения Эйлера, для локально равновесной функции распределения.

Эти параметры определяются из нулевого приближения, при этом решаются задачи с учетом первого порядка, чему соответствует решение уравнений Навье – Стокса. При взятии производной от функции распределения полагают количество частиц постоянным, что исключает адсорбцию и переменную плотность. В результате классическое решение не определяет самодиффузию. Рассматривается производная вида

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_0 \left\{ \frac{m}{kT} \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial t} c_i \left[\left(\frac{m}{kT} \right) c^2 - 5 \right] \right\}$$

для функции

$$f(t, x, \xi) = f_0(t, x, \xi) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT} (\xi - u)^2 \right\}$$

С учетом изменения плотности

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} \Big|_{t=0} = f_0 \left\{ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x_i} c_i + \frac{m}{kT} \left(c_i c_j - \frac{1}{3} c^2 \delta_{ij} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial x_i} c_i \left[\left(\frac{m}{kT} \right) c^2 - 5 \right] \right\}$$

Новое слагаемое отвечает за самодиффузию. Это влечет изменение потоков плотности, скорости, температуры. Решение Чепмена – Энского тогда должно иметь даже в классическом случае

$$f = f^{(1)} \left(1 + \epsilon \varphi^{(1)} \right), \quad \varphi^{(1)} = -C_i \frac{\partial n}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - B_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Коэффициенты C_i, A_i, B_{ij} – функции c_i, n, T . $c_i = \xi_i - u, n, T$; u – газодинамическая скорость; n – плотность частиц; T – температура. Полученные результаты подтверждают уравнения, полученные в работах Валландера [21, 22].

Дополняя уравнение влиянием момента для функции распределения, получим

$$f(t + dt, \mathbf{r} + \xi_i dt + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dt, \xi_i + \mathbf{F}_i dt + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}} dt) d\mathbf{r} d\xi_i +$$

$$G_2(t + dt, \mathbf{r} + \xi_i dt + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dt, \xi_i + \mathbf{F}_i dt + \frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}} dt) = f(t, \mathbf{r}, \xi_i) d\mathbf{r} d\xi_i + G_1(t, \mathbf{r}, \xi_i) + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} dt$$

M – момент, связанный с коллективным взаимодействием частиц в результате движения центра инерции по мере перемещения частиц. G_1 и G_2 – потоки через границу. Исходная формулировка всех стохастических процессов – замкнутость объемов, потоков через границу нет, и уравнение Больцмана написано при таких предположениях. Методика остается той же для открытых систем. Естественно, при полном учете изменяются уравнения для макропараметров. Они представлены ранее из феноменологических соображений.

4. Формирование условий скольжения и адсорбционного слоя

Рассмотрим классический слой Кнудсена. До поверхности дойдет приблизительно 38 процентов количества молекул, содержащихся на внешней границе. Именно такое количество будем рассматривать на границе нашего слоя. Лишь малая часть, обладающая малой

энергией, может адсорбироваться на поверхности. Количество зависит только от температуры. Большая часть молекул отразится, подойдя на расстояние равное радиусу взаимодействия молекулы газа и поверхности. Расстояние зависит от потенциала взаимодействия молекул. Эти молекулы вернутся на внешнюю границу. Время адсорбции основных составляющих воздуха, имеющих теплоту адсорбции 20 МДж/кмоль, при комнатной температуре составляет 10^{-10} с, а при температуре жидкого азота – 1с. Полученные в кинетической теории уравнения для макропараметров применимы внутри области, но около границы необходимо знание взаимодействия молекул потока с поверхностью. При неполной информации о взаимодействии ставят фиктивные граничные условия (условия скольжения), соответствующие границе слоя Кнудсена. Граничные условия для скорости и температуры (при постоянной плотности) служат граничными условиями для уравнений Навье – Стокса. Здесь предлагается разбить задачу на две. Для разреженного газа, по крайней мере, при небольших скоростях течения, предлагается рассматривать более тонкий слой, равный нескольким радиусам взаимодействия молекул. Длина свободного пробега слишком велика, взаимодействия молекул газа со стенкой происходят на существенно меньших расстояниях. Молекулы газа внутри тонкого слоя не сталкиваются, столкновения происходят с молекулами поверхности. Функция распределения на границе слоя определяется модифицированной функцией Чепмена – Энскога, с учетом изменения количества частиц. Процесс взаимодействия определяется потенциалами взаимодействия газа потока и молекул твердой поверхности, учитывается действие момента на структурированных поверхностях. Молекулы, движущиеся к стенке, необходимо разделить на три группы: молекулы с малой скоростью, которые в дальнейшем прилипают к стенке, молекулы со средней скоростью, которые отражаются от стенки, молекулы с высокой скоростью, которые проникают в стенку. Границы диапазонов определяются энергией аккомодации для конкретного газа и материала поверхности и скоростью налетающей молекулы.

При решении задачи необходимо помнить: потенциал взаимодействия зависит от межплоскостного расстояния между поверхностным слоем и предыдущим, которое зависит от ориентации кристаллографической поверхности. Во многих случаях расстояние увеличивается, что влечет изменение потенциала взаимодействия. Роль коллективных эффектов при этом снижается. Получив функцию распределения на границе слоя, необходимо решать уравнение Больцмана в слое от этой границы до границы слоя Кнудсена методом малого параметра с использованием функции Чепмена – Энскога. Это можно сделать в силу малого изменения функции распределения на длине свободного пробега. Можно попытаться исследовать процесс адсорбции газа поверхностью. Учет коллективных взаимодействий был впервые выполнен Ленгмюром. Для кристаллических металлов изменение потенциала при адсорбции считалось в предположении взаимодействия молекул ближайших соседей. В работе используется это же предположение с учетом момента.

Цель анализа – теоретическое исследование причин скольжения газа около поверхности.

Обычно при определении длины скольжения считается, что функция распределения на поверхности имеет вид

$$f_r = f_r(0, \xi_x, \xi_y > 0, \xi_z) = n_r \left(\frac{h_r}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-h_r} \xi^2$$

Формула написана в предположении, что вертикальная и горизонтальная скорости равны нулю. Здесь r для отраженных молекул,

$$h^{\pm} = \frac{m}{2kT^{\pm}}$$

При вычислении макропараметров на поверхности, например, количества частиц

$$n(0) = \int_{\xi_y > 0} f_i d\xi + \int_{\xi_y < 0} f_r d\xi = \frac{n(0)}{2} + \frac{n_r}{2} + o\left(\epsilon \frac{df_0}{dy}\right)$$

Представляется существенным разница функции распределения, так как для отраженных частиц вертикальная компонента скорости равна нулю при условии непротекания, для падающих частиц берется полная скорость. Аналогично для других макропараметров. Граничное условие для внутреннего разложения

$$n(0) = \int_{\xi_y > 0} \xi_y f_i d\xi + \int_{\xi_y < 0} \xi_y f_r d\xi = 0$$

При предположении отсутствия адсорбции и равенстве макроскорости на поверхности нулю в силу разницы скоростей возникает парадокс, который можно разрешить только при предположении о неподвижности газа около поверхности. Вероятности равновесной функции распределения на поверхности вправо и влево различаются по величине. Вследствие этого различается количество падающих частиц и вероятности движения вправо и влево. Количество падающих частиц определяется значениями [23]

$$v_{\Pi} = \frac{nv_S}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{\left(\frac{U_x}{v_S}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{U_x}{v_S} \left[1 + \Phi\left(\frac{U_x}{v_S}\right) \right] \right\}$$

$$v_{\Pi} = \frac{nv_S}{2\sqrt{\pi}} \left\{ e^{\left(\frac{U_x}{v_S}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{U_x}{v_S} \left[1 - \Phi\left(\frac{U_x}{v_S}\right) \right] \right\}$$

Здесь следующие обозначения: v_{Π} – число падающих молекул газа; v_S – наиболее вероятная скорость молекул газа. Разность значений вероятностей приводит к вероятности направленного движения вдоль внутренней границы. Кроме того, при взаимодействии возникают две различных силы: одна вдоль поверхности, вторая по вертикали к поверхности. Параметры решетки алюминия 4.050 Å. В обычных условиях, взаимодействуя с кислородом воздуха, алюминий покрыт тонкой ($2 \div 10^{-5}$ см) пленкой. Осциллирующие изменения межплоскостного расстояния у поверхности порядка или меньше 10 процентов (зависит от температуры и грани: рыхлая или плотноупакованная). Например, известно, что для вольфрама при комнатной температуре среднее квадратичное смещение атома из равновесного положения $\sigma < 0.1$ Å.

Движение фононов не должно влиять на процессы адсорбции, кроме случая длинноволновых фононов, так как сдвиг атомов поверхности равен $0.1 \div 0.5$ Å. Для неупругого взаимодействия газа и фотонов часть энергии газа уходит на возбуждение фононов по перпендикулярному к поверхности направлению, что соответствует процессу диссипации потока. Создание леса не позволяет взаимодействовать газу и фононов. Кроме того, уменьшается контакт с твердым телом. Однако процессы рассеяния атомов и молекул происходит по-разному при малых и больших неровностях и зависит от высоты шероховатости, поскольку меняется вклад момента. Усиливают эффект проскальзывания момент, возникающий вследствие разности вертикальных и горизонтальных сил. Момент создает силу, действующую вверх или вниз. Момент участвует при росте леса.

Например, рассмотрим ступеньку

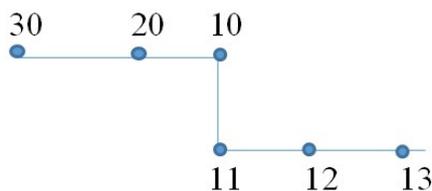


Рис. 1.

Расстояние между молекулами обозначим за единицу. Тогда получим, что сила между молекулами (10,12) равна $F_{ix}(\sqrt{2})$, (10,13) = $F_{ix}(\sqrt{5})$; между молекулами (20,10) = $F_{ix}(1)$, $F_{ix}(2)$, Суммарные силы справа и слева будут отличаться, возникнет момент – соответствующая сила, которая будет тянуть вверх, если ступенька идет вниз. Для ступеньки вверх сила потя-

нет вниз. Зависимость от температуры отвечает за расстояние приближения молекулы к поверхности. Таким образом, при изучении поверхностных эффектов важная роль должна отводиться моменту и коллективным эффектам.

5. Механика сплошной среды. Потенциальное течение и уравнения Эйлера

Рассмотрим плоское потенциальное течение и сравним уравнения Эйлера и уравнения потенциального течения. Для потенциального течения имеются следующие уравнения (φ – потенциал, Ψ – функция тока)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \\ u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера в новых переменных

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Запишем через функцию тока

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

Мы имеем другие уравнения и другие граничные условия. Отсюда можно сделать вывод, что потенциальное течение использует различные значения давления по разным направлениям.

6. Теория упругости

6.1. Балки [24–26]

Рассмотрим элементарный участок стержня длиной dx в состоянии до деформации и в состоянии после его деформации (рис. 2). Выделенного элемента стержня условия равновесия в моментах и в проекциях на ось Y приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} dM - Q dx - m dx - N dv &= 0, \\ dQ + q dx &= 0, \quad \text{или} \\ M' - Q - m - N v' &= 0, \quad Q' + q = 0 \end{aligned}$$

В классическом варианте

$$-M'' = q - m' - (Nv)';$$

с учетом момента

$$-M'' = q - m' - ((Nv)')'$$

В данном варианте решения будут совпадать, но для балки, лежащей на фундаменте, решения отличаются.

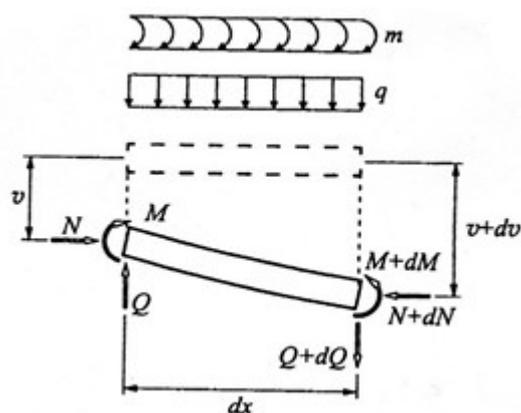


Рис. 2. Элементарный участок стержня

В случае передачи силового воздействия P (рис. 3) на стержень с помощью жесткого рычага длины l , способного поворачиваться вокруг концевых шарниров, имеем

$$H = \frac{P}{\cos \alpha}$$

H – нормальная сила.

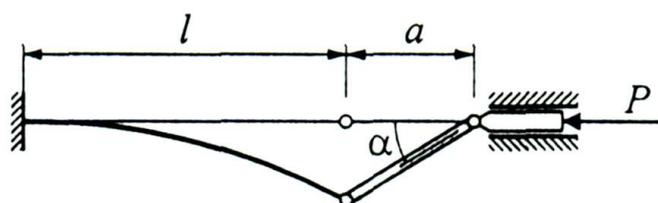


Рис. 3. Элементарный участок стержня

На конце деформируемой части стержня поперечная сила

$$Q = H \sin \alpha = N \operatorname{tg} \alpha \text{ поскольку } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v(l)}{a},$$

$$EIv''(l) + N \left[v'(l) + \frac{v(l)}{a} \right] = 0.$$

Поэтому граничное условие

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_4 = 0,$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_2 + k C_3 = 0,$$

$$M(l) = 0 \Rightarrow v''(l) = 0 \Rightarrow C_3 \sin v + C_4 \cos v = 0.$$

$$v''(l) + k^2 v'(l) + \frac{k^2 v(l)}{a} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2(l+a) + C_3 \sin v + C_4 \cos v = 0.$$

$$\text{Теперь } EIv''(l) + (Nv)' + \frac{P}{\cos \alpha} \frac{v(l)}{a} = 0.$$

Решение этого уравнения отличается от решения классического уравнения, и явно появляется дополнительная сила, которая может быть причиной неустойчивости.

6.2. Сосредоточенная сила

В качестве примера рассматривается задача о сосредоточенной силе F на полупространство в произвольной точке с координатами x, z (рис. 4)

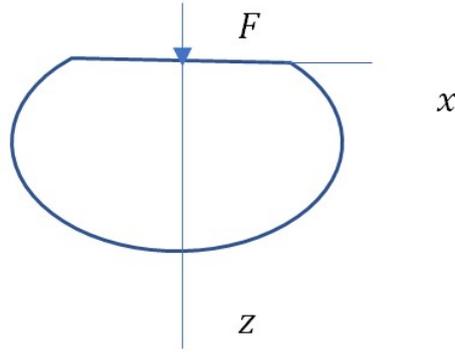


Рис. 4. Постановка задачи

Рассмотрим задачу, когда задана на полуплоскости сосредоточенная сила. Найдем распределения напряжений с учетом и без учета влияния момента (рис. 5).

Общий вид уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= 0, \\ x \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) - z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} - \sigma_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

Предположим, что $\tau_{zx} = -A \frac{x}{x^2 + z^2}$, вариант для случая $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и $\sigma_z = -A \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}$ рассмотрен в [26]. Вначале решим задачу при выполнении условия симметрии тензора напряжений $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= -A \frac{2xz}{(x^2 + z^2)^2}, \\ \sigma_x &= -2Az \int_0^x \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^2} - Az \int_0^y \frac{dy}{(y + z^2)^2} = Az \frac{1}{(z^2 + y)} + f(z), \\ \sigma_x &= Az \frac{1}{(z^2 + x^2)} + f(z). \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} &= -A \left(\frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + z^2)^2} \right) = -A \left(-\frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2} \right). \\ \sigma_z &= -A \int_0^z \left(\frac{1}{x^2 + z^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + z^2)^2} \right) dz = -A \frac{1}{x} \operatorname{arctg} z - A \left(\frac{1}{x} \frac{z}{1 + (z)^2} + \frac{1}{x} \operatorname{arctg} z \right) \\ &= -A \frac{1}{x} \frac{z}{1 + (z)^2} + f(x) \end{aligned}$$

Пусть σ_x и σ_{zx} останутся прежними. Тогда из уравнения для моментов можно определить разность новое значение σ_{xz}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{x} \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0, \\ x \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \sigma_{zx} - \sigma_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

После чего определяется новое значение σ_z ($\sigma_z = \sigma_{zz}$). Пример дан для того, чтобы продемонстрировать множество возможных решений в двумерном случае. Следовательно, решение двумерной задачи при условии симметрии тензора напряжений есть только один из

вариантов решения задачи. Алгоритм поиска напряжений с несимметричным тензором легко программируется с использованием полученных ранее результатов. Ранее несимметричность тензора напряжений доказывалась в работах, исходя из обобщения теоремы Остроградского-Гаусса для механики сплошной среды. Предложенное исследование дополняет ранее полученные результаты. Таким образом, условие симметрии тензора напряжений является одним из возможных условий замыкания системы уравнений теории упругости. Для структурных частиц, кроме системы внутренних моментов действуют моменты, связанные с действием градиентов напряжений, и они должны быть учтены.

6.3. Проблема Прандтля

Рассмотрим плоскую задачу Прандтля. Рассмотрим условия существования плоского режима деформации балки.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - y \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \right) \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = k,$$

$$\sigma_{yx} = k_1 y, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = k - k_1 = k_2, \quad \sigma_{xx} = k_2 x + \varphi(y), \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(x \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) - y k \right\} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + x \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

$$\sigma_{yy} = f(x), \quad k_2 + k_1 - k = 0$$

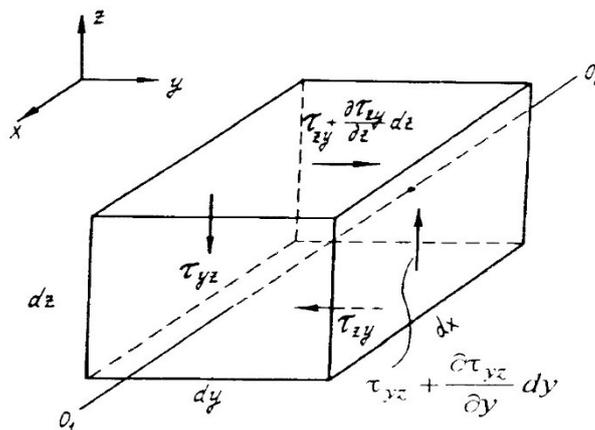


Рис. 5. Элемент объема

При больших градиентах второе слагаемое существенно. Как и для классической задачи Прандтля имеем решение для продольной и поперечной скоростей

$$u = -ax \pm ah \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2} + C_1, \quad v = ay, \quad C_1 = \text{const}$$

Влияние момента для равновесного состояния не прослеживается. Если есть нагрузка или момент, зависящие от y , симметрия нарушается.

7. Заключение

Анализируется расширение области применимости теоремы Остроградского – Гаусса на случай вращения элементарного объема. Обсуждается роль использования теоремы Остроградского – Гаусса для фиксированного объема с игнорированием циркуляции скорости по поверхности выбранного объема и причины появления несимметричного тензора напряжений. Отсутствие симметричного тензора приводит к существованию двух решений. Приведены примеры решения задач гидромеханики, теории упругости. Установлено соответствие между членами уравнения Лиувилля с более общими и традиционными силами. Ранее рассматривались задачи пограничного слоя, струйные задачи и простейшие задачи теории упругости и кинетической теории. В статье предлагается метод нахождения второго решения. Предложена новая модель скольжения для разреженного газа и адсорбции газа на кристаллической металлической поверхности. Обсуждаются новые модели механики сплошных сред и кинетики. Для проверки предложенной модели необходимы дополнительные экспериментальные и теоретические исследования.

Литература

1. Климонтович Ю. Л. Статистическая теория открытых систем. Т. 1. М.: Ленард. 2019. 624 с.
2. Prozorova E. On the question of the no symmetry of the stress tensor for open systems // MATEC. Web of Conferences серии Conference Proceedings по итогам проведения XXII Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021).
<https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2022/09/contents/contents.html>
3. Прозорова Э.В. Роль определения давления на вычислительный процесс. Казанский (Приволжский) федеральный университет. Материалы докладов. Всероссийская научная конференция с международным участием «Актуальные проблемы механики сплошной среды – 2020». С. 361–366.
4. Prozorova E. V. Features of the rarefied gas description in terms of a distribution function // APhM2018. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1250 (2019) 012023. IOP Publishing. doi:10.1088/17426596/1250/1/012023
5. Prozorova Evelina. The Law of Conservation of Momentum and the Contribution of No Potential Forces to the Equations for Continuum Mechanics and Kinetics // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2022. 10, <https://www.scirp.org/journal/jamp> ISSN Online: 2327-4379 ISSN Print: 2327-4356.
6. Prozorova Evelina. The Effect of Angular Momentum and Ostrogradsky – Gauss Theorem in the Equations of Mechanics // WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, ISSN / E-ISSN: 1790-5087 / 2224-347X, Volume 15, 2020, Art. #2, pp. 13-22. DOI: 10.37394/232013.2020.15.2
7. Белоцерковский О. М., Опарин А. М., Чечеткин В. М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука. 2003. 286 с.
8. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М: Гостехиздат. 1946. 146 с.
9. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука. 1967. 440 с.
10. Гуров К.П. Основания кинетической теории. М.: Наука. 1966. 350 с.
11. Balescu R. Equilibrium and nonequilibrium statistic mechanics. A Wiley-Intersciences Publication John Willey and Sons. New-York-London. 1975. 406 p.
12. Гудман Ф., Вахман Г. Динамика рассеяния газа поверхностью. М.: Мир. 1986. 424 с.
13. Дмитриев А.С. Введение в нанотеплофизику. М.: Бином. 2021. 790 с.
14. Владимиров Г.Г. Физика поверхности твердых тел. СПб.: Лань. 2016. 352 с.

15. Полянская А.В., Полянский А.М., Полянский В.А. Связь явлений переноса с характеристиками кластерной структуры воды // Журнал технической физики, 2019, том 89. вып. 6. С. 14–20.
16. Владимиров Г.Г. Физическая Электроника. Эмиссия и взаимодействие частиц с твердым телом. СПб. Лань. 2013. 368 с.
17. Мелихов И.В. Физико-химическая Эволюция твердого вещества. М.: Бином. 2018. 309 с.
18. Панфилов М.Б. Физико-химическая гидродинамика пористых сред. С приложениями к геонаукам и нефтяной инженерии. Пер. с англ. Учебное пособие. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект». 2020. 464 с.
19. Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шунлерюк М.М. Избранные задачи Гамильтоновой механики. М.: Ленард. 2015. 304 с.
20. Prozorova Evelina. The Role of the Angular Momentum in Shaping Collective Effects. 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. Ed. By: Christos H. Skiadas, Yiannis Dimotikalis. Springer Proceedings in Complexity (SPCOM). Pp. 347–360.
<https://media.springernature.com/w600/springer-static/cover-hires/book/978-3-030-96964-6>
21. Валландер С.В. Уравнения движения вязкого газа // Докл. АН СССР. 1951. т. 78(1). С. 25–27.
22. Валландер С.В., Еловских М.П. Теоретическая зависимость коэффициентов теплопроводности газов от температуры // Доклады АН СССР. 1951. т. 79(1). С. 37–40.
23. Девиен М. Течения и теплообмен разреженных газов. М.: Изд. Иностранной литературы. 1962. 187 с.
24. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит. 2003. 702 с.
25. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том.1. М.: Склад Софт. 2009. 804 с.
26. Буланов Э.А. Моментные напряжения в механике твердого, сыпучего и жидкого тела. М.: Вузовская книга. 2012. 140 с.

References

1. Klimontovich Yu. L., *Statistical theory of open systems*, vol. 1, М.: Lenard, 2019, 624 p. [in Russian].
2. Prozorova E., *On the question of the no symmetry of the stress tensor for open systems*, MATEC. Web of Conferences, series of Conference Proceedings of the XXII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Program Systems (VMSPPS'2021).
<https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2022/09/contents/contents.html>
3. Prozorova E. V., *Role of pressure determination on computational process*, Kazan (Volga Region) Federal University. Materials of reports. All-Russian scientific conference with international participation "Actual problems of continuum mechanics – 2020", pp. 361–366. [in Russian].
4. Prozorova E. V., Features of the rarefied gas description in terms of a distribution function, APhM2018. IOP Conf. Series: *Journal of Physics: Conf. Series* 1250 (2019) 012023. IOP Publishing. doi:10.1088/17426596/1250/1/012023
5. Prozorova Evelina, The Law of Conservation of Momentum and the Contribution of No Potential Forces to the Equations for Continuum Mechanics and Kinetics, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2022, vol. 10, no. 6. DOI: 10.4236/jamp.2022.106143
6. Prozorova Evelina, The Effect of Angular Momentum and Ostrogradsky – Gauss Theorem in the Equations of Mechanics, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, ISSN / E-ISSN: 1790-5087 / 2224-347X, vol. 15, 2020, Art. #2, pp. 13–22. DOI: 10.37394/232013.2020.15.2
7. Belotserkovsky O. M., Oparin A. M., Chechetkin V. M., *Turbulence: New Approaches*, М.: Nauka, 2003, 286 p. [in Russian].
8. Bogolyubov N. N., *Problems of dynamical theory in statistical physics*, М.: Gostekhizdat, 1946, 146 p. [in Russian].
9. Kogan M. N., *Dynamics of a rarefied gas*, М.: Nauka, 1967, 440 p. [in Russian].

10. Gurov K. P., *Foundations of Kinetic Theory*, M.: Nauka, 1966, 350 p. [in Russian].
11. Balescu R., *Equilibrium and nonequilibrium statistic mechanics*, A Wiley-Intersciences Publication John Willey and Sons. New-York-London, 1975, 406 p.
12. Goodman F., Wachman G., *Dynamics of gas scattering by a surface*, M.: Mir, 1986, 424 p. [in Russian].
13. Dmitriev A. S., *Introduction to Nanothermal Physics*, M.: Binom, 2021, 790 p. [in Russian].
14. Vladimirov G. G., *Physics of the surface of solid bodies*, SPb.: Lan', 2016, 352 p. [in Russian].
15. Polyanskaya A. V., Polyansky A. M., Polyansky V. A., Relation of transport phenomena with the characteristics of the cluster structure of water, *Technical Physics*, 2019, vol. 64, no. 6, pp. 902–908. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106378421906015X>
16. Vladimirov G. G., *Physical Electronics. Emission and interaction of particles with a solid body*, SPb. Lan', 2013, 368 p. [in Russian].
17. Melikhov I. V., *Physico-chemical Evolution of Solid Matter*, M.: Binom, 2018, 309 p. [in Russian].
18. Panfilov M. B., *Physico-chemical hydrodynamics of porous media. With Applications to Geosciences and Petroleum Engineering*, Trans. of Engl. Manual. Dolgoprudny: Publishing House "Intellect", 2020, 464 p. [in Russian].
19. Zhuravlev V. F., Petrov A. G., Shunleriuk M. M., *Selected Problems of Hamiltonian Mechanics*, M.: Lenard, 2015, 304 p. [in Russian].
20. Prozorova Evelina, *The Role of the Angular Momentum in Shaping Collective Effects*. 14th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. Ed. By: Christos H. Skiadas, Yiannis Dimotikalis. Springer Proceedings in Complexity (SPCOM), pp. 347–360.
21. Wallander S. V., Equations of motion of viscous gas, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1951, vol. 78, no. 1, pp. 25–27. [in Russian].
22. Wallander S. V., Elovskikh M. P., Theoretical dependence of the heat transfer coefficients of gases on temperature, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1951, vol. 79, no. 1, pp. 37–40. [in Russian].
23. Devien M., *Currents and heat exchange of rarefied gases*, M.: Pub. Houes of Foreign Literature, 1962, 187 p. [in Russian].
24. Ishlinsky A. Y., Ivlev D. D., *Mathematical Theory of Plasticity*, M.: Fizmatlit, 2003, 702 p. [in Russian].
25. Perelmuter A. V., Slivker V.I., *Stability of Equilibrium of Structures and Related Problems*, vol. 1. M.: Scad Soft, 2009, 804 p. [in Russian].
26. Bulanov E. A., *Moment stresses in mechanics of solid, bulk and liquid bodies*, M.: Vuzovskaya kniga, 2012, 140 p. [in Russian].

Статья поступила в редакцию 18 мая 2023 г.