

# Properties of potential nonlinear Lambert surface waves

A. A. Ochirov, K. Yu. Lapshina

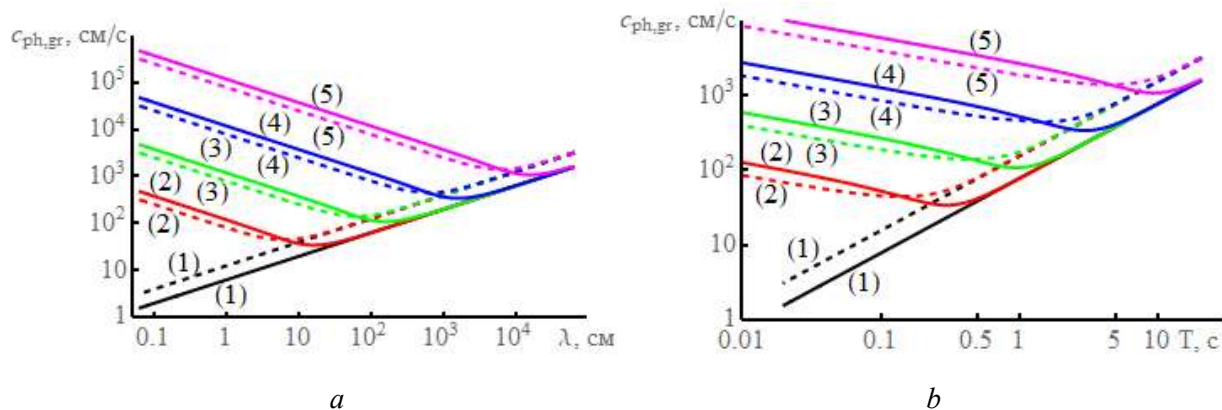
<sup>1</sup>*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, 119526, Russia*

ochir@ipmnet.ru

## Abstract

The paper explores potential surface gravity waves in an ideal fluid described by Lambert W functions. The shape of the undisturbed free surface is examined, depending on the magnitude of the wave. Characteristics of the deformed surface are derived. The influence of the wave amplitude on the dispersion characteristics, as well as on the group and phase velocities, is investigated.

Keywords: Lambert W-function, potential flow, surface waves, nonlinear waves, ideal liquid, wave characteristics.



The dependence of the phase (dashed lines) and group (solid lines) velocities of gravitational waves (1) without taking into account the influence of amplitude, (2) for a wave with amplitude  $\zeta_0 = 1$  cm, (3) for a wave with amplitude  $\zeta_0 = 10$  cm, (4) for a wave with amplitude  $\zeta_0 = 100$  cm, (5) for a wave with amplitude  $\zeta_0 = 1000$  cm (a) from the wavelength and (b) from the period of wave motion

УДК532.5.031

# Свойства потенциальных нелинейных поверхностных волн Ламберта

А. А. Очиров, К. Ю. Лапшина

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1  
ochir@ipmnet.ru*

## Аннотация

В работе исследуются потенциальные поверхностные гравитационные нелинейные волны в идеальной жидкости, описываемые  $W$ -функциями Ламберта. Анализируется форма свободной поверхности в зависимости от амплитуды волны. Получены характеристики формы возмущенной поверхности. Исследовано влияние амплитуды волны на дисперсионные характеристики, а также на групповую и фазовую скорости.

Ключевые слова:  $W$ -функция Ламберта, потенциальное течение, поверхностные волны, нелинейные волны, идеальная жидкость, характеристики волн.

## 1. Введение

Поверхностные волны являются объектом экспериментального и теоретического исследования на протяжении многих веков. Существует несколько подходов к решению задачи об определении формы свободной поверхности (или раздела двух жидких сред) при распространении вдоль нее периодических течений. Серьезное развитие получила теория асимптотических аналитических приближений для инфинитезимальных волн, в которой возмущение представляется в виде суперпозиции гармонических функций разных гармоник [1]. Другой подход заключается в поиске точных решений нелинейной задачи в различных постановках [2–5]. Форма возмущенной поверхности и ее характеристики исследуются как теоретически, так и экспериментально [5–7]. Знание формы поверхности жидкости необходимо для проведения инженерных и конструкторских расчетов при проектировании разнообразных гидротехнических сооружений и плавательных средств [8–11]. Знание формы волны позволяет рассчитать траекторию частиц [12–14], что может быть использовано при расчетах переноса вещества и энергии волны [15–16], а также взвешенных частиц и загрязнений в океане [17–18]. Использование асимптотических аналитических подходов позволяет получать решения в общих постановках задачи, но накладывает ограничения, связанные с границами применимости методов. Как правило, в таких случаях исследователи ограничиваются волнами малых амплитуд по сравнению с длиной. Точные решения нелинейных задач о распространении волн позволяют обойти эти ограничения, но класс задач, имеющих точные решения, ограничен и описывает только специфичные случаи. В настоящей работе исследуются некоторые характеристики свободной поверхности, описываемой  $W$ -функцией Ламберта [19–20]. Такое описание становится возможным если производить частичную линеаризацию задачи [21], при этом не используется приближение волн малой амплитуды.

## 2. Постановки задачи

### 2.1. Математическая формулировка задачи и решение

Рассматривается распространение гравитационных поверхностных потенциальных волн в неограниченной полубесконечной идеальной жидкости с постоянной плотностью  $\rho$  в двумерной постановке в декартовой системе координат  $Oxz$ . Ось  $Ox$  направлена таким образом, чтобы совпадать с направлением распространения волнового движения, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх противоположно направлению с вектором ускорения свободного падения  $\mathbf{g} = (0, -g)$ . Уровень  $z = 0$  соответствует равносному положению свободной поверхности. Отклонение свободной поверхности с амплитудой  $\zeta_0$  от равносного положения обозначим  $\zeta(x, \zeta_0, t)$ . Задачи такого класса помимо лабораторной системы координат  $Oxz$  дополнительно рассматриваются в движущейся вместе с жидкостью системе координат  $O\xi z$ . Связь между горизонтальными координатами и их производными в лабораторной и в движущейся системах координат с использованием скорости распространения волны  $c$  и времени  $t$  для волн, распространяющихся в положительном направлении выражается следующим образом:

$$\xi = x - c_{ph}t \quad (1)$$

В движущейся системе координат отклонение свободной поверхности не зависит от времени и является только функцией горизонтальной координаты и амплитуды  $\zeta(\xi, \zeta_0)$ , а производные по пространственным и временным координатам связаны соотношениями

$$\partial_z f = \partial_z f, \quad \partial_x f = \partial_\xi f, \quad \partial_t f = -c_{ph} \partial_\xi f \quad (1)$$

Математическая формулировка задачи в простейшем случае состоит из уравнений переноса импульса для идеальной однородной жидкости, уравнения неразрывности, условия затухания движения с глубиной и стандартных гидродинамических граничных условий на свободной поверхности. В двумерной постановке для однородной жидкости уравнение неразрывности сводится к уравнению несжимаемости, а скорость  $\mathbf{u}$  определяется через функцию тока  $\psi$

$$\mathbf{u} = (\partial_z \psi, -\partial_x \psi) = (\partial_z \psi, -\partial_\xi \psi) \quad (2)$$

В сделанных предположениях в лабораторной системе координат математическая формулировка записывается следующим образом:

$$z < \zeta : \begin{cases} \rho \partial_{tz} \psi + \rho (\partial_z \psi \partial_{xz} \psi - \partial_x \psi \partial_{zz} \psi) = -\partial_x P, \\ -\rho \partial_{tx} \psi + \rho (-\partial_z \psi \partial_{xx} \psi + \partial_x \psi \partial_{zx} \psi) = -\partial_z P - \rho g, \\ \Delta \psi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_z \psi \partial_x \zeta + \partial_x \psi = 0, \\ P = P_0 \end{cases} \quad (4)$$

$$z \rightarrow -\infty : \psi \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$P = P_0 + \rho g (\zeta - z) + \tilde{P}(x, z, t) \quad (6)$$

Давление жидкости (7)  $P$  складывается из атмосферного давления  $P_0$ , гидростатического и возмущения давления, связанного с распространением волны  $\tilde{P}$ .

В движущейся с волной системе координат основные уравнения задачи (4) переписываются следующим образом:

$$z < \zeta : \begin{cases} -\rho c \partial_{\xi z} \psi + \rho (\partial_z \psi \partial_{\xi z} \psi - \partial_{\xi} \psi \partial_{zz} \psi) = -\partial_{\xi} P, \\ \rho c_{ph} \partial_{\xi \xi} \psi + \rho (-\partial_z \psi \partial_{\xi \xi} \psi + \partial_{\xi} \psi \partial_{z \xi} \psi) = -\partial_z P - \rho g, \\ \Delta \psi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя давление (7) в уравнения (8) запишем:

$$z < \zeta : \begin{cases} -\rho c_{ph} \partial_{\xi z} \psi + \rho (\partial_z \psi \partial_{\xi z} \psi - \partial_{\xi} \psi \partial_{zz} \psi) + \rho g \partial_{\xi} \zeta = -\partial_{\xi} \tilde{P}, \\ \rho c_{ph} \partial_{\xi \xi} \psi + \rho (-\partial_z \psi \partial_{\xi \xi} \psi + \partial_{\xi} \psi \partial_{z \xi} \psi) = -\partial_z \tilde{P}, \\ \Delta \psi = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Из динамического граничного условия (5) с учетом (7) следует, что динамическая добавка к давлению  $\tilde{P}$  на поверхности принимает нулевое значение. Производная по горизонтальной координате от динамической добавки к давлению выражается из горизонтальной компоненты уравнения Эйлера (9). Следовательно, левая часть верхнего уравнения в (9) на свободной поверхности также принимает нулевое значение

$$z = \zeta : -\rho c_{ph} \partial_{\xi z} \psi + \rho (\partial_z \psi \partial_{\xi z} \psi - \partial_{\xi} \psi \partial_{zz} \psi) + \rho g \partial_{\xi} \zeta = 0 \quad (9)$$

Заметим, что выражение в скобках в (10) с учетом уравнения Лапласа (9) можно преобразовать следующим образом:

$$\partial_z \psi \partial_{\xi z} \psi - \partial_{\xi} \psi \partial_{zz} \psi = \partial_z \psi \partial_{\xi z} \psi + \partial_{\xi} \psi \partial_{\xi \xi} \psi = \frac{1}{2} \partial_{\xi} \left[ (\partial_z \psi)^2 + (\partial_{\xi} \psi)^2 \right] \quad (10)$$

Кинематическое граничное условие (5) в движущейся системе координат запишется следующим образом:

$$z = \zeta : -c_{ph} \partial_{\xi} \zeta + \partial_z \psi \partial_{\xi} \zeta + \partial_{\xi} \psi = 0 \quad (11)$$

Используем линейное приближение (12) и с учетом (11) запишем граничные условия (10), (12) в виде производной по горизонтальной координате

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_{\xi} (\psi - c_{ph} \zeta) = 0, \\ \partial_{\xi} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (\partial_{\xi} \psi)^2 + (\partial_z \psi)^2 \right] - c_{ph} \partial_z \psi + g \zeta \right\} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Формальная запись условия затухания движения (6) в движущейся системе координат не меняется. Решение для затухающих периодических движений ищется в виде пакета бегущих волн вида

$$\psi(\xi, z) = \int_0^{\infty} \exp[k(z - \zeta(\xi))] \phi(k, \xi) dk \quad (13)$$

Здесь  $k$  – волновое число, а функция  $\phi(k, \xi)$  подлежит определению в процессе решения.

## 2.2. Решение задачи

Задача (9), (13) с функцией тока вида (14) впервые была рассмотрена в работе [21]. Опуская математические выкладки, запишем решение для функции, описывающей отклонение свободной поверхности от равновесного значения  $\zeta(\xi, \zeta_0)$ , функции тока  $\psi(\xi, z)$  и давления  $P$

$$\begin{aligned}\zeta_{\pm}(\xi, \zeta_0) &= -a_{\pm} - \frac{1}{k} W[-k\zeta_0 \exp(\pm ik\xi)], \\ \psi_{\pm}(\xi, z) &= c_{ph}\zeta_0 \exp(ka_{\pm}) \exp(kz) \exp(\pm ik\xi), \\ P_{\pm}(\xi, z) &= P_0 - \rho g(z + a_{\pm}) + \rho c_{ph}^2 k \zeta_0 \exp(ka_{\pm}) \exp(kz) \exp(\pm ik\xi)\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь  $W(x)$  – W-функция Ламберта;  $a_{\pm}$  – константа, определяемая из условия неизменности среднего уровня жидкости, а нижними индексами «+» и «-» обозначены существующие независимо друг от друга решения. Решение (15) в пределе инфинитезимальных волн сводится к гармоническим функциям, а в случае волн конечной амплитуды приводится к классическому результату волн Стокса [1]. При этом для увеличения точности результата необходимо выполнить поправку для скорости волны с учетом ее зависимости от амплитуды [21]

$$c_{ph}^2 = \frac{g}{k} (1 + \varepsilon^2) \quad (15)$$

Здесь  $\varepsilon = k\zeta_0$  – параметр, характеризующий отношение амплитуды к длине волны.

Для анализа свойств и характеристик свободной поверхности необходимо составить действительную функцию из комбинаций комплексных функций Ламберта (15). Наиболее простой вид отклонения свободной поверхности определяется суперпозицией независимых решений:

$$\zeta(\xi, \zeta_0) = -a - \frac{1}{k} \left[ W\left(-\frac{k\zeta_0}{2} \exp(ik\xi)\right) + W\left(-\frac{k\zeta_0}{2} \exp(-ik\xi)\right) \right] \quad (16)$$

Константа  $a$  определяется из условия неизменности потенциальной энергии жидкости, связанной с положением среднего уровня

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\xi, \zeta_0) d\xi = 0 \quad (17)$$

Проанализируем некоторые характеристики возмущенной свободной поверхности. Использование выражения (17) с учетом (18) позволяет снять ограничения на амплитуду волны [21].

### 3. Характеристики волны Ламберта

Выполним построения формы поверхности (17) для волн различной амплитуды. Анализ показывает, что функции Ламберта описывают два типа волн, отличающихся друг от друга – волны с гладкими вершинами при малых амплитудах и волн с заостренными вершинами, которые возникают при превышении параметра  $\varepsilon$  критического значения  $\varepsilon_{cr} = 2/e \approx 0.736$ . На рис. 1 представлены профили свободной поверхности в переменных, обезразмеренных на волновое число  $k$  для (а) докритических амплитуд  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ , (б) около критических амплитуд  $\varepsilon \approx \varepsilon_{cr}$  и (в) закритических амплитуд  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ . Для удобства для некоторых волн на рисунке добавлены фазовые сдвиги.

Профиль волны при достижении критической амплитуды  $\varepsilon_{cr}$  качественно изменяется. Для малых амплитуд функция (17) непрерывна, однако, если выполняется условие  $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$  в вершине волны функция (17) теряет непрерывность и форма поверхности характеризуется разрывом функции  $\zeta$  в точке, соответствующей вершине волны. Для иллюстрации приведем зависимости значения функций  $\text{Re}(\zeta)$  и  $\text{Im}(\zeta)$  на вершине волны ( $\xi = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) от безразмерного параметра  $\varepsilon$  в переменных, обезразмеренных на волновое число  $k$  (рис. 2).

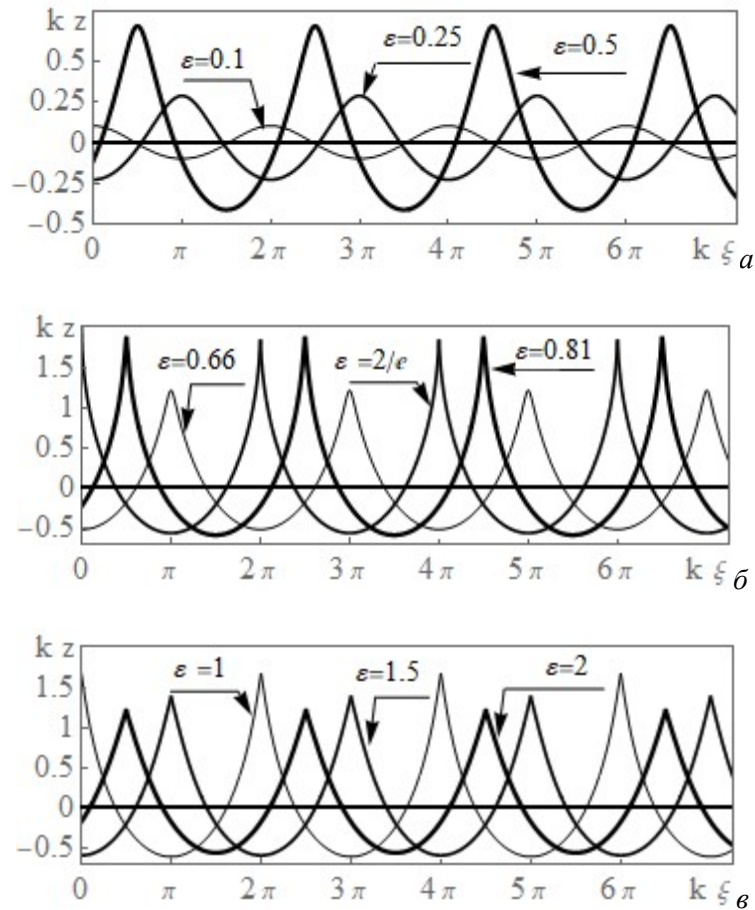


Рис. 1. Профиль свободной поверхности, возмущенной волнами Ламберта с (а) докритическими значениями амплитуд  $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.25, \varepsilon = 0.5$ ; (б) околокритическими значениями амплитуд  $\varepsilon = \varepsilon_{cr} - 0.1\varepsilon_{cr} \approx 0.66, \varepsilon = \varepsilon_{cr} = 2/e, \varepsilon = \varepsilon_{cr} + 0.1\varepsilon_{cr} \approx 0.81$  и (в) закритическими значениями амплитуд  $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1.5, \varepsilon = 2$

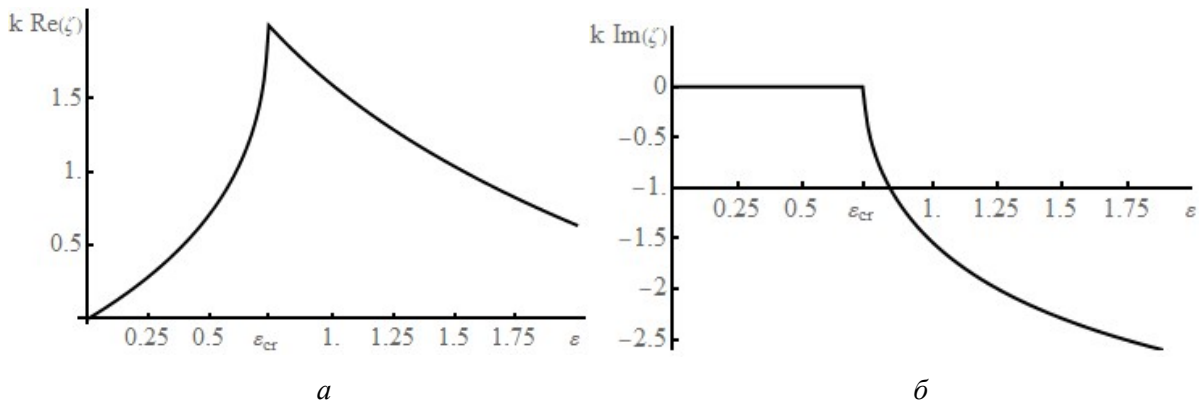


Рис. 2. Зависимость (а) действительной и (б) мнимой части функции, определяющей форму волны  $\zeta$  на вершине ( $\xi = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ) от безразмерного параметра

С превышением параметра  $\varepsilon$  критического значения в вершине волны наблюдается не только разрыв, но и вид функции (17) – она становится комплексно определенной. Стоит отметить, что разрыв функция претерпевает только в вершине волны, что отражается на форме поверхности – волны от гладких становятся заостренными с вытянутой ложбиной. Рассмотрим длительность волны под  $\lambda_-$  и над  $\lambda_+$  равновесным уровнем  $z = 0$ , нормированную на длину волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Обозначим символами  $\lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}/\lambda$  нормированные величины, а символом  $\Delta\lambda = \lambda_{\lambda-} - \lambda_{\lambda+}$  – разницу между относительными длительностями ложбины и

вершины волны. На рис. 3 изображены зависимости отнесенных к длине волны длительно-стей участков над равновесным уровнем, под ним и разницы между ними от параметра  $\varepsilon$ .

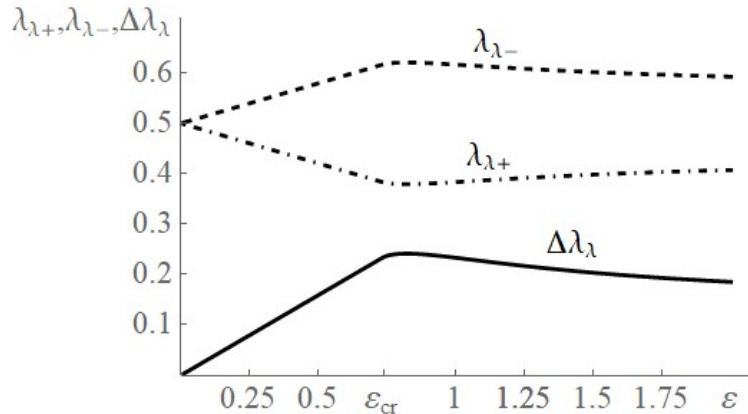


Рис. 3. Зависимость относительной длительности участка над равновесным уровнем  $\lambda_{\lambda+} = \lambda_+ / \lambda$ , под равновесным уровнем  $\lambda_{\lambda-} = \lambda_- / \lambda$  и их разницы  $\Delta\lambda_{\lambda} = \lambda_{\lambda-} - \lambda_{\lambda+}$

При докритических значениях амплитуды, когда вершина волны гладкая с ростом амплитуды происходит линейный рост длительности участка под равновесным уровнем и линейное уменьшение длительности участка над равновесным уровнем. Своих экстремальных значений длительности достигают при критическом значении амплитуды волны. При закритических значениях амплитуды с ее увеличением происходит более плавное обратное изменение длительностей. С увеличением амплитуды волны растет продолжительность участка над равновесным уровнем, но все равно остается меньше, чем длительность участка под ним. В этом смысле волны Ламберта являются распространяющимися впадинами, а не вершинами. Это может играть важную роль при взаимодействии волны с препятствиями, инженерными сооружениями или кораблями.

Обратим внимание на то, что фазовая скорость распространения волн Ламберта (16) зависит от амплитуды. Выразим из (16) зависимость групповой скорости  $c_{gr}$ , частоты  $\omega$  и периода  $T$  волнового движения.

$$\omega = \sqrt{gk(1 + \varepsilon^2)}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{gk(1 + \varepsilon^2)}}, c_{gr} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k(1 + \varepsilon^2)}} (1 + 3\varepsilon^2) \quad (18)$$

Построим дисперсионные зависимости длины волны  $\lambda = 2\pi/k$  от периода волнового движения  $T$  и частоты  $\omega$  от волнового числа  $k$  для волн Ламберта разных амплитуд и для сравнения приведем зависимость для классических гравитационных волн с дисперсионным соотношением, не зависящим от амплитуды волны. На рис. 4 представлены дисперсионные зависимости для волн с амплитудами  $\zeta_0 = 1000$  см,  $\zeta_0 = 100$  см,  $\zeta_0 = 10$  см, см и зависимость, в которой не учитывается влияние амплитуды.

Анализ показывает, что влияние амплитудной поправки тем заметнее, чем меньше длина волны. Это ожидаемый результат – с уменьшением длины волны при фиксированной амплитуде увеличивается параметр  $\varepsilon$  в соотношениях (16), (19). Для волн с длинами, значительно превышающими амплитуду, зависимость сводится к классической и амплитудные поправки не играют существенной роли. В классической модели (черная линия (1) на рис. 4) зависимость выглядит предельно просто – прямая линия в двойном логарифмическом масштабе.

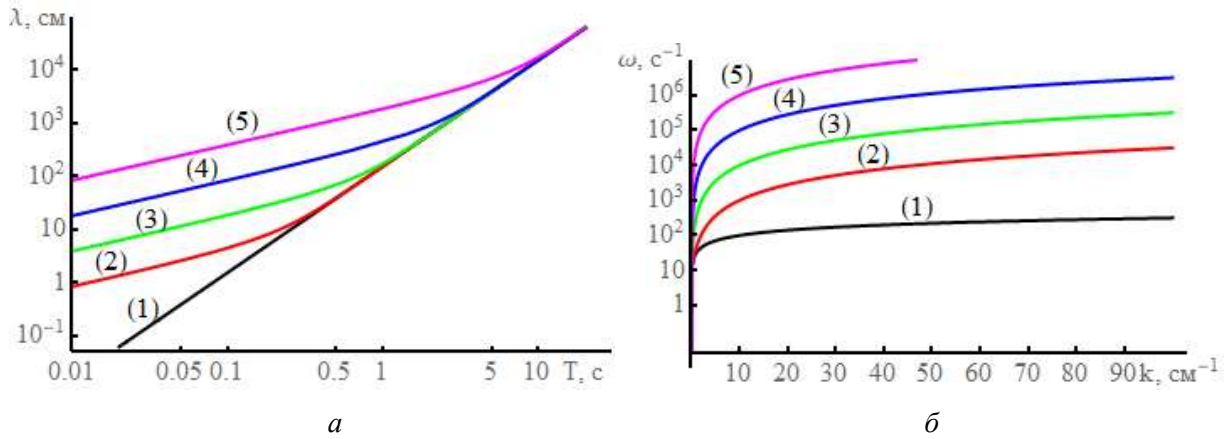


Рис. 4. Дисперсионные кривые для волн (1) без учета влияния амплитуды, (2) с амплитудой  $\zeta_0 = 1$  см, (3) с амплитудой  $\zeta_0 = 10$  см, (4) с амплитудой  $\zeta_0 = 100$  см, (5) с амплитудой  $\zeta_0 = 1000$  см (а) зависимость длины волны от периода волнового движения (б) зависимость частоты от волнового числа

Рассмотрим влияние амплитуды на фазовую и групповую (определяющую перенос энергии) скорость волн Ламберта. На рис. 5 представлены зависимости фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скоростей для волн Ламберта с амплитудами  $\zeta_0 = 1000$  см,  $\zeta_0 = 100$  см,  $\zeta_0 = 10$  см,  $\zeta_0 = 1$  см и классические зависимости для гравитационных волн (а) от длины волны, (б) от периода волны, (в) от частоты и (г) от волнового числа.

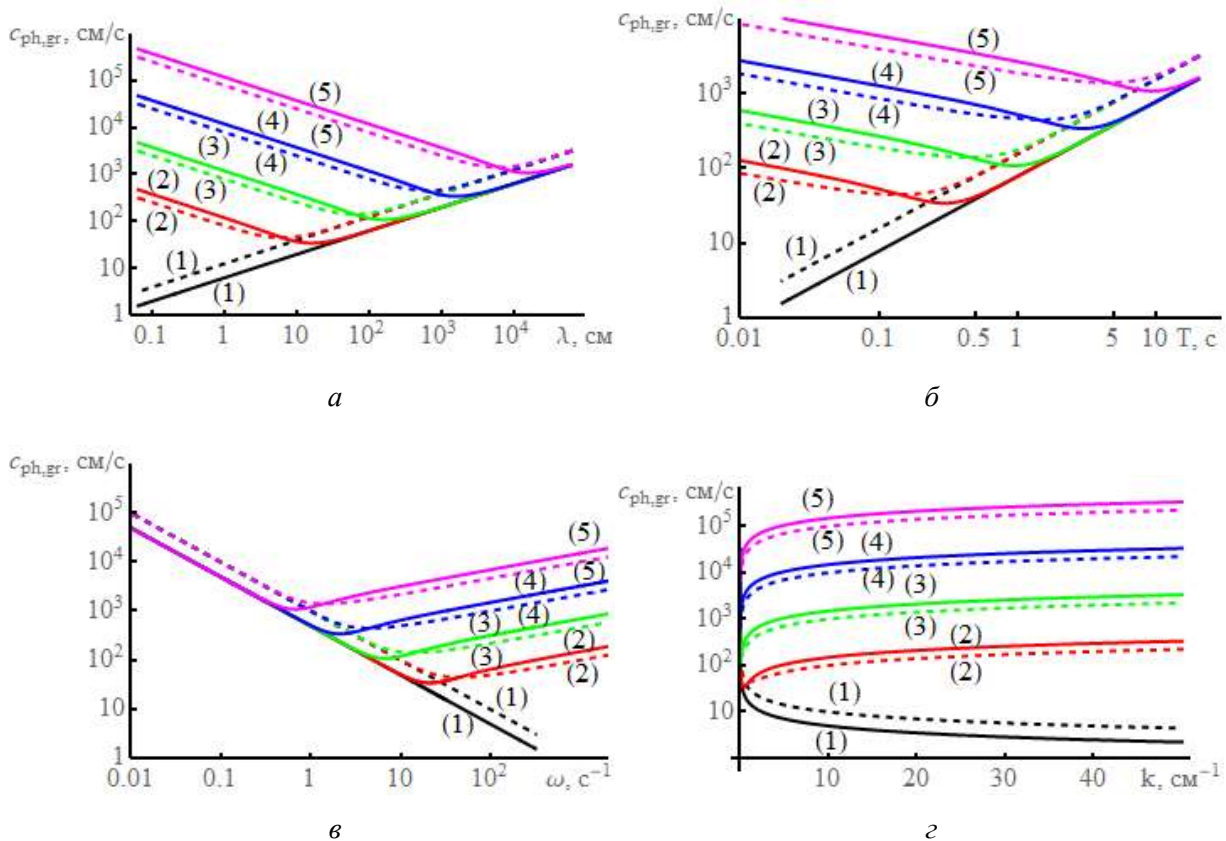


Рис. 5. Зависимость фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скорости гравитационных волн (1) без учета влияния амплитуды, (2) для волны с амплитудой  $\zeta_0 = 1$  см, (3) для волны с амплитудой  $\zeta_0 = 10$  см, (4) для волны с амплитудой  $\zeta_0 = 100$  см, (5) для волны с амплитудой  $\zeta_0 = 1000$  см (а) от длины волны, (б) от периода волнового движения, (в) от частоты и (г) от волнового числа



При длине волны порядка нескольких амплитуд и меньше групповая скорость превышает фазовую скорость гравитационных волн конечных амплитуд. Расчеты показывают, что при одинаковых значениях частоты (периода волны) скорость распространения волн с большими амплитудами выше и растет пропорционально увеличению амплитуды.

Полученные зависимости можно использовать в качестве оценки скорости распространения волн различных амплитуд в натуральных условиях. При этом предложены построения характеристик в зависимости от различных переменных, удобных для наблюдения экспериментаторам, в частности зависимости от длины и от периода волнового движения фиксируются проще чем, зависимости от частоты.

#### 4. Заключение

В настоящей работе проанализированы некоторые характеристики свободной поверхности нелинейных волн, полученных в частично линеаризованной постановке, в которой линеаризуется только кинематическое граничное условие на свободной поверхности. Решение впервые было получено в [21] находится в виде W-функций Ламберта. Исследовано влияние амплитуды на групповые и фазовые скорости волн и на дисперсионные характеристики. Волны конечной амплитуды обладают нелинейной дисперсией – существует расчетное минимальное значение групповой и фазовой скорости гравитационных волн, различающееся для волн разных амплитуд. Чем меньше амплитуда волны, тем меньшее минимальное значение скорости предсказывается расчетами. С увеличением амплитуды волны минимальное значение сдвигается в область более длинных волн. Существует критическое значение амплитуды гравитационной волны, при котором функция, описывающая форму поверхности, теряет непрерывность, и форма свободной поверхности перестает быть гладкой и принимает вид с заостренными вершинами. Полученные результаты сводятся к классическим результатам для инфинитезимальных волн и могут быть использованы без ограничений на амплитуду волны, что существенно расширяет класс задач, в которых возможно применение описанного решения.

#### Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

#### Литература

1. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. Pp. 441–455.
2. Gerstner F. J. Theorie de wellen // Abh. d. K. bohms Ges. Wiss. reprinted in Ann der Physik. 1802. Vol. 32. Pp. 412–440.
3. Rankine W.J.M. On the exact form of waves near the surface of deep water // Phil. Trans. R. Soc. 1863. Vol. 153. Pp. 127–138.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны М.: Мир. – 1977
5. Зейтунян Р. Х. Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // Успехи физических наук. 1995. Т. 165. № 12. С. 1403–1456.
6. Глявлин Р. М. Оценка технического состояния волногасящих сооружений инженерной защиты земляного полотна от волнового воздействия // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2020. Т. 17. № 2. С. 198–209.
7. Walker L. R. Interfacial solitary waves in a two-fluid medium // The Physics of Fluids. 1973. Vol. 16. No. 11. Pp. 1796–1804.
8. Leimeister M., Kolios A., Collu M. Critical review of floating support structures for offshore wind farm deployment // Journal of physics: Conference series. 2018. Vol. 1104. No. 1. P. 012007.
9. Windt C. et al. On the assessment of numerical wave makers in CFD simulations // Journal of Marine Science and Engineering. 2019. Vol. 7. No. 2. P. 47.

10. Bishop R. E. D., Price W. G. *Hydroelasticity of ships*. Cambridge University Press, 1979.
11. Newman J. N. Wave effects on deformable bodies // *Applied Ocean Research*. 1994. Vol. 16. No. 1. Pp. 47–59.
12. Ionescu-Kruse D. On the particle paths and the stagnation points in small-amplitude deep-water waves // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 15. Pp. 41–54.
13. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
14. Chang H. K., Chen Y. Y., Liou J. C. Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water // *Ocean Engineering*. 2009. Vol. 36. No. 5. Pp. 324–329.
15. Falnes J. A review of wave-energy extraction // *Marine Structures*. 2007. Vol. 20. No. 4. Pp. 185–201.
16. Очиров А. А., Лапшина К. Ю. Особенности волнового массопереноса в стратифицированных невязких океане и атмосфере // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т. 24, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1081/>
17. Röhrs J. et al. Wave-induced transport and vertical mixing of pelagic eggs and larvae // *Limnology and Oceanography*. 2014. Vol. 59. No. 4. Pp. 1213–1227.
18. Isobe A. et al. Selective transport of microplastics and mesoplastics by drifting in coastal waters // *Marine Pollution Bulletin*. 2014. Vol. 89. No. 1–2. Pp. 324–330.
19. Mezo I. *The Lambert W function: its generalizations and applications*. Chapman and Hall/CRC, 2022.
20. Veberič D. Lambert W function for applications in physics // *Computer Physics Communications*. 2012. Vol. 183. No. 12. Pp. 2622–2628.
21. Kistovich A. V., Chashechkin Y. D. Propagating stationary surface potential waves in a deep ideal fluid // *Water Resources*. 2018. Vol. 45. Pp. 719–727.

## References

1. Stokes G.G., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cam. Philos. Soc.*, 1847, vol. 8, pp. 441–455.
2. Gerstner F. J., Theorie de wellen, Abh. d. K. bohms Ges. Wiss. reprinted in *Ann der Physik*, 1802, vol. 32, pp. 412–440.
3. Rankine W. J. M., On the exact form of waves near the surface of deep water, *Phil. Trans. R. Soc.*, 1863, vol. 153, pp. 127–138.
4. Whitham G. B., *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, 2011.
5. Zeytounian R., Nonlinear long waves on water and solitons, *Physics-Uspekhi (Advances in Phys. Sci.)*, 1995, vol. 38, no. 12, pp. 1333–1381. DOI 10.1070/PU1995v038n12ABEH000124
6. Tlyavlin R. M., Assessment of the technical condition of wave canceling structures for engineering protection of roadbeds from wave exposure. *Proceedings of Petersburg Transport University*, 2020, vol. 17, iss. 2, pp. 198–209.
7. Walker L. R., Interfacial solitary waves in a two-fluid medium, *The Physics of Fluids*, 1973, vol. 16, no. 11, pp. 1796–1804, doi:10.1063/1.1694215
8. Leimeister M., Kolios A., Collu M., Critical review of floating support structures for offshore wind farm deployment, *Journal of physics: Conference series*, 2018, vol. 1104, no. 1, p. 012007.
9. Windt C. et al., On the assessment of numerical wave makers in CFD simulations, *Journal of Marine Science and Engineering*, 2019, vol. 7, no. 2, p. 47. <https://doi.org/10.3390/jmse7020047>
10. Bishop R. E. D., Price W. G., *Hydroelasticity of ships*, Cambridge University Press, 1979.
11. Newman J. N., Wave effects on deformable bodies, *Applied Ocean Research*, 1994, vol. 16, no. 1, pp. 47–59. [https://doi.org/10.1016/0141-1187\(94\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0141-1187(94)90013-2)

12. Ionescu-Kruse D., On the particle paths and the stagnation points in small-amplitude deep-water waves, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2013, vol. 15, pp. 41–54. DOI:10.1007/s00021-012-0102-5
13. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A., Lapshina K. Y., Surface waves along the interface of stably stratified liquids, *Technical Physics*, 2024. <https://doi.org/10.1134/S1063784224700439>
14. Chang H. K., Chen Y. Y., Liou J. C., Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water, *Ocean Engineering*, 2009, vol. 36, no. 5, pp. 324–329. DOI:10.1016/j.oceaneng.2008.12.007
15. Falnes J., A review of wave-energy extraction, *Marine Structures*, 2007, vol. 20, no. 4, pp. 185–201. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2007.09.001>
16. Ochirov A. A., Lapshina K. Y., Features of Wave Mass Transfer in Stratified Inviscid Ocean and Atmosphere, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, iss. 6. [in Russian] <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-6/articles/1081/>
17. Röhrs J., et al., Wave-induced transport and vertical mixing of pelagic eggs and larvae, *Limnology and oceanography*, 2014, vol. 59, no. 4, pp. 1213–1227. <https://doi.org/10.4319/lo.2014.59.4.1213>
18. Isobe A., et al., Selective transport of microplastics and mesoplastics by drifting in coastal waters, *Marine pollution bulletin*, 2014, vol. 89, no. 1–2, pp. 324–330. DOI:10.1016/j.marpolbul.2014.09.041
19. Mezo I., *The Lambert W function: its generalizations and applications*, Chapman and Hall/CRC, 2022.
20. Veberič D., Lambert W function for applications in physics, *Computer Physics Communications*, 2012, vol. 183, no. 12, pp. 2622–2628. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2012.07.008>
21. Kistovich A. V., Chashechkin Y. D., Propagating stationary surface potential waves in a deep ideal fluid, *Water Resources*, 2018, vol. 45, pp. 719–727. DOI:10.1134/S0097807818050111

Статья поступила в редакцию 18 июля 2024 г.