

# Features of Wave Mass Transfer in Stratified Inviscid Ocean and Atmosphere

A. A. Ochirov, K. Yu. Lapshina

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,*

*Moscow, 119526, Russia*

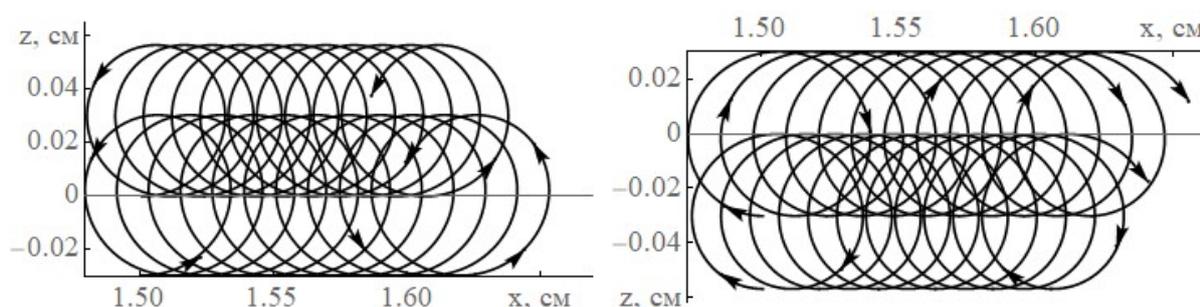
ochir@ipmnet.ru

## Abstract

A two-layer system of stratified inviscid liquids is considered in a two-dimensional formulation. The dispersion relations of surface waves propagating along the interface are determined. Expressions for the velocities of wave mass transfer (Stokes drift) in the upper and lower media are obtained. Expressions are obtained that allow the construction of trajectories of motion of liquid particles in both media. It is shown that in a stratified liquid, the drift velocity near the surface has a significantly lower value compared to the velocity arising in the homogeneous liquid model, but decays more slowly with depth. The obtained ratios uniformly converge to the known ratios in the model of homogeneous media.

Keywords: stratified fluid, ideal liquid, infinitesimal perturbations, Stokes drift, matter transfer, energy flow.

In the two-dimensional formulation in the model of uniformly stratified contacting immiscible liquids, expressions are obtained for the velocity of the Stokes drift initiated by the propagation of a surface periodic wave. Taking into account the drift velocity, the trajectories of individual liquid particles in the contacting layers are constructed. The analysis of the expressions obtained shows that the drift motion initiates the mixing of adjacent layers of liquid. In the stratified media model, the drift velocity near the surface is less than predicted by the homogeneous media model, but it decays more slowly with depth.



The momentum and energy fluxes average over the period of wave motion are constructed, taking into account the Stokes drift in both contacting liquid planes. The consideration is carried out on the example of media with water and air parameters

УДК 532.59

# Особенности волнового массопереноса в стратифицированных невязких океане и атмосфере

А. А. Очиров, К. Ю. Лапшина

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1*

ochir@ipmnet.ru

## Аннотация

В двумерной постановке рассмотрена двухслойная система стратифицированных невязких жидкостей. Определены дисперсионные соотношения поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела. Получены выражения для скоростей волнового массопереноса (дрейфа Стокса) в верхней и нижней среде. Получены выражения, позволяющие выполнить построение траекторий движения жидких частиц в обеих средах. Показано, что в стратифицированной жидкости скорость дрейфа вблизи поверхности имеет значительно меньшее значение по сравнению со скоростью, возникающей в модели однородной жидкости, но медленнее затухает с глубиной. Полученные соотношения равномерно сходятся к известным соотношениям в модели однородных сред.

Ключевые слова: стратифицированная жидкость, идеальная жидкость, инфинитезимальные возмущения, дрейф Стокса, перенос вещества, поток энергии

## 1. Введение

Периодические течения на поверхности жидкости интересуют исследователей с давних пор. Дж. Г. Стокс показал [1], что при распространении периодического возмущения вдоль поверхности жидкости формируется дрейфовое движение, которое впоследствии было названо его именем – дрейф Стокса. При выводе соотношений Дж. Г. Стокс использовал модель однородной жидкости, хотя и отмечал необходимость учета ее гетерогенности. С точки зрения развития исследований массопереноса, связанного с распространением поверхностных периодических движений большой вклад внес М. С. Лонге-Хиггинс. Именно его работы [2–3] стали катализатором для активного аналитического, численного и экспериментального изучения явления с точки зрения разнообразных приложений [4–9]. Внимание к дрейфовым движениям в жидкостях связано с академическими и прикладными приложениями в области биологии [10–11], экологии [12], геофизики [13–15] и многих других. В XXI веке исследователи стали обращать внимание не только на расчет профилей скорости, но и на траектории движения материальными частицами, составляющими жидкость [16–18]. Современные исследователи обращают внимание на тонкую структуру распределения вещества при периодических движениях во всплесках капель и струй [19–21]. В последние годы довольно активно исследуются поверхностные периодические течения в стратифицированных жидкостях [22–24]. В настоящей работе исследуется дрейфовое течение в двухслойной системе несмешивающихся контактирующих жидкостей, в которой верхняя среда менее плотная чем нижняя и обе жидкости считаются стратифицированными. Подробно рассматривается методика расчета траекторий индивидуальных жидких частиц, заметаемые в процессе распространения волнового поверхностного движения, инициирующего дрейф.

## 2. Математическая формулировка задачи

В качестве основы для математической формулировки задачи рассматривается фундаментальная система уравнений [25–26], которая включает в себя уравнение состояния для плотности, потенциала Гиббса и других термодинамических величин, уравнение переноса импульса, уравнение диффузии, уравнение теплопроводности и уравнение неразрывности. В настоящей работе рассматривается система из двух несмешивающихся невязких неограниченных жидкостей в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Расположим систему координат так, что вертикальная ось  $Oz$  направлена против направления действия сил тяжести  $\mathbf{g}$ , а плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесным положением поверхности раздела  $z = 0$ . Поверхностная энергия характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Будем считать, что плотности обеих жидкостей в равновесном состоянии стратифицированы и являются функциями от вертикальной координаты. Ставится задача о расчете дисперсионных соотношений поверхностных волн  $z = \zeta(x, t)$ , распространяющихся в положительном направлении оси  $Ox$  вдоль границы раздела сред в предположении независимости движения от горизонтальной координаты  $y$ . В качестве дополнительного упрощения будем рассматривать жидкости переменной плотности без учета действия физических факторов, обеспечивающих ее переменность, и вместо уравнения состояния зададим стратификацию плотности верхней и нижней жидкостей

$$\rho_a = \rho_{a00} [r_a(z) + s_a(x, z, t)], \quad \rho_w = \rho_{w00} [r_w(z) + s_w(x, z, t)] \quad (1)$$

Здесь и далее нижний индекс  $a$  соответствует верхней жидкости, а индекс  $w$  – нижней;  $\rho_{a00}$ ,  $\rho_{w00}$  – равновесное значение плотности соответствующей жидкости на границе раздела;  $r_a(z), r_w(z)$  – функции, определяющие стратификацию плотности в равновесном положении;  $s_a(x, z, t), s_w(x, z, t)$  – малые (по сравнению с равновесным значением) отклонения плотности, связанные с распространением периодического течения. Верхняя жидкость полагается менее плотной, чем нижняя  $\rho_a < \rho_w$ . В сделанных предположениях в модели изотермических океана и атмосферы и в отсутствии примесей фундаментальная система уравнений предельно редуцируется и принимает вид

$$\begin{cases} z > \zeta : \begin{cases} \partial_t \rho_a + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) = 0 \\ \rho_a \partial_t \mathbf{u}_a + \rho_a (\mathbf{u}_a \cdot \nabla) \mathbf{u}_a = -\nabla P_a + \rho_a \mathbf{g} \end{cases} \\ z < \zeta : \begin{cases} \partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) = 0 \\ \rho_w \partial_t \mathbf{u}_w + \rho_w (\mathbf{u}_w \cdot \nabla) \mathbf{u}_w = -\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g} \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{u}_a = (u_a, w_a)$ ,  $\mathbf{u}_w = (u_w, w_w)$  – поле скоростей;  $P_a, P_w$  – давление в соответствующей жидкости. Давление складывается из гидростатического и периодического  $P_a^p, P_w^p$  давления, возникающего из-за распространения возмущения вдоль границы раздела

$$P_a = \int_z^\zeta \rho_a(x, \xi, t) d\xi + P_a^p(x, z, t), \quad P_w = \int_z^\zeta \rho_w(x, \xi, t) d\xi + P_w^p(x, z, t) \quad (3)$$

Математическую формулировку задачи (1)–(3) необходимо дополнить стандартными гидродинамическими граничными условиями на границе раздела и условиями затухания движения с удалением от границы раздела

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u}_a \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \\ \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u}_w \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \\ P_w - P_a = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} \end{cases} \quad (3)$$

$$z \rightarrow -\infty : \mathbf{u}_w \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty : \mathbf{u}_a \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z-\zeta)}{|\nabla(z-\zeta)|} = \left( -\frac{\partial_x \zeta}{\sqrt{1+(\partial_x \zeta)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x \zeta)^2}} \right)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности раздела сред.

Решение задачи (1)–(5) будем искать в виде периодических течений, представляя искомые функции в виде зависимостей  $\propto \exp(ik_x x - i\omega t)$  с положительно определенной частотой волнового движения  $\omega > 0$ . В то же время мы полагаем, что волновой вектор  $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$  может быть комплексно определен. Использование алгебры комплексных чисел при решении задачи расширяет пространство решений и необходимо дополнительно указывать правила отбора физически реализуемых решений. Эти правила подробно будут описаны ниже при выборе корней дисперсионных соотношений. Рассмотрим задачу (1)–(5) в приближении Буссинеска: в этом приближении жидкость можно считать несжимаемой, а плотность является переменной только в слагаемых с ускорением свободного падения. Тогда в двумерной постановке для поверхностных периодических течений можно записать скорость с использованием функции тока  $\psi$

$$\psi_a = A_a \exp(-k_{az} z) \exp(ik_x x - i\omega t),$$

$$\psi_w = A_w \exp(k_{wz} z) \exp(ik_x x - i\omega t), \quad (5)$$

$$u_a = \partial_z \psi_a, \quad w_a = -\partial_x \psi_a, \quad (6)$$

$$u_w = \partial_z \psi_w, \quad w_w = -\partial_x \psi_w \quad (7)$$

С учетом вида решения (6), и выражений (7)–(8) после выполнения процедуры снесения граничных условий (4) на равновесную поверхность  $z = 0$  для инфинитезимальных возмущений границы раздела в линейном приближении по амплитуде периодического движения математическая формулировка задачи запишется следующим образом (индекс «1» обозначает величины первого порядка малости)

$$z > 0: \quad \rho_{a00} g \partial_x \zeta_1 + \rho_{a00} \partial_{zt} \psi_{a1} + \partial_x P_{a1}^p = 0, \quad (8)$$

$$\partial_z P_{a1}^p - \rho_{a00} \partial_{xt} \psi_{a1} = 0, \quad (9)$$

$$\rho_{a00} \partial_t s_{a1} + \rho_{a00} \frac{1}{\Lambda_a} \partial_x \psi_{a1} = 0; \quad (10)$$

$$z < 0: \quad \rho_{w00} g \partial_x \zeta_1 + \rho_{w00} \partial_{zt} \psi_{w1} + \partial_x P_{w1}^p = 0, \quad (11)$$

$$\partial_z P_{w1}^p - \rho_{w00} \partial_{xt} \psi_{w1} = 0, \quad (12)$$

$$\rho_{w00} \partial_t s_{w1} + \rho_{w00} \frac{1}{\Lambda_w} \partial_x \psi_{w1} = 0; \quad (13)$$

$$z = 0: \quad \partial_t \zeta_1 + \partial_x \psi_{a1} = 0, \quad (14)$$

$$\partial_t \zeta_1 + \partial_x \psi_{w1} = 0, \quad (15)$$

$$g \partial_x \zeta_1 (\rho_{a00} - \rho_{w00}) + \rho_{a00} \partial_{zt} \psi_{a1} - \rho_{w00} \partial_{zt} \psi_{w1} + \sigma \partial_{xxx} \zeta_1 = 0, \quad (16)$$

$$z \rightarrow -\infty: \psi_{w1} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty: \psi_{a1} \rightarrow 0 \quad (17)$$

Выполняя перекрестное дифференцирование компонент уравнений Эйлера (9)–(10) и (12)–(13), чтобы избавиться от давления, затем, используя уравнения неразрывности (11) и (14) получим соотношения, содержащие только функцию тока для верхней и нижней сред

$$z > 0: \quad \partial_{tt} \Delta \psi_{a1} + N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right) \partial_{xx} \psi_{a1} = 0; \quad (18)$$

$$z < 0: \quad \partial_{tt} \Delta \psi_{w1} + N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right) \partial_{xx} \psi_{w1} = 0; \quad (19)$$

$$N_a^2 = \frac{g}{\Lambda_a}, \quad N_w^2 = \frac{g}{\Lambda_w}$$

Здесь  $N_a, N_w$  – частота плавучести верхней и нижней жидкости соответственно.

Подставляя вид решения (6) в соотношения (19)–(20) получим дисперсионные соотношения, связывающие компоненты волнового вектора периодического движения в обеих средах

$$k_x^2 \left[ \omega^2 - N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right) \right] - k_{az}^2 \omega^2 = 0, \quad k_x^2 \left[ \omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right) \right] - k_{wz}^2 \omega^2 = 0 \quad (20)$$

Решения дисперсионных соотношений (21) записываются следующим образом:

$$k_{az} = \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right)}, \quad k_{wz} = \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right)} \quad (21)$$

С учетом (22) условие совместности граничных условий на границе раздела (15)–(17) приводит к дисперсионному соотношению, связывающему компоненты волнового вектора с частотой периодического движения

$$\sigma k_x^3 + g(\rho_{w00} - \rho_{a00})k_x - \omega(\rho_{w00}\sqrt{\omega^2 - N_w^2} + \rho_{a00}\sqrt{\omega^2 - N_a^2}) = 0 \quad (22)$$

Дисперсионное соотношение (23) является уравнением третьей степени по отношению к компоненте волнового вектора  $k_x$  и имеет 3 корня, которые находятся с применением формулы Кардано [22]

$$k_x = \frac{2^{1/3} g(\rho_{a00} - \rho_{w00})}{\alpha^{1/3}} + \frac{\alpha^{1/3}}{3 \cdot 2^{1/3} \sigma}, \quad (23)$$

$$k_x = -\frac{(1 \pm i\sqrt{3})g(\rho_{a00} - \rho_{w00})}{2^{2/3} \alpha^{1/3}} - \frac{(1 \mp i\sqrt{3})\alpha^{1/3}}{6 \cdot 2^{1/3} \sigma}, \quad (24)$$

$$\alpha = 27\sigma^2 \omega \left( \rho_{w00} \sqrt{\omega^2 - N_w^2} + \rho_{a00} \sqrt{\omega^2 - N_a^2} \right) + \sqrt{\left( 27\sigma^2 \omega \left( \rho_{w00} \sqrt{\omega^2 - N_w^2} + \rho_{a00} \sqrt{\omega^2 - N_a^2} \right) \right)^2 + 108g^3 \sigma^3 (\rho_{w00} - \rho_{a00})^3}$$

Правила выбора физически реализуемых решений следуют из естественных условий затухания движения с удалением от границы раздела (18) и для возмущения, распространяющегося в положительном направлении оси  $Ox$  принимает вид (для возмущений, распространяющихся в противоположном направлении результаты следует симметрично отразить относительно вертикальной оси  $Oz$ )

$$\operatorname{Re}(k_x) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(k_x) \geq 0, \quad \operatorname{Re}(k_{az}) \geq 0, \quad \operatorname{Re}(k_{wz}) \geq 0 \quad (25)$$

Дисперсионные соотношения (21)–(25) равномерно сходятся к известным соотношениям в однородной жидкости при выполнении предельных переходов  $N_a \rightarrow 0, N_w \rightarrow 0$

$$k_x^2 = k_{az}^2, \quad k_x^2 = k_{wz}^2, \quad (26)$$

$$\sigma k_x^3 + g(\rho_{w00} - \rho_{a00})k_x - \omega^2(\rho_{w00} + \rho_{a00}) = 0 \quad (27)$$

Анализ показывает, что условиям (26) удовлетворяет только решение (24) (в совокупности с решениями (22)). Представленные зависимости равномерно сходятся к известным для нестратифицированной жидкости ( $N_w = 0, N_a = 0$ ) и в случае малой плотности верхней среды слабо отличаются от выражений, полученных в модели одной жидкости [27].

Дрейф Стокса – это явление второго порядка малости по амплитуде волнового движения. Для слагаемых второго порядка малости (обозначены нижним индексом «2») математическая формулировка задачи (1)–(5) записывается следующим образом:

$$z > 0: \quad \rho_{a00}g\partial_x\zeta_2 + \rho_{a00}\partial_{zt}\psi_{a2} + \partial_x P_{a2}^p = -\rho_{a00}g s_{a1}\partial_x\zeta_1 + \\ + \rho_{a00}N_a^2\zeta_1\partial_x\zeta_1 + \rho_{a00}\partial_{zz}\psi_{a1}\partial_x\psi_{a1} - \rho_{a00}\partial_z\psi_{a1}\partial_{xz}\psi_{a1}, \quad (28)$$

$$\partial_z P_{a2}^p - \rho_{a00}\partial_{xt}\psi_{a2} = \rho_{a00}\partial_x\psi_{a1}\partial_{xz}\psi_{a1} - \rho_{a00}\partial_z\psi_{a1}\partial_{xx}\psi_{a1}, \quad (29)$$

$$\rho_{a00}\partial_t s_{a2} + \rho_{a00}\frac{1}{\Lambda_a}\partial_x\psi_{a2} = \rho_{a00}\partial_z s_{a1}\partial_x\psi_{a1} - \rho_{a00}\partial_x s_{a1}\partial_z\psi_{a1}; \quad (30)$$

$$z < 0: \quad \rho_{w00}g\partial_x\zeta_2 + \rho_{w00}\partial_{zt}\psi_{w2} + \partial_x P_{w2}^p = -\rho_{w00}g s_{w1}\partial_x\zeta_1 + \\ + \rho_{w00}N_w^2\zeta_1\partial_x\zeta_1 + \rho_{w00}\partial_{zz}\psi_{w1}\partial_x\psi_{w1} - \rho_{w00}\partial_z\psi_{w1}\partial_{xz}\psi_{w1}, \quad (31)$$

$$\partial_z P_{w2}^p - \rho_{w00}\partial_{xt}\psi_{w2} = \rho_{w00}\partial_x\psi_{w1}\partial_{xz}\psi_{w1} - \rho_{w00}\partial_z\psi_{w1}\partial_{xx}\psi_{w1}, \quad (32)$$

$$\rho_{w00}\partial_t s_{w2} + \rho_{w00}\frac{1}{\Lambda_w}\partial_x\psi_{w2} = \rho_{w00}\partial_z s_{w1}\partial_x\psi_{w1} - \rho_{w00}\partial_x s_{w1}\partial_z\psi_{w1}; \quad (33)$$

$$z = 0: \quad \partial_t\zeta_2 + \partial_x\psi_{a2} = -\partial_x\zeta_1\partial_z\psi_{a1} - \zeta_1\partial_{xz}\psi_{a1} \quad (34)$$

$$\partial_t\zeta_2 + \partial_x\psi_{w2} = -\partial_x\zeta_1\partial_z\psi_{w1} - \zeta_1\partial_{xz}\psi_{w1} \quad (35)$$

$$g\partial_x\zeta_2(\rho_{a00} - \rho_{w00}) + \rho_{a00}\partial_{zt}\psi_{a2} - \rho_{w00}\partial_{zt}\psi_{w2} + \sigma\partial_{xxx}\zeta_2 = \\ = g\rho_{w00}s_{w1}\partial_x\zeta_1 - g\rho_{a00}s_{a1}\partial_x\zeta_1 + \frac{g(\Lambda_a\rho_{w00} - \Lambda_w\rho_{a00})\zeta_1\partial_x\zeta_1}{\Lambda_a\Lambda_w}, \quad (36)$$

$$z \rightarrow -\infty: \psi_{w2} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty: \psi_{a2} \rightarrow 0 \quad (37)$$

Подставляя решение задачи первого порядка малости с учетом дисперсионных соотношений (22), (24) в правые части уравнений (29)–(37) можно получить вид неоднородностей задачи второго порядка малости. Неоднородности всех уравнений будут иметь периодический характер зависимости от времени и пространственной горизонтальной координаты. Таким образом решение задачи второго порядка малости не даст вклад в дрейфовые компоненты скорости.

### 3. Расчет скорости дрейфа Стокса и траекторий движения жидких частиц

Полученное выше решение построено в описании Эйлера. Для перехода к лагранжевому описанию необходимо преобразовать скорости по формуле [28]

$$\mathbf{u}_L(x, z, t) = \mathbf{u}_E(x, z, t) + \left[ \left( \int_0^t \mathbf{u}_E(x, z, \tau) d\tau \right) \cdot \nabla \right] \mathbf{u}_E(x, z, t) \quad (38)$$

Здесь нижним индексом «*E*» обозначено поле скоростей в описании Эйлера, а индексом «*L*» – описании Лагранжа. Стоит отметить, что при выполнении перехода (39) меняется статус координат: в лагранжевом описании координаты определяют начальное положение материальной точки, скорость которой определяется в момент времени *t*. Формула (39) справедлива во втором приближении по амплитуде волны в случае малых по сравнению с амплитудой смещений жидкой частицы. Поскольку решение задачи второго порядка малости периодические, то вклад в дрейфовые компоненты дают только интегральные слагаемые в (39). В настоящей работе производится расчет траекторий движения с точностью до лидирующих слагаемых: в периодических движениях лидирующими являются слагаемые первого порядка малости, а в дрейфовых движениях – слагаемые второго порядка малости. Подстановка (6) в (39) позволяет рассчитать скорость дрейфа Стокса  $\mathbf{u}_{adrift}$  в верхней и  $\mathbf{u}_{wdrift}$  в нижней жидкости:

$$\mathbf{u}_{adrift} = (u_{adrift}, 0) = \left( A_a^2 \frac{k_x k_{az}^2 \exp(-2k_{az}z)}{\omega}, 0 \right),$$

$$\mathbf{u}_{wdrift} = (u_{wdrift}, 0) = \left( A_w^2 \frac{k_x k_{wz}^2 \exp(2k_{wz}z)}{\omega}, 0 \right) \quad (39)$$

На рис. 1, *a–в* построены профили скорости дрейфа в жидкостях с параметрами воды и воздуха в стратифицированных океане и атмосфере ( $\rho_{w00} = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{a00} = 0.001 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 72 \text{ эрг/см}^2$ ) при частотах плавучести  $N_a = N_w = 1 \text{ с}^{-1}$  в обеих средах (сплошные линии) и в нестратифицированных жидкостях (пунктирные линии).

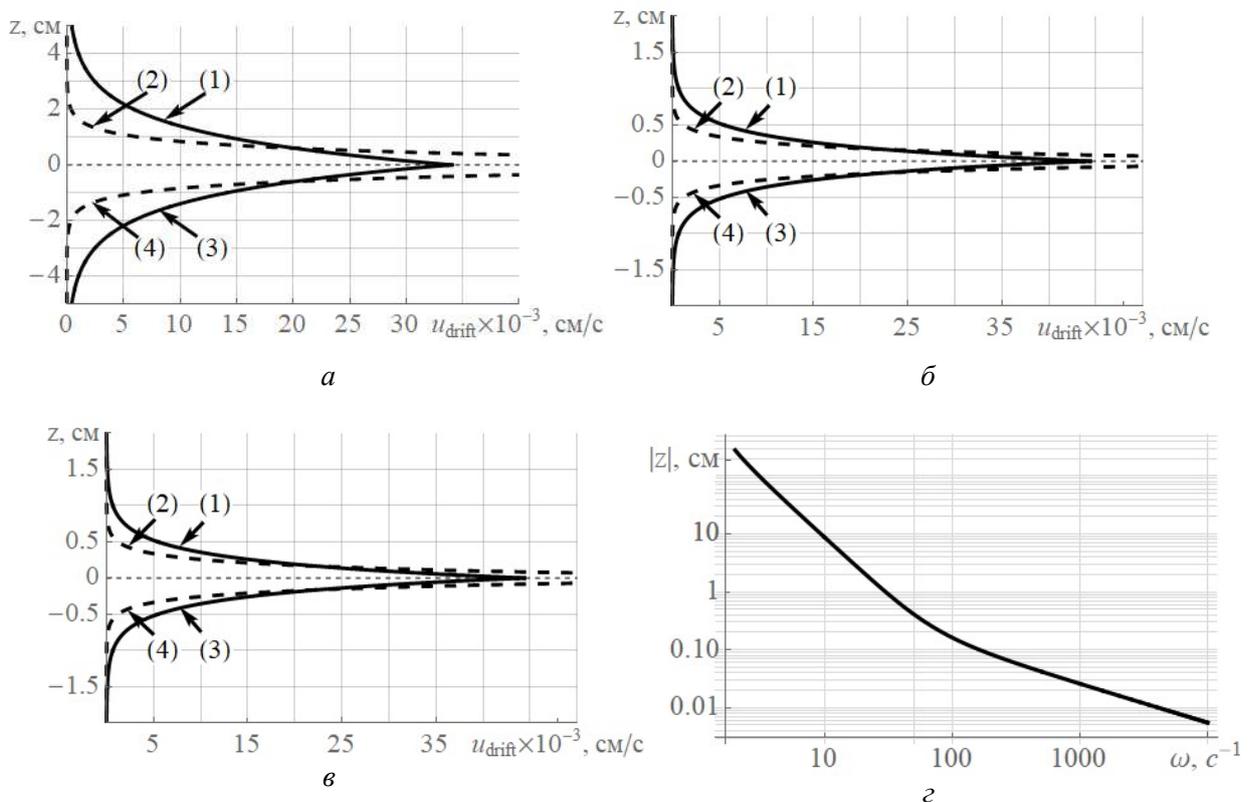


Рис. 1. Профиль скорости дрейфа Стокса в сильно стратифицированных атмосфере (1) и океане (3) и однородных атмосфере (2) и океане (4) при частоте волнового движения инициировавшего дрейф *a*)  $\omega = 40 \text{ с}^{-1}$ , *б*)  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$ , *в*)  $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$  и *г*) зависимость модуля координаты, при которой сравниваются скорости в моделях однородной и стратифицированной жидкости от частоты

Расчеты показывают, что отличие профиля скорости дрейфа Стокса в стратифицированной жидкости при разных частотах плавучести практически незаметно и составляет доли процента. С увеличением частоты периодического течения различие между значениями скорости дрейфа в жидкостях с разным уровнем стратификации уменьшается. С другой стороны, заметно отличие между скоростями дрейфа, рассчитанными в модели однородной и гетерогенной жидкости. Вблизи поверхности раздела скорость дрейфа Стокса в модели нестратифицированных сред существенно превышает значение скорости в модели стратифицированной жидкости, но с удалением от поверхности в стратифицированной жидкости скорость дрейфа затухает медленнее. На рис. 1,  $z$  показана зависимость расстояния от поверхности раздела  $z$ , на котором сравниваются скорости дрейфа в однородной и стратифицированной жидкости от частоты периодического движения, инициировавшего дрейф.

Построение траекторий движения жидких частиц, осуществляется в системе отсчета, которая движется вместе с жидкостью со скоростью дрейфа, а затем осуществляется переход в лабораторную систему координат. При этом частота периодических движений во всех слагаемых испытывает доплеровское смещение [29]

$$\begin{aligned}\Omega_a &= \omega - k_x u_{drift}, \\ \Omega_w &= \omega - k_x u_{wdrift}\end{aligned}\quad (40)$$

Если один из слоев движется поступательно в горизонтальном направлении, то помимо изменения дисперсионных соотношений это приведет к изменению частоты в выражении (41). С учетом изменения частоты периодического движения дрейфующей индивидуальной частицы получим выражения, описывающие текущие координаты частиц, находившихся в начальный момент времени в точке пространства с координатами  $(x_0, z_0)$  в верхней  $(X_a, Z_a)$  и нижней  $(X_w, Z_w)$  среде:

$$\begin{pmatrix} X_a \\ Z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_a \frac{\exp(-k_{az}z_0)}{\Omega_a} \begin{pmatrix} k_{az} \sin(k_x x_0 - t\Omega_a) \\ k_x \cos(k_x x_0 - t\Omega_a) \end{pmatrix} + A_a^2 \frac{k_{az}^2 k_x \exp(-2k_{az}z_0)}{\omega} t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} X_w \\ Z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_w \frac{\exp(k_{wz}z_0)}{\Omega_w} \begin{pmatrix} -k_{wz} \sin(k_x x_0 - t\Omega_w) \\ k_x \cos(k_x x_0 - t\Omega_w) \end{pmatrix} + A_w^2 \frac{k_{wz}^2 k_x \exp(2k_{wz}z_0)}{\omega} t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (42)$$

На рис. 2 приведены примеры построения траекторий движения частиц в сильно стратифицированной атмосфере ( $N_a = 1 \text{ c}^{-1}$ ) и океане ( $N_w = 1 \text{ c}^{-1}$ ) с использованием описанной методики.

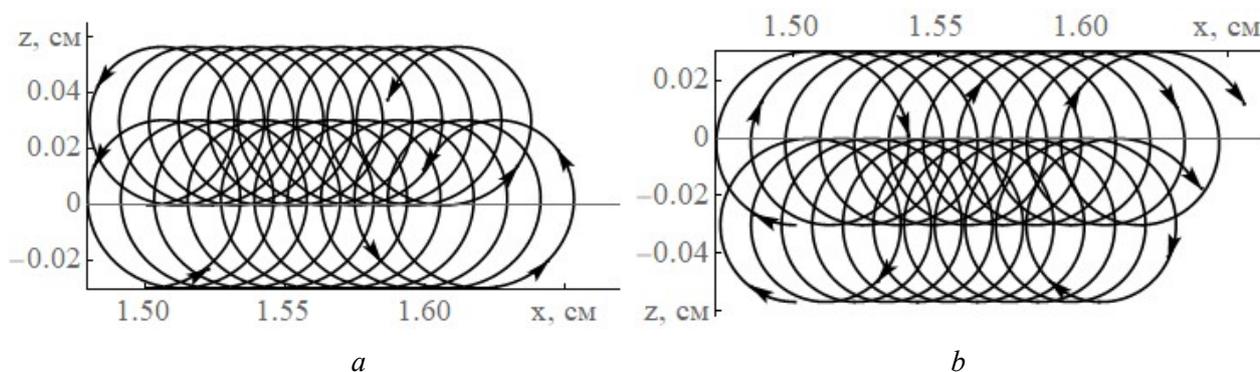


Рис. 2. Траектории движение жидких частиц в жидкостях с параметрами а) воздуха и б) воды в стратифицированных океане и атмосфере со значениями частоты плавучести  $N_a = N_w = 1 \text{ c}^{-1}$  и частоты периодического движения  $\omega = 100 \text{ c}^{-1}$  в обеих средах за время  $t = 10.7T$

Построены траектории движения в соседних слоях жидкости в стратифицированных океане и атмосфере ( $\rho_{w00} = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{a00} = 0.001 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 72 \text{ эрг/см}^2$ ) при частотах плавучести  $N_a = N_w = 1 \text{ с}^{-1}$  в обеих средах для частиц, занимавших в начальный момент времени положение по вертикальной координате  $z = 0 \text{ см}$ ,  $z = 0.028 \text{ см}$  для атмосферы и  $z = 0 \text{ см}$ ,  $z = -0.028 \text{ см}$  для океана при распространении периодической поверхностной волны с частотой периодического движения  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $0.01\lambda = 0.01 \cdot 2\pi / \sqrt{\text{Re}(k_x)^2 + \text{Im}(k_z)^2}$  за время  $\tau = 10.7T = 10.7 \cdot 2\pi / \omega$ .

В выражениях (42) и (43) для параметрического задания траекторий движения частоты циклических движений  $\Omega_a$ ,  $\Omega_w$  на разных глубинах будут различны из-за разной скорости дрейфа на разной высоте (40), (41). Из-за этого частички близких слоев жидкости будут перемешиваться.

Рассчитаем усредненный за период волнового движения  $T = 2\pi / \omega$  поток энергии и импульса с учетом скорости среднего дрейфа. Средний поток энергии в верхней  $\langle \Phi_{aE} \rangle$  и в нижней  $\langle \Phi_{wE} \rangle$  жидкости определяются соотношениями [Ландау]

$$\langle \Phi_{aE} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}_a \left( \rho_a \frac{\mathbf{u}_a^2}{2} + P_a^p \right) dt, \quad (43)$$

$$\langle \Phi_{wE} \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}_w \left( \rho_w \frac{\mathbf{u}_w^2}{2} + P_w^p \right) dt \quad (44)$$

Периодическая часть давления  $P_a^p, P_w^p$  рассчитывается из решения линеаризованной задачи (9) для верхней жидкости и (12) для нижней. Примеры построения усредненных потоков энергии с учетом скорости дрейфа в стратифицированных океане и атмосфере ( $\rho_{w00} = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{a00} = 0.001 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 72 \text{ эрг/см}^2$ ) при одинаковых значениях частот плавучести  $N_a = N_w = 1 \text{ с}^{-1}$  в обеих средах при распространении поверхностной волны с частотой  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $0.01\lambda$  приведены на рис. 3.

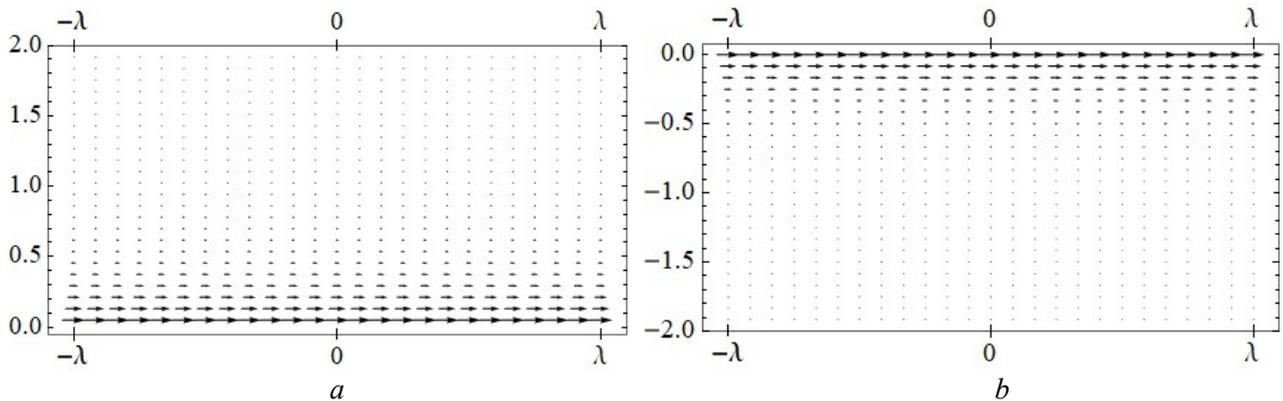


Рис. 3. Усредненные потоки энергии с учетом скорости дрейфа в стратифицированных а) атмосфере и б) океане

Потоки импульса  $\langle \Phi_{ap} \rangle$ ,  $\langle \Phi_{wp} \rangle$  в обеих средах определяются выражениями

$$\langle \Phi_{ap} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathbf{k}_a}{|\mathbf{k}_a|} \left( \rho_a \frac{\mathbf{u}_a^2}{2} + P_a^p \right) dt, \quad (45)$$

$$\langle \Phi_{wp} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathbf{k}_w}{|\mathbf{k}_w|} \left( \rho_w \frac{\mathbf{u}_w^2}{2} + P_w^p \right) dt \quad (46)$$

На рис. 4 показаны примеры построений потоков импульса с учетом скорости дрейфа Стокса в обеих контактирующих средах ( $\rho_{w00} = 1 \text{ г/см}^3$ ,  $\rho_{a00} = 0.001 \text{ г/см}^3$ ,  $\sigma = 72 \text{ эрг/см}^2$ ) при одинаковых значениях частот плавучести  $N_a = N_w = 1 \text{ с}^{-1}$  в обеих средах при распространении поверхностной волны с частотой  $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $0.01\lambda$ .

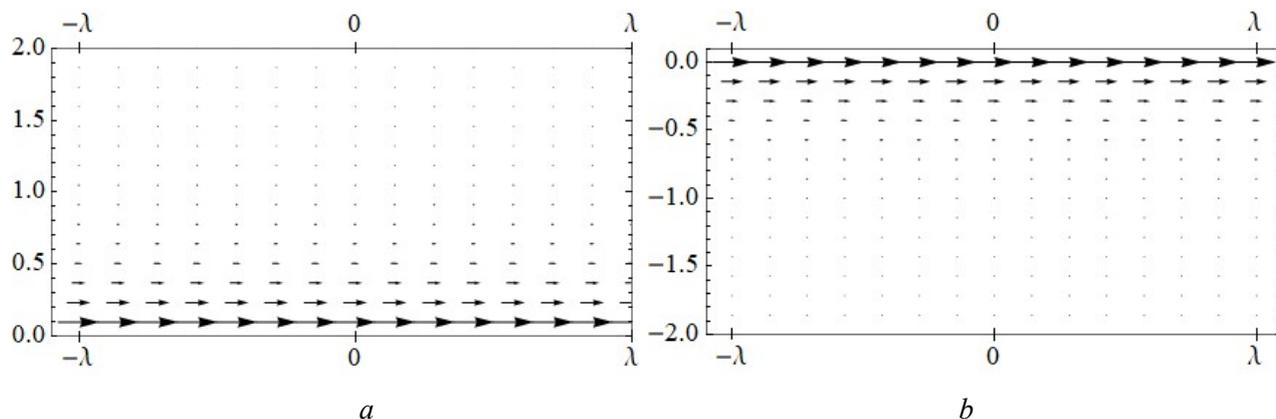


Рис. 4. Усредненные потоки импульса с учетом скорости дрейфа в стратифицированных *a)* атмосфере и *б)* океане

Перенос импульса, как и перенос энергии, в рассматриваемой модели идеальных жидкостей осуществляется в направлении распространения волны.

#### 4. Заключение

Предложено математическое описание процедуры построения скорости волнового дрейфа и расчета траекторий движения жидких частиц, составляющих гетерогенные атмосферу и океан. Часто при исследовании поверхностных волновых движений используют модель однородной жидкости, объясняя это малостью вариаций плотности по сравнению с равновесным значением, однако вычисления показывают, что учет стратификации плотности в модели приводит к заметным изменениям в расчете скорости волнового массопереноса, и как следствие, траекторий движения индивидуальных жидких частиц. Кроме того, качественные изменения наблюдаются и в дисперсионных соотношениях, определяющих зависимости длины волны от частоты и фазовой и групповой скорости от частоты и длины волны. Полученные соотношения равномерно сходятся к известным соотношениям для нестратифицированной жидкости и для поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности в модели не учитывающей влияние верхней среды.

#### Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700044-0, номер в системе Минобрнауки FFGN-2023-0004).

#### Литература

1. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Cam. Philos. Soc. 1847. V. 8. Pp. 441–455.
2. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in water waves // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1953. V. 245. No. 903. Pp. 535–581.
3. Longuet-Higgins M. S. Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface // Journal of Fluid Mechanics. 1960. V. 8. No. 2. Pp. 293–306.

4. Madsen O. S. Mass transport in deep-water waves // *Journal of Physical Oceanography*. 1978. V. 8. No. 6. Pp. 1009–1015.
5. Weber J. E. H., Broström G., Saetra Ø. Eulerian versus Lagrangian approaches to the wave-induced transport in the upper ocean // *Journal of Physical oceanography*. 2006. V. 36. No. 11. Pp. 2106–2118.
6. Curcic M., Chen S. S., Özgökmen T. M. Hurricane-induced ocean waves and Stokes drift and their impacts on surface transport and dispersion in the Gulf of Mexico // *Geophysical Research Letters*. 2016. V. 43. No. 6. Pp. 2773–2781.
7. Dore B. D. On mass transport velocity due to progressive waves // *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1977. V. 30. No. 2. Pp. 157–173.
8. Umeyama M. Eulerian–Lagrangian analysis for particle velocities and trajectories in a pure wave motion using particle image velocimetry // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2012. V. 370. No. 1964. Pp. 1687–1702.
9. Pizzo N. et al. The role of Lagrangian drift in the geometry, kinematics and dynamics of surface waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 2023. V. 954. R4.
10. Feng M. et al. Ocean circulation, Stokes drift, and connectivity of western rock lobster (*Panulirus cygnus*) population // *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*. 2011. V. 68. No. 7. Pp. 1182–1196.
11. Röhrs J. et al. Wave-induced transport and vertical mixing of pelagic eggs and larvae // *Limnology and oceanography*. 2014. V. 59. No. 4. Pp. 1213–1227.
12. Isobe A. et al. Selective transport of microplastics and mesoplastics by drifting in coastal waters // *Marine pollution bulletin*. 2014. V. 89. No. 1-2. Pp. 324–330.
13. Monismith S. G. Hydrodynamics of coral reefs // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2007. V. 39. Pp. 37–55.
14. Lenain L., Pizzo N. The contribution of high-frequency wind-generated surface waves to the Stokes drift // *Journal of Physical Oceanography*. 2020. V. 50. No. 12. Pp. 3455–3465.
15. Tamtare T., Dumont D., Chavanne C. The Stokes drift in ocean surface drift prediction // *Journal of Operational Oceanography*. 2022. V. 15. No. 3. Pp. 156–168.
16. Constantin A., Ehrnström M., Villari G. Particle trajectories in linear deep-water waves // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2008. V. 9. No. 4. Pp. 1336–1344.
17. Chang H. K., Chen Y. Y., Liou J. C. Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water // *Ocean engineering*. 2009. V. 36. No. 5. Pp. 324–329.
18. Carter J. D., Curtis C. W., Kalisch H. Particle trajectories in nonlinear Schrödinger models // *Water Waves*. 2020. V. 2. No. 1. Pp. 31–57.
19. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Ю., Хайирбеков Ш. Х. Тонкая структура распределения вещества составной капли в принимающей жидкости в режиме формирования всплеска // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т.24, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-5/articles/1073/>
20. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Перенос вещества на начальном этапе формирования каверны в импактном режиме слияния свободно падающей капли // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т.24, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-5/articles/1068/>
21. Чашечкин Ю. Д., Ильиных А. Распределение вещества капли в принимающей жидкости в интрузивном режиме слияния // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1023/>
22. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
23. Ma W., et al. Numerical investigation of internal wave and free surface wave induced by the DARPA Suboff moving in a strongly stratified fluid // *Ships and Offshore Structures*. 2020. V. 15. No. 6. Pp. 587–604.

24. Gemmrich J., Monahan A. Surface and interfacial waves in a strongly stratified upper ocean // *Journal of Physical Oceanography*. 2021. V. 51. No. 2. Pp. 269–278.
25. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика. М: Наука. – 1986.
26. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. 2021. V. 10. No. 4. P. 286.
27. Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. 2022. Т. 58, № 5. С. 524–533
28. Ле Блон. П., Майсек Л. Волны в океане Ч.1. М.: Мир, 1981. 480 с.
29. Белоножко Д. Ф., Очиров А. А. О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей // *Журнал технической физики*. 2018. Т. 88. №. 5. С. 675–683.

## References

1. Stokes G. G., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cam. Philos. Soc.*, 1847, vol. 8, pp. 441–455.
2. Longuet-Higgins M. S., Mass transport in water waves, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1953, vol. 245, no. 903, pp. 535–581.
3. Longuet-Higgins M. S., Mass transport in the boundary layer at a free oscillating surface, *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 293–306. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211206000061X>
4. Madsen O. S., Mass transport in deep-water waves, *Journal of Physical Oceanography*, 1978, vol. 8, no. 6, pp. 1009–1015. DOI: [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1978\)008<1009:MTIDWW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1978)008<1009:MTIDWW>2.0.CO;2)
5. Weber J. E. H., Broström G., Saetra Ø., Eulerian versus Lagrangian approaches to the wave-induced transport in the upper ocean, *Journal of Physical oceanography*, 2006, vol. 36, no. 11, pp. 2106–2118. <https://doi.org/10.1175/JPO2951.1>
6. Curcic M., Chen S. S., Özgökmen T. M., Hurricane-induced ocean waves and stokes drift and their impacts on surface transport and dispersion in the Gulf of Mexico, *Geophysical Research Letters*, 2016, vol. 43, no. 6, pp. 2773–2781. <https://doi.org/10.1002/2015GL067619>
7. Dore B. D., On mass transport velocity due to progressive waves, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1977, vol. 30, no. 2, pp. 157–173. <https://doi.org/10.1093/qjmam/30.2.157>
8. Umeyama M., Eulerian–Lagrangian analysis for particle velocities and trajectories in a pure wave motion using particle image velocimetry, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 370, no. 1964, pp. 1687–1702. <https://doi.org/10.1098/rsta.2011.0450>
9. Pizzo, N., Lenain, L., Römcke, O., Ellingsen, S. Å., & Smeltzer, B. K., The role of Lagrangian drift in the geometry, kinematics and dynamics of surface waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, vol. 954, R4. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.1036>
10. Feng, M., Caputi, N., Penn, J., Slawinski, D., de Lestang, S., Weller, E., & Pearce, A., Ocean circulation, Stokes drift, and connectivity of western rock lobster (*Panulirus cygnus*) population, *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 2011, vol. 68, no. 7, pp. 1182–1196. <https://doi.org/10.1139/f2011-065>
11. Röhrs, J., Christensen, K. H., Vikebø, F., Sundby, S., Saetra, Ø., & Broström, G., Wave-induced transport and vertical mixing of pelagic eggs and larvae, *Limnology and oceanography*, 2014, vol. 59, no. 4, pp. 1213–1227. DOI:10.4319/Lo.2014.59.4.1213
12. Isobe, A., Kubo, K., Tamura, Y., Nakashima, E., & Fujii, N., Selective transport of microplastics and mesoplastics by drifting in coastal waters, *Marine pollution bulletin*, 2014, vol. 89, no. 1–2., pp. 324–330. DOI: 10.1016/j.marpolbul.2014.09.041

13. Monismith S. G., Hydrodynamics of coral reefs, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2007, vol. 39, pp. 37–55. DOI: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092125
14. Lenain L., Pizzo N., The contribution of high-frequency wind-generated surface waves to the Stokes drift, *Journal of Physical Oceanography*, 2020, vol. 50, no. 12, pp. 3455–3465. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0116.1>
15. Tamtare T., Dumont D., Chavanne C., The Stokes drift in ocean surface drift prediction, *Journal of Operational Oceanography*, 2022, vol. 15, no. 3. <https://doi.org/10.1080/1755876X.2021.1872229>
16. Constantin A., Ehrnström M., Villari G., Particle trajectories in linear deep-water waves, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, vol. 9, no. 4. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2007.03.003>
17. Chang H. K., Chen Y. Y., Liou J. C., Particle trajectories of nonlinear gravity waves in deep water, *Ocean engineering*, 2009, vol. 36, no. 5, pp. 324–329. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2008.12.007
18. Carter J. D., Curtis C. W., Kalisch H., Particle trajectories in nonlinear Schrödinger models, *Water Waves*, 2020, vol. 2, no. 1, pp. 31–57. DOI: 10.1007/s42286-019-00008-7
19. Chashechkin Y., Ilinykh A., Khairbekov S., Fine Structure of the Compound Drop Substance Distribution in the Target Fluid in the Splash Formation Mode, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, iss. 5. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.5.1073>
20. Chashechkin Y., Ilinykh A., Transfer of Matter at the Initial Stage of Cavity Formation in the Impact Mode of Merging a Freely Falling Drop, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, iss. 5. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.5.1068>
21. Chashechkin Y., Ilinykh A., Distribution of the Drop Substance in the Target Fluid at the Coalescence Intrusive Mode, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, iss. 6. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.6.1023>
22. Chashechkin Y., Ochirov A., Lapshina K. Y., Surface Waves Along the Interface of Stably Stratified Liquids, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, iss. 6. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.6.1028>
23. Ma W., Li Y., Ding Y., Duan F. & Hu K., Numerical investigation of internal wave and free surface wave induced by the DARPA Suboff moving in a strongly stratified fluid, *Ships and Offshore Structures*, 2020, vol. 15, no. 6, pp. 587–604. DOI: 10.1080/17445302.2019.1661633
24. Gemmrich J., Monahan A., Surface and interfacial waves in a strongly stratified upper ocean, *Journal of Physical Oceanography*, 2021, vol. 51, no. 2. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0073.1>
25. Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *Fluid Mechanics; Course of Theoretical Physics*; Pergamon Press: Oxford, UK, 1987; Volume 6, 560 p
26. Chashechkin Y. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 4. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
27. Ochirov A. A., Chashechkin Y. D., Two-dimensional periodic waves in a non-viscous continuously stratified liquid, *Izvestiya - Atmospheric and Oceanic Physics*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 450–458. [in Russian].
28. LeBlond P. H., Mysak L. A., *Waves in the Ocean*, Elsevier, 1981.
29. Belonozhko D. F., Ochirov A. A., Mass Transfer Induced by a Wave Perturbation on the Surface of the Velocity Field Tangential Discontinuity, *Technical Physics*, 2018, vol. 63, pp. 653–661. DOI: 10.1134/S106378421805002X

Статья поступила в редакцию 17 декабря 2023 г.