

Nonlinear Dynamics of Acoustic Instability in a Vibrationally Excited Gas: Influence of Heating and Cooling

S. S. Khrapov

Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russia

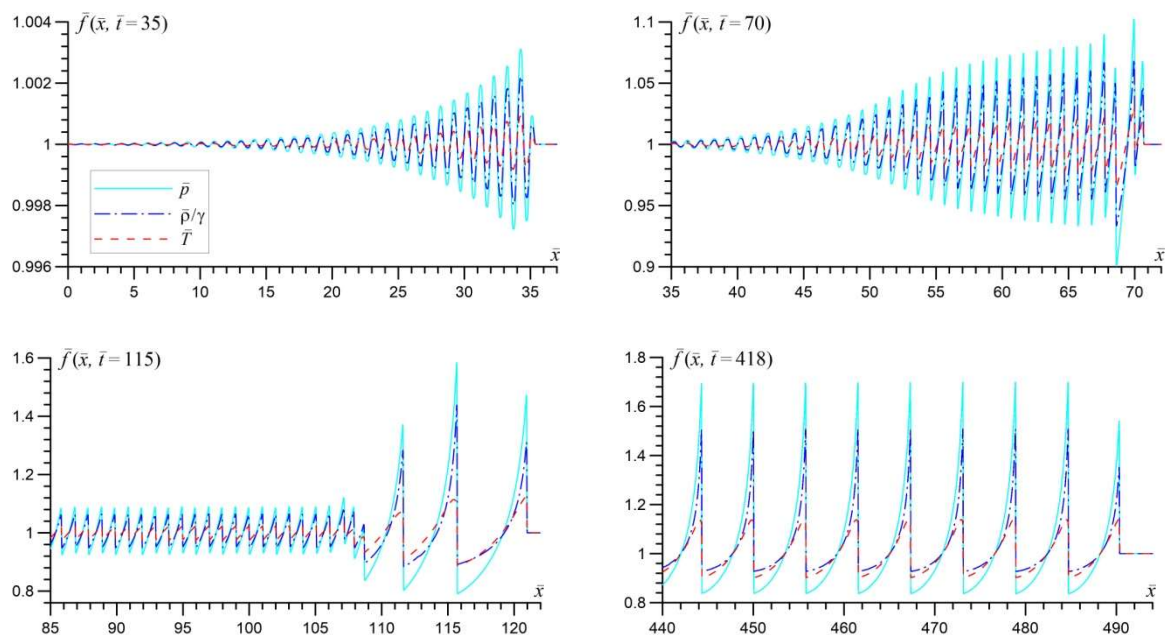
khrapov@volsu.ru

Abstract

The dynamics of unstable sound waves in a nonequilibrium vibrationally excited gas is considered, taking into account viscosity and thermal conductivity. A numerical model has been constructed and a computational tool has been developed to study the linear and nonlinear stages of the development of acoustic instability in a nonequilibrium gas with different models of relaxation, heating and cooling times. The numerical model has high spatial resolution and second order accuracy. It is shown that at the initial stage, small disturbances generated by a sound source grow exponentially in accordance with the conclusions of linear theory. At the nonlinear stage of development of acoustic instability, a sawtooth system of weak shock waves is first formed, and then, due to the interaction (merger) of shock waves, a quasi-stationary system of high-intensity shock wave pulses is formed.

Keywords: nonequilibrium gas, vibrational relaxation, instability of sound waves, shock waves, numerical methods CSPH-TVD and MUSCL.

The figure shows the dynamics of acoustic instability at various stages of evolution: linear stage with exponential growth of wave amplitude (top left panel); the stage of nonlinear saturation and the formation of a sawtooth system of weak shock waves (top right panel); the stage of nonlinear interaction (merging) of shock waves and the formation of shock wave pulses (lower left panel); stage of nonlinear saturation and formation of a quasi-stationary system of shock wave pulses (lower right panel).



УДК533.7, 534.2

Нелинейная динамика акустической неустойчивости в колебательно-возбужденном газе: влияние нагрева и охлаждения

С. С. Храпов

*Волгоградский государственный университет,
Россия, Волгоград, 400062, просп. Университетский, 100
khrapov@volsu.ru*

Аннотация

Рассмотрена динамика неустойчивых звуковых волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе с учетом вязкости и теплопроводности. Построена численная модель и разработан вычислительный инструмент для исследования линейной и нелинейной стадии развития акустической неустойчивости в неравновесном газе с различными моделями времени релаксации, нагрева и охлаждения. Численная модель обладает высоким пространственным разрешением и имеет второй порядок точности. Показано, что на начальной стадии малые возмущения, генерируемые источником звука, нарастают по экспоненциальному закону в соответствии с выводами линейной теории. На нелинейной стадии развития акустической неустойчивости сначала формируется пилообразная система слабых ударных волн, а затем из-за взаимодействия (слияния) ударных волн образуется квазистационарная система ударно-волновых импульсов высокой интенсивности.

Ключевые слова: неравновесный газ, колебательная релаксация, неустойчивость звуковых волн, ударные волны, численные методы CSPH-TVD и MUSCL.

1. Введение

Неравновесные течения газа возникают во многих физических системах (природных и технических), например, в колебательно-возбужденном газе [1–3], в химически активных средах [4], в средах с тепловым дисбалансом [5], в газоплазменных средах [6], в сильных ударных волнах [7] и при сверхзвуковом обтекании аэродинамических поверхностей [8, 9]. При выполнении определенных условий неравновесный газ становится неустойчивым относительно малых возмущений звуковых и энтропийных мод, и в нем могут развиваться акустическая и тепловая неустойчивости [1, 2, 10, 11]. В таком газе амплитуда звуковых волн на начальной линейной стадии развития акустической неустойчивости нарастает по экспоненциальному закону. Как было отмечено в работе [11], такие акустически активные (неустойчивые) среды обладают новыми дисперсионно-вязкостными свойствами, которые могут приводить к сверхотражению звуковых волн на границе раздела равновесной и неравновесной сред, возбуждению встречного акустического ветра и самофокусировке звуковых пучков, изменению структуры, скорости и условий устойчивости ударных волн. Нелинейная динамика акустически активных сред ранее исследовалась в работах [11–14] на основе обобщенного акустического уравнения с учетом квадратичной нелинейности. В частности, в этих работах изучена структура слабых ударных волн, получены новые нелинейные волновые структуры – автоволновые импульсы, образующиеся при распаде произвольных слабых разрывов в неравновесном газе. В общем случае при описании динамики нелинейных волн со значительной амплитудой учета только квадратичной нелинейности недостаточно, и необходимо учитывать нелинейные поправки более высокого порядка.

Полный учет всех нелинейных эффектов возможен только при прямом численном решении газодинамических уравнений. Ранее детальное исследование последовательной эволюции акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе от линейной до нелинейной стадии развития не проводилось.

В настоящее время наряду с физическим экспериментом и теоретическими методами исследования процессов и явлений в газовых и газоплазменных средах широко применяют вычислительный эксперимент, который основан на прямом численном решении уравнений газодинамики. Для моделирования газодинамических течений используют хорошо апробированные численные методы, входящие в состав как коммерческих продуктов (Comsol-Multiphysics, AnsysFluent, IllustrisTNG и др.) [6, 9, 15, 16], так и реализованных на основе оригинальных параллельных алгоритмов в специализированных решениях [17–21]. При верификации численных алгоритмов, используемых для моделирования газодинамических неустойчивостей, необходимо, в первую очередь, проводить сравнение результатов моделирования на начальной (линейной) стадии развития неустойчивости с аналитическими выводами линейного анализа устойчивости [22, 23]. Дополнительным фактором, позволяющим верифицировать численный алгоритм, является сравнение результатов моделирования с приближенными нелинейными моделями, которые основаны на обобщенном акустическом уравнении с квадратичной нелинейностью [12–14].

Как правило, универсальные численные алгоритмы, входящие в состав коммерческих продуктов, не обладают необходимой эффективностью (точностью и производительностью) для моделирования газодинамических неустойчивостей, т.к. являются сильно диссипативными, имеют первый порядок точности и требуют больших вычислительных ресурсов из-за низкой эффективности распараллеливания расчетов. Поэтому разработка эффективного вычислительного инструмента для исследования динамики акустической неустойчивости на различных стадиях эволюции (линейной и нелинейной) с высоким пространственным разрешением и точностью (не менее второго порядка) является актуальной задачей.

Целью работы является разработка эффективного вычислительного инструмента и исследование на его основе нелинейных структур, формирующихся в колебательно-возбужденном газе на различных стадиях эволюции акустической неустойчивости, а также определения параметров системы ударных волн (УВ) в зависимости от начальной степени неравновесности среды и модели охлаждения. В качестве инструмента исследования использовались методы численного газодинамического моделирования CSPH-TVD (Combined Smoothed Particle Hydrodynamics-Total Variation Diminishing) [24, 25] и MUSCL (Monotone Upwind Schemefor Conservation Laws) [26, 27], адаптированные для интегрирования уравнений неравновесного газа. В п. 2 представлена математическая модель колебательно-возбужденного неравновесного газа и приведена обобщенная формула для времени релаксации. Описание используемого численного метода и параметры вычислительных экспериментов приведены в п. 3. В п. 4 представлены результаты численного моделирования.

2. Математическая модель неравновесного колебательно-возбужденного газа

2.1. Основные уравнения

Рассмотрим модель однокомпонентного колебательно-возбужденного газа с экспоненциальной релаксацией Ландау – Теллера [11–13, 28] в одномерном приближении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p - \rho \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(E + p)u - \rho \mu u \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right] = \rho \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_v^e}{\tau} - \rho \Lambda + \rho u g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon_v u}{\partial x} = -\rho \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_v^e}{\tau} + \rho Q, \quad (4)$$

где $E = \rho \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right)$ – плотность полной энергии газа без учета колебательной энергии; ρ, p, ε, T и u – плотность, давление, удельная внутренняя энергия, температура и скорость газа, соответственно; g – внешняя удельная сила; $\mu = \left(\frac{4}{3} \mu_1 + \mu_2 \right)$, μ_1 и μ_2 – коэффициенты первой и второй кинематической вязкости; κ – коэффициент теплопроводности; ε_v – удельная колебательная энергия молекул газа; ε_v^e – равновесное значение удельной колебательной энергии; τ – время колебательной релаксации; Q и Λ – удельные мощности нагрева (накачки) и охлаждения (теплоотвода), соответственно. В общем случае величины τ, Q и Λ зависят от плотности и температуры среды.

Система уравнений (1)–(4) замыкается уравнениями состояния идеального газа

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}, \quad p = R\rho T, \quad (5)$$

где γ – показатель адиабаты; $R = R_*/M$ – газовая постоянная; R_* – универсальная газовая постоянная; M – молярная масса газа.

2.2. Колебательная температура и модель времени релаксации

В двухтемпературном приближении при учете только первого энергетического уровня каждой моды удельная колебательная энергия газа имеет вид [9, 29]

$$\varepsilon_v(T_v) = R \sum_l \frac{r_l \theta_l}{\exp(\theta_l/T_v) - 1}, \quad \varepsilon_v^e(T) = R \sum_l \frac{r_l \theta_l}{\exp(\theta_l/T) - 1}, \quad (6)$$

где T_v – колебательная температура газа; θ_l – характеристическая колебательная температура l -моды; r_l – степень вырождения l -моды.

При численном моделировании газодинамических течений неравновесного газа время колебательной релаксации обычно определяется по формуле Милликена – Уайта [9, 30]. В работе [31] показано, что модель Милликена – Уайта хорошо согласуется как с экспериментальными данными, так и с выводами кинетической теории при температурах ниже 3000 К. При высоких температурах применяют более точные теоретические модели [32–34], а также модели с аналитической аппроксимацией экспериментальных данных [29, 35]. В общем случае зависимость времени колебательной релаксации от давления и температуры можно представить в виде

$$\tau(\hat{p}, T) = \frac{\exp(a_0 + a_1 T^{-1/3} + a_2 T^{-2/3} + a_3 T^{1/3} + n \ln T)}{\hat{p} [1 - m \exp(-\theta_{\min}/T)]}, \quad (7)$$

где $\hat{p} = p/p_A$ – давление в единицах атмосферного давления ($p_A = 101\,325$ Па); θ_{\min} – минимальная из характеристических температур колебательных мод [34]; a_k и n – коэффициенты модели релаксации, которые определяются экспериментально [29, 35] или рассчитываются с использованием полуэмпирических формул [30, 34]; m – бинарный параметр (при $m = 1$ поправка кинетической теории [34] учитывается, а при $m = 0$ – нет).

2.3. Стационарное состояние, модели нагрева и охлаждения

Для изучения различных стадий (линейной, нелинейной) развития акустической неустойчивости будем рассматривать динамику звуковых волн на фоне начального стационарного состояния с однородным распределением газодинамических параметров: $f_0(x) = \text{const}$, где $f_0 = \{u_0, \rho_0, p_0, T_0, T_{v0}, \tau_0, \mu_0, \kappa_0, Q_0, \Lambda_0\}$. Газ считаем покоящимся ($u_0 = 0$), тогда из уравнений баланса энергии колебательно-возбужденного газа (3) и (4) получим

$$\Lambda_0 = Q_0, \quad \varepsilon_v(T_{v0}) - \varepsilon_v(T_0) = \tau_0 Q_0 \quad (8)$$

Первое уравнение в (8) определяет баланс нагрева и охлаждения, необходимый для поддержания постоянной температуры газа T_0 в начальном стационарном состоянии. Из второго уравнения в (8) с учетом выражений (6) можно найти начальную колебательную температуру газа T_{v0} из следующего уравнения:

$$\sum_l r_l \bar{\theta}_l \left[\frac{1}{\exp(\bar{\theta}_l / \bar{T}_{v0}) - 1} - \frac{1}{\exp \bar{\theta}_l - 1} \right] = S_0, \quad (9)$$

где $\bar{\theta}_l = \frac{\theta_l}{T_0}$, $\bar{T}_{v0} = \frac{T_{v0}}{T_0}$, $S_0 = \frac{\tau_0 Q_0}{RT_0}$ – начальная степень неравновесности среды [11, 13]. В случае двухатомных молекул с одной колебательной модой ($r_l \equiv 1$, $\bar{\theta}_l \equiv \bar{\theta}$) из (9) можно получить явное выражение для \bar{T}_{v0}

$$\bar{T}_{v0} = \bar{\theta} \left[\ln \frac{\bar{\theta} \exp \bar{\theta} + S_0 (\exp \bar{\theta} - 1)}{\bar{\theta} + S_0 (\exp \bar{\theta} - 1)} \right]^{-1} \quad (10)$$

В работе [36] показано, что на нелинейной стадии развития акустической неустойчивости волновой пакет приобретает пилообразный профиль и эволюционирует к системе слабых ударных волн (УВ). Эта система УВ после достижения максимальной амплитуды возмущений (эффект нелинейного насыщения) продолжает эволюционировать, и в результате нелинейного взаимодействия УВ между двумя первыми максимумами волнового пакета образуется область пониженного давления. В этой области эффект нелинейного насыщения исчезает, и температура газа быстро падает до нуля за счет сильного нелинейного усиления акустической и тепловой неустойчивостей. Из-за этого дальнейшее исследование динамики акустической неустойчивости методами численного газодинамического моделирования становится невозможным. Как показал дальнейший анализ, этот негативный эффект обусловлен идеализированной одномерной постановкой задачи с постоянным нагревом и охлаждением ($Q(T) = \Lambda(T) = Q_0 = \text{const}$), которая не может быть физически реализована на практике. В реальных условиях, как минимум, в одном из направлений всегда будет присутствовать поперечный поток тепла, который зависит от разности температур между колебательно-возбужденным газом и внешней средой. Этот тепловой поток будет приводить к стабилизации неустойчивости в области пониженного давления. Учесть поперечный тепловой поток можно как в двумерной постановке задачи, так и в рамках одномерного приближения. Для этого необходимо определить усредненный (эффективный) поток тепла в поперечном направлении плоского волновода, который будет задаваться функцией $\Lambda(T)$. Если рассматривать все величины в системе уравнений (1)–(4) как средние значения параметров течения в газовом слое плоского волновода, то для функции $\Lambda(T)$ с учетом стационарного соотношения $\Lambda_0 = Q_0$ нетрудно получить следующую модельную оценку:

$$\Lambda(T) = Q_0 \left(\frac{T - T_{ex}}{T_0 - T_{ex}} \right) \frac{1}{\delta}, \quad \delta = \begin{cases} 1 & , \quad T \geq T_{ex}/3, \\ 3T/T_{ex} & , \quad T < T_{ex}/3, \end{cases} \quad (11)$$

где T_{ex} – температура внешней среды ($T_{ex} < T_0$), а безразмерный параметр δ не позволяет газу в численных расчетах охладиться до нуля. Функцию нагрева будем считать постоянной, не зависящей от плотности и температуры: $Q(\rho, T) = Q_0 = \text{const}$.

3. Численная модель и параметры вычислительных экспериментов

3.1. Уравнения динамики неравновесного газа в безразмерном виде

Для исследования нелинейной динамики акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе удобно перейти в уравнениях (1)–(7) и (11) к безразмерным величинам $\bar{f} = f/l_f$, где l_f – соответствующие характерные масштабы численной модели: $l_t = \tau_0$, $l_u = c_{s0} = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, $l_x = c_{s0}\tau_0$, $l_T = T_0$, $l_p = p_0$, $l_\rho = \rho_0/\gamma$. Тогда систему уравнений (1)–(4) можно представить в виде

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial \bar{x}} = \bar{\mathbf{G}}, \quad (12)$$

где

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{E} \\ \bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{u}^2 + \bar{p} - \bar{\rho} \bar{\mu} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ (\bar{E} + \bar{p}) \bar{u} - \frac{\bar{\rho} \bar{\mu}}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{\rho} \bar{\chi}}{\gamma \gamma_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v \bar{u} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \bar{g} \\ \bar{\rho} \bar{g} \bar{u} - \frac{\bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v^e - \bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v}{\bar{\tau}} - \frac{\bar{\rho} S_0}{\gamma \delta} \frac{\bar{T} - \bar{T}_{ex}}{1 - \bar{T}_{ex}} \\ \frac{\bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v^e - \bar{\rho} \bar{\varepsilon}_v}{\bar{\tau}} + \frac{\bar{\rho} S_0}{\gamma} \end{pmatrix},$$

$\gamma_1 = \gamma - 1$, $\bar{T}_{ex} = T_{ex}/T_0$, $\bar{\chi}$ – безразмерный коэффициент температуропроводности. Для безразмерных значений удельной колебательной энергии из (6) получим

$$\bar{\varepsilon}_v(\bar{T}_v) = \frac{1}{\gamma} \sum_l \frac{r_l \bar{\theta}_l}{\exp(\bar{\theta}_l/\bar{T}_v) - 1}, \quad \bar{\varepsilon}_v^e(\bar{T}) = \frac{1}{\gamma} \sum_l \frac{r_l \bar{\theta}_l}{\exp(\bar{\theta}_l/\bar{T}) - 1} \quad (13)$$

При таком способе обезразмеривания калибровочный коэффициент a_0 в (7) исключается, и для безразмерного времени релаксации с учетом уравнения состояния (5) имеем

$$\bar{\tau}(\bar{\rho}, \bar{T}) = \frac{\gamma \bar{T}^{n-1}}{\bar{\rho}} \exp\{a_1(\bar{T}^{-1/3} - 1) + a_2(\bar{T}^{-2/3} - 1) + a_3(\bar{T}^{1/3} - 1)\} \frac{1 - m \exp(-\bar{\theta}_{\min})}{1 - m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})}, \quad (14)$$

где $\bar{a}_1 = a_1 T_0^{-1/3}$, $\bar{a}_2 = a_2 T_0^{-2/3}$, $\bar{a}_3 = a_3 T_0^{1/3}$.

3.2. Акустический инкремент

В рамках линейной модели неустойчивость звуковых волн в колебательно-возбужденном газе возникает при определенных значениях начальной степени неравновесности среды

S_0 и безразмерных параметров [11, 13, 37]: γ , $\tau_\rho = \frac{\partial \ln \tau}{\partial \ln \rho}$, $\tau_T = \frac{\partial \ln \tau}{\partial \ln T}$, $\Lambda_\rho = \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \ln \rho}$,

$\Lambda_T = \frac{\partial \ln \Lambda}{\partial \ln T}$, $Q_\rho = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln \rho}$, $Q_T = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln T}$, $C_v = \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_v^e}{\partial T} \equiv \gamma \frac{\partial \bar{\varepsilon}_v^e}{\partial \bar{T}}$. С учетом выражений (11), (13),

(14) и предположения о постоянстве функции нагрева получим

$$\Lambda_\rho = Q_\rho = Q_T = 0, \quad \tau_\rho = -1, \quad (15)$$

$$\Lambda_T = \frac{1}{1 - \bar{T}_{ex}},$$

$$\tau_T = (n-1) - \frac{\bar{a}_1}{3} \bar{T}^{-1/3} - \frac{2\bar{a}_2}{3} \bar{T}^{-2/3} + \frac{\bar{a}_3}{3} \bar{T}^{1/3} + \frac{\bar{\theta}_{\min}}{\bar{T}} \frac{m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})}{1 - m \exp(-\bar{\theta}_{\min}/\bar{T})},$$

$$C_v = \sum_l r_l \frac{\bar{\theta}_l^2}{\bar{T}^2} \frac{\exp(\bar{\theta}_l/\bar{T})}{[\exp(\bar{\theta}_l/\bar{T}) - 1]^2} \quad (16)$$

Условия, при которых акустическая неустойчивость возникает в неравновесном газе, могут быть с учетом (15) записаны в виде [37]

$$\tau_T < \frac{1}{\gamma_1} - \Lambda_T, \quad S_0 > \frac{\gamma_1 C_v}{1 - \gamma_1 (\tau_T + \Lambda_T)} \quad (17)$$

Если первое условие в (17) выполнено, то звуковые волны могут быть неустойчивы при выполнении второго условия в (17). Таким образом, если начальные распределения параметров неравновесного газа и интенсивности нагрева удовлетворяют этим условиям, то амплитуда акустических волн на линейной стадии эволюции будет нарастать по закону $\propto \exp\{\bar{\alpha}(\bar{\omega})\bar{x}\}$, где $\bar{x} = x/c_{s0}\tau_0$ – безразмерное расстояние от источника звука, $\bar{\alpha} = \alpha c_{s0}\tau_0$ – безразмерный акустический инкремент, зависящий от безразмерной частоты колебаний $\bar{\omega} = \omega\tau_0$ источника звука. В общем случае (с учетом вязкости, теплопроводности, нагрева и охлаждения) величина $\bar{\alpha}(\bar{\omega})$ определяется из решения дисперсионного уравнения [37]. В бездиссипативном пределе для высокочастотного звука ($\bar{\omega} \rightarrow \infty$) с учетом (15) можно получить оценку максимального акустического инкремента [37]

$$\bar{\alpha}_\infty = \frac{\gamma_1}{2\gamma} \{S_0 [1 - \gamma_1 (\tau_T + \Lambda_T)] - \gamma_1 C_v\} \quad (18)$$

3.3. Численный метод, начальные и граничные условия

Для численного решения системы уравнений (12) проведем стандартную процедуру дискретизации непрерывных величин $\bar{U}(\bar{x}, \bar{t})$ в узлах пространственно-временной сетки: $\bar{x}_{i+1} = \bar{x}_i + \Delta\bar{x}$, $\bar{t}_{n+1} = \bar{t}_n + \Delta\bar{t}_n$, где $\Delta\bar{x} = \bar{L}/N$ – размер пространственных ячеек, \bar{L} – безразмерный размер расчетной области, N – количество расчетных ячеек, $\Delta\bar{t}_n$ – временной шаг. Тогда для вектора консервативных переменных получим: $\bar{U}(\bar{x}, \bar{t}) \rightarrow \bar{U}(\bar{x}_i, \bar{t}_n) \equiv \bar{U}_i^n$. А консервативный алгоритм численного решения системы уравнений (12) можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\bar{U}_i^{n+1} = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta\bar{t}_n}{\Delta\bar{x}} (\hat{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{F}}_{i-1/2}) + \hat{\mathbf{G}}_i, \quad (19)$$

где дробные индексы $i \pm 1/2$ соответствуют границам ячеек расчетной сетки, $\hat{\mathbf{F}}_{i \pm 1/2}$ и $\hat{\mathbf{G}}_i$ – средние на временном промежутке $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ значения потоков на границах ячеек и источниковых слагаемых в узлах расчетной сетки, соответственно. Для величин $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{G}}$ справедливы следующие соотношения:

$$\hat{\mathbf{F}}(\bar{x}) = \frac{1}{\Delta\bar{t}_n} \int_{\bar{t}_n}^{\bar{t}_{n+1}} \bar{\mathbf{F}}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{t}, \quad \hat{\mathbf{G}}(\bar{x}) = \frac{1}{\Delta\bar{t}_n} \int_{\bar{t}_n}^{\bar{t}_{n+1}} \bar{\mathbf{G}}(\bar{x}, \bar{t}) d\bar{t} \quad (20)$$

Для нахождения величин $\hat{\mathbf{F}}$ и $\hat{\mathbf{G}}$ в (20) применяются различные газодинамические методы. В данной работе использовались численные схемы CSPH-TVD [24, 25] и MUSCL [26, 27], которые основаны на приближенных методах решения задачи Римана [38, 39]: Лакса–Фридрихса (LF), Хартена–Лакса–Ван Лира (HLL, HLLC). Для повышения точности в методах CSPH-TVD и MUSCL применяются различные процедуры предиктор-корректор для продвижения по времени и кусочно-линейная реконструкция сеточных функций. Паразитные осцилляции в численных решениях устраняются посредством использования TVD-ограничителей наклонов сеточных функций [40]. В отличие от MUSCL метод CSPH-TVD содержит два основных этапа: лагранжев и эйлеров. На лагранжевом этапе рассчитываются силы давления и внешние силы с использованием модифицированного SPH-подхода [41], а для продвижения по времени реализуется процедура предиктор-корректор («leapfrog»). На эйлеровом этапе вычисляются потоки физических величин через границы ячеек с использованием HLL-метода решения задачи Римана и TVD-подхода.

Начальные ($\bar{t}_0 = 0$) распределения газодинамических параметров в численном алгоритме (19) задаются в виде: $\bar{u}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{u}_i^0 = 0$, $\bar{p}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{p}_i^0 = 1$, $\bar{\rho}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{\rho}_i^0 = \gamma$, $\bar{T}(\bar{x}_i, 0) \equiv \bar{T}_i^0 = 1$, где $i = 0, \dots, N+1$. В данной работе ограничиваемся рассмотрением двухатомного газа и определяем колебательную температуры \bar{T}_{vi}^0 из (10) при заданных значениях параметров вычислительных экспериментов.

На левой границе расчетной области при $\bar{x}_{1/2} = 0$ задаются граничные условия типа «твердая стенка», что для консервативных переменных в фиктивной ячейке \bar{x}_0 дает: $\bar{\rho}_0^{n+1} = \bar{\rho}_1^{n+1}$, $(\bar{\rho}u)_0^{n+1} = -(\bar{\rho}u)_1^{n+1}$, $\bar{E}_0^{n+1} = \bar{E}_1^{n+1}$, $(\bar{\rho}\varepsilon_v)_0^{n+1} = (\bar{\rho}\varepsilon_v)_1^{n+1}$. На правой границе расчетной области при $\bar{x}_{N+1/2} = \bar{L}$ задаются граничные условия типа «свободное протекание», что для консервативных переменных в фиктивной ячейке \bar{x}_{N+1} дает: $\bar{U}_{N+1}^{n+1} = \bar{U}_N^{n+1}$.

Для генерации звуковых волн задается источник вынужденных колебаний, локализованный в окрестности левой границы расчетной области:

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{t}) = \begin{cases} \hat{g} \sin(\bar{\omega}\bar{t}), & |\bar{x}| \leq \bar{\lambda}/4, \\ 0, & |\bar{x}| > \bar{\lambda}/4, \end{cases} \quad (21)$$

где $\bar{\omega} = \omega\tau_0$ – безразмерная частота генерируемого звука; $\bar{\lambda} = 2\pi/\bar{\omega}$ – безразмерная длина акустической волны; $\hat{g} = 10^{-4}$ – амплитуда возмущающей (внешней) удельной силы.

3.4. Параметры вычислительных экспериментов

Будем рассматривать динамику звуковых волн с частотой $\bar{\omega} = 2\pi$, т.к. гармоники с этой и близкими частотами оказываются наиболее неустойчивыми при учете вязкости и теплопроводности [11, 13, 37]. В качестве фиксированных параметров численной модели примем: $\gamma = 1.4$, $\bar{\mu} = \bar{\chi} = 10^{-4}$, $\bar{a}_1 = 10$, $\bar{a}_2 = \bar{a}_3 = n = m = 0$, $\bar{\theta}_{\min} = 6$. С учетом этих параметров и соотношений (16) дополнительно получим: $C_v \approx 0.0888$, $\tau_T \approx -4.3333$. Варьируемые параметры вычислительных экспериментов и значения акустического инкремента приведены в табл. 1.

Таблица 1

Варьируемые параметры вычислительных экспериментов

No.	S_0	\bar{T}_{v0}	\bar{T}_{ex}	Λ_T	$\bar{\alpha}(\bar{\omega})$	$\bar{\alpha}_\infty$	\bar{L}	N
1	0.1	1.5095	0.3	1.4286	0.0225	0.0258	2000	200 000
2	0.15	1.6567	0.3	1.4286	0.0376	0.0413	1000	100 000
3	0.2	1.7832	0.3	1.4286	0.0528	0.0567	1000	100 000
4	0.25	1.8966	0.3	1.4286	0.0681	0.0721	1000	100 000

Продолжение таблицы 1

No.	S_0	\bar{T}_{v0}	\bar{T}_{ex}	Λ_T	$\bar{\alpha}(\bar{\omega})$	$\bar{\alpha}_\infty$	\bar{L}	N
5	0.5	2.3641	0.3	1.4286	0.1452	0.1494	500	50 000
6	0.75	2.7525	0.3	1.4286	0.2236	0.2266	500	50 000
7	1	3.1035	0.3	1.4286	0.3030	0.3038	500	50 000
8	1.25	3.4323	0.3	1.4286	0.3830	0.3810	500	50 000
9	1.5	3.7463	0.3	1.4286	0.4631	0.4582	500	50 000
10	1.75	4.0498	0.3	1.4286	0.5429	0.5354	500	50 000
11	2	4.3454	0.3	1.4286	0.6222	0.6126	500	50 000
12	2.25	4.6340	0.3	1.4286	0.7004	0.6898	500	50 000
13	2.5	4.9196	0.3	1.4286	0.7772	0.7670	500	50 000
14	2.75	5.2004	0.3	1.4286	0.8522	0.8442	500	50 000
15	3	5.4778	0.3	1.4286	0.9252	0.9215	500	50 000
16	1	3.1035	0.1	1.1111	0.3212	0.3219	500	50 000
17	1	3.1035	0.2	1.25	0.3133	0.3140	500	50 000
18	1	3.1035	0.4	1.6667	0.2892	0.2902	500	50 000
19	1	3.1035	0.5	2	0.2695	0.2711	500	50 000
20	1	3.1035	0.6	2.5	0.2395	0.2425	500	50 000
21	1	3.1035	0.7	3.3333	0.1886	0.1949	500	50 000
22	1	3.1035	0.75	4	0.1472	0.1568	500	50 000
23	1	3.1035	0.8	5	0.0849	0.0997	1000	100 000
24	1	3.1035	0.8517*	6.7440*	-0.0221	0.0000	100	10 000
25	1	3.1035	0.9	10	-0.2017	-0.1860	100	10 000

В строке 24 табл. 1 (отмечены «*») приведены критические значения параметров \bar{T}_{ex}^* и Λ_T^* , при которых условия для развития акустической неустойчивости в неравновесном газе исчезают и звуковые волны затухают. Критические значения этих параметров для фиксированной степени неравновесности среды можно найти из (16) и (18) при условии $\bar{\alpha}_\infty = 0$.

4. Результаты численного моделирования

4.1. Влияние нагрева

Рассмотрим влияние начальной степени неравновесности среды S_0 , которая определяется удельной мощностью нагрева Q_0 , на нелинейную динамику акустической неустойчивости в колебательно-возбужденном газе. В рамках линейного анализа устойчивости [11, 13, 37] было показано, что акустический инкремент, высокочастотная оценка которого приведена в (18), линейным образом зависит от S_0 . Детальное сравнение линейной модели с результатами численного газодинамического моделирования в рамках нелинейной модели проводилось в работе [36] для различных значений звуковых частот ($\bar{\omega} = \pi/2, \pi, 2\pi$) и волнового разрешения ($\bar{\lambda}/\Delta\bar{x} = 10, \dots, 100$). Было получено, что относительное отклонение величины акустического инкремента в линейной и численной моделях для $\bar{\lambda}/\Delta\bar{x} > 50$ оказывается менее 1 %.

В численных экспериментах (моделях) 1–15 из табл. 1 варьируется величина начальной степени неравновесности среды S_0 при фиксированных значениях внешней температуры \bar{T}_{ex} . Волновое разрешение во всех вычислительных экспериментах составляет $\bar{\lambda}/\Delta\bar{x} = 100$, что позволяет существенно уменьшить влияние численной (схемной) вязкости на динамику звуковых волн. Для безразмерного декремента затухания звуковых волн за счет схемной

вязкости имеем: $\bar{\alpha}_a \approx -5 \times 10^{-5}$. На рис. 1 для $S_0 = 0.5$ (модель 5 в табл. 1) показана эволюция акустической неустойчивости от квазилинейного режима до стадии нелинейного насыщения и первоначального нелинейного взаимодействия ударных фронтов в окрестности правой границы волнового пакета.

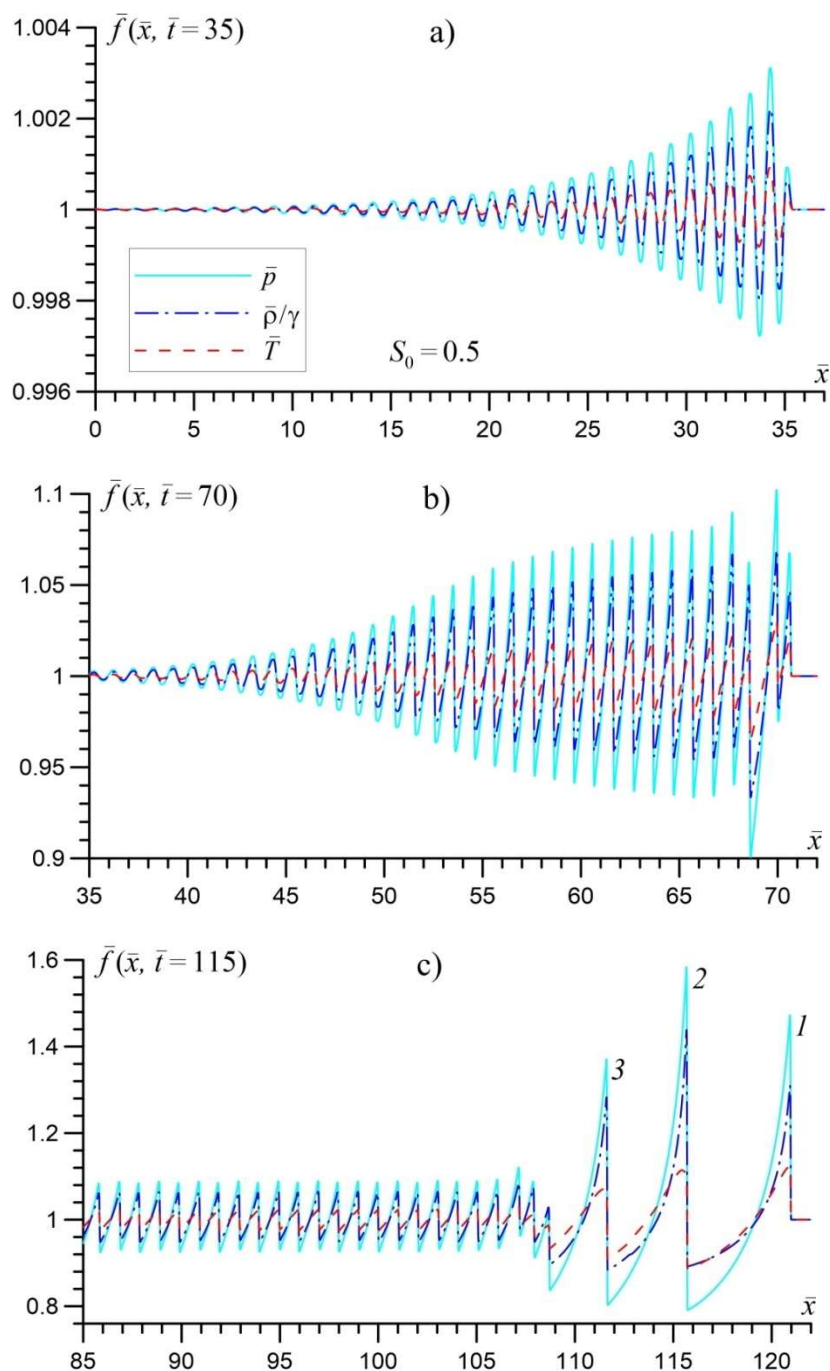


Рис. 1. Линейная (а) и нелинейная (б, с) стадии эволюции акустической неустойчивости. Показаны пространственные распределения давления, плотности и температуры в различные моменты времени для модели 5 (см. табл. 1). Цифрами на рисунке отмечены положения первых трех УВИ

Линейная стадия развития акустической неустойчивости, на которой амплитуда звуковых волн увеличивается по экспоненциальному закону, показана на рис. 1, а в момент времени $\bar{t} = 35$. Как видно из этого рисунка, сгенерированный источником звука (21) волновой пакет содержит 35 максимумов и с хорошей точностью аппроксимируется гармонич-

ческой функцией $\tilde{f}(\bar{x}) = \hat{f}_0 \exp(\bar{\alpha}\bar{x}) \sin(\bar{k}\bar{x})$ [36], где $\bar{\alpha} \approx 0.1452$, $\bar{k} \approx 1$ – безразмерное волновое число, $\hat{f}_0 \approx 2 \times 10^{-5}$ – начальная амплитуда возмущений. Отклонения от экспоненциального закона заметны только для первого максимума и минимума волнового пакета, которые граничат с невозмущенной средой.

Квазилинейная и нелинейная стадии развития акустической неустойчивости представлены на рис. 1, *b* в момент времени $\bar{t} = 70$. Из этого рисунка видно, что при амплитуде возмущений больше 1 % происходит нелинейное укрупнение фронтов волнового пакета при $\bar{x} > 40$. На расстояниях от источника $\bar{x} > 50$ происходит деформация синусоидального профиля звуковой волны в пилообразный. При $\bar{x} > 60$ хорошо заметен эффект нелинейного насыщения амплитуды возмущений, который обусловлен стабилизацией акустической неустойчивости из-за изменения газодинамических параметров среды в волне. Максимальное относительное отклонение параметров течения в волне от начальных стационарных значений составляет порядка $2.5 \div 10$ %, что оказывается достаточным для нарушения условий развития акустической неустойчивости. Сформировавшийся пилообразный волновой пакет представляет собой систему слабых ударных волн (УВ) с пространственным масштабом (расстоянием между фронтами) $\sim \lambda$. В окрестности правой границы волнового пакета ($\bar{x} \sim 70$) наблюдается начальная стадия нелинейного взаимодействия первых трех УВ, которая приводит к изменению их амплитуды и скорости.

Нелинейная динамика акустической неустойчивости показана на рис. 1, *c*. На этом этапе эволюции к моменту времени $\bar{t} = 115$ формируются две характерные нелинейные структуры: 1) пилообразная система слабых УВ, возникающая из-за нелинейного укрупнения профиля звуковой волны; 2) система ударно-волновых импульсов (УВИ), которая образуется в процессе нелинейного слияния слабых ударных волн вблизи правой границы волнового пакета. По сравнению с пилообразной системой слабых УВ амплитуда УВИ оказывается в 4–5 раз больше, а пространственный масштаб УВИ (расстоянием между фронтами) также увеличивается в 4–5 раз. Причиной увеличения расстояния между фронтами является различная скорость распространения УВ. Слабые ударные волны в пилообразной структуре на рис. 1*c* распространяются со скоростью $\bar{u}_{sh} \approx 1.01$. Скорости распространения первых трех ударно-волновых импульсов: $\bar{u}_{sh(1)} \approx 1.2$, $\bar{u}_{sh(2)} \approx 1.16$ и $\bar{u}_{sh(3)} \approx 1.08$.

Структура течения между фронтами в пилообразной системе слабых УВ имеет практически линейный профиль, а в системе ударно-волновых импульсов распределение параметров течения между фронтами имеет более сложный нелинейный профиль (приблизительно гиперболический).

Отметим, что структура ударно-волновых импульсов качественно похожа как на структуру слабых ударных волн в неравновесном газе [12], полученных в приближении квадратичной нелинейности, так и детонационных волн в химических активных средах [21], рассчитанных на основе методов численного газодинамического моделирования.

На рис. 2 для демонстрации эффектов нарастания амплитуды возмущений, нелинейного насыщения и взаимодействия ударных волн показаны зависимости амплитуды и скорости волн от расстояния до источника для первых четырех максимумов волнового пакета. Можно выделить три характерных стадии эволюции акустической неустойчивости (рис. 2, *a*):

- линейная стадия ($\bar{x} < 40$) с экспоненциальным законом роста амплитуды возмущений $\propto \exp(0.1452 \cdot \bar{x})$, которая с хорошей точностью ($\sim 10^{-5} \div 10^{-4}$) согласуется с аналитическим решением линейной модели [37];
- стадия нелинейного взаимодействия (слияния) УВ на правой границе волнового пакета ($40 < \bar{x} < 140$), на которой из пилообразной системы слабых ударных волн формируются ударно-волновые импульсы;
- стадия нелинейного насыщения амплитуды УВИ ($\bar{x} > 140$).

Рассмотрим более детально процесс слияния на второй стадии (см. рис. 2, *a*). Нумерация максимумов ведется справа налево от первого фронта волны на границе с невозмущенным газом.

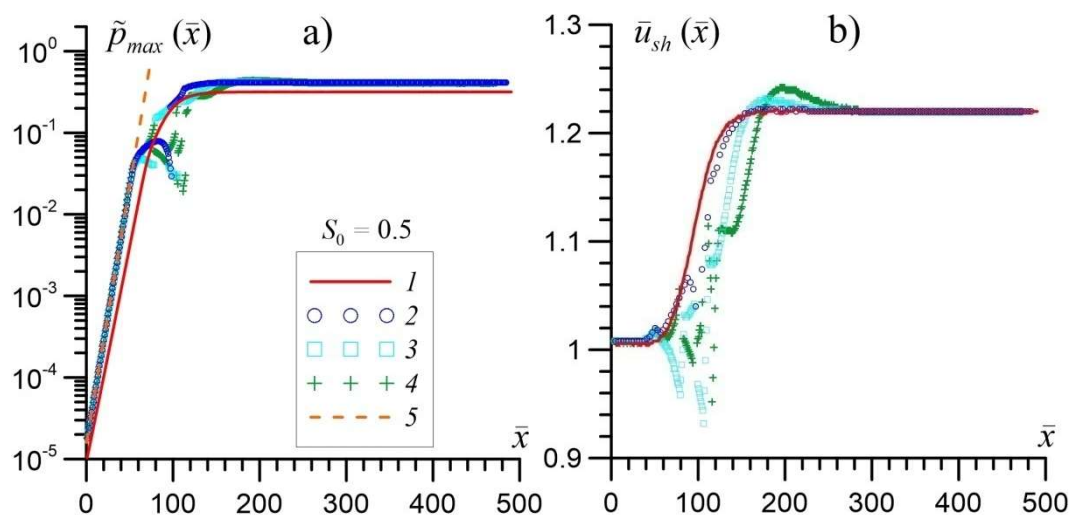


Рис. 2. Зависимость максимальной амплитуды возмущенного давления в волне (а) и скорости распространения волновых фронтов (б) от расстояния до источника. Показаны значения для первых 4-х максимумов (цифры 1–4 на рисунке) волнового пакета для модели 5 (см. табл. 1). Штриховая линия 5 – асимптотическое решение $\propto \exp(\bar{\alpha}\bar{x})$ для амплитуды звуковых волн в линейной модели с акустическим инкрементом $\bar{\alpha} \approx 0.1452$

Первый максимум всегда остается первым, а в результате слияния 3-го и 2-го максимумов с 4-м, последний становится вторым по счету и образуются два первых УВИ. Далее процесс продолжается аналогичным образом для последующих максимумов с образованием новых ударно-волновых импульсов. Данный процесс слияния проявляется на рис. 2, а в виде скачков амплитуды возмущенного давления \tilde{p}_{max} для различных максимумов. На рис. 2, б показана аналогичная эволюция скоростей распространения волновых фронтов для различных максимумов, и видно, что после начала процесса слияния УВ скорость фронтов увеличивается приблизительно на $22 \div 24\%$ и отличается для разных максимумов. При $\bar{x} > 300$ скорости волновых фронтов выравниваются на уровне $\bar{u}_{sh} \approx 1.22$. Таким образом, на конечной стадии эволюции акустической неустойчивости образуется квазистационарная нелинейная структура ударно-волновых импульсов, которая распространяется с постоянной скоростью и имеет практически неизменную амплитуду.

На рис. 3 для различных значений начальной степени неравновесности среды показана квазистационарная система ударно-волновых импульсов, сформировавшаяся на конечной стадии развития акустической неустойчивости. Видно, что ростом величины S_0 увеличивается интенсивность и скорость УВИ, а также уменьшается расстояние между фронтами ударных волн. Эффект возрастания скорости УВИ с увеличением начальной степени неравновесности среды хорошо заметен на рис. 3 по времени достижения волновым пакетом границы расчетной области (окрестности точки $\bar{x} = 494$). Так для скорости распространения УВИ при $S_0 = 0.5$ имеем $\bar{u}_{sh} \approx 1.22$, а при $S_0 = 1$ и $S_0 = 2$ получаем соответственно $\bar{u}_{sh} \approx 1.45$ и $\bar{u}_{sh} \approx 1.84$. Эффект уменьшения пространственного масштаба УВИ можно определить по количеству максимумов на рис. 3. Так для последовательности значений $S_0 = (0.5, 1, 2)$ имеем соответственно 9, 11 и 12 максимумов, тогда для соответствующей последовательности пространственного масштаба УВИ получаем: $\bar{\lambda}_{sh} = (5.8, 4.98, 4.55)$. Отметим, что из приведенных оценок и рис. 3 следует нелинейный характер зависимости интенсивности, скорости и пространственного масштаба УВИ от величины S_0 .

Нелинейная стадия развития акустической неустойчивости сопровождается существенным изменением начальных распределений газодинамических параметров. Наиболее сильно этот эффект проявляется на стадии образования ударно-волновых импульсов (см. рис. 3).

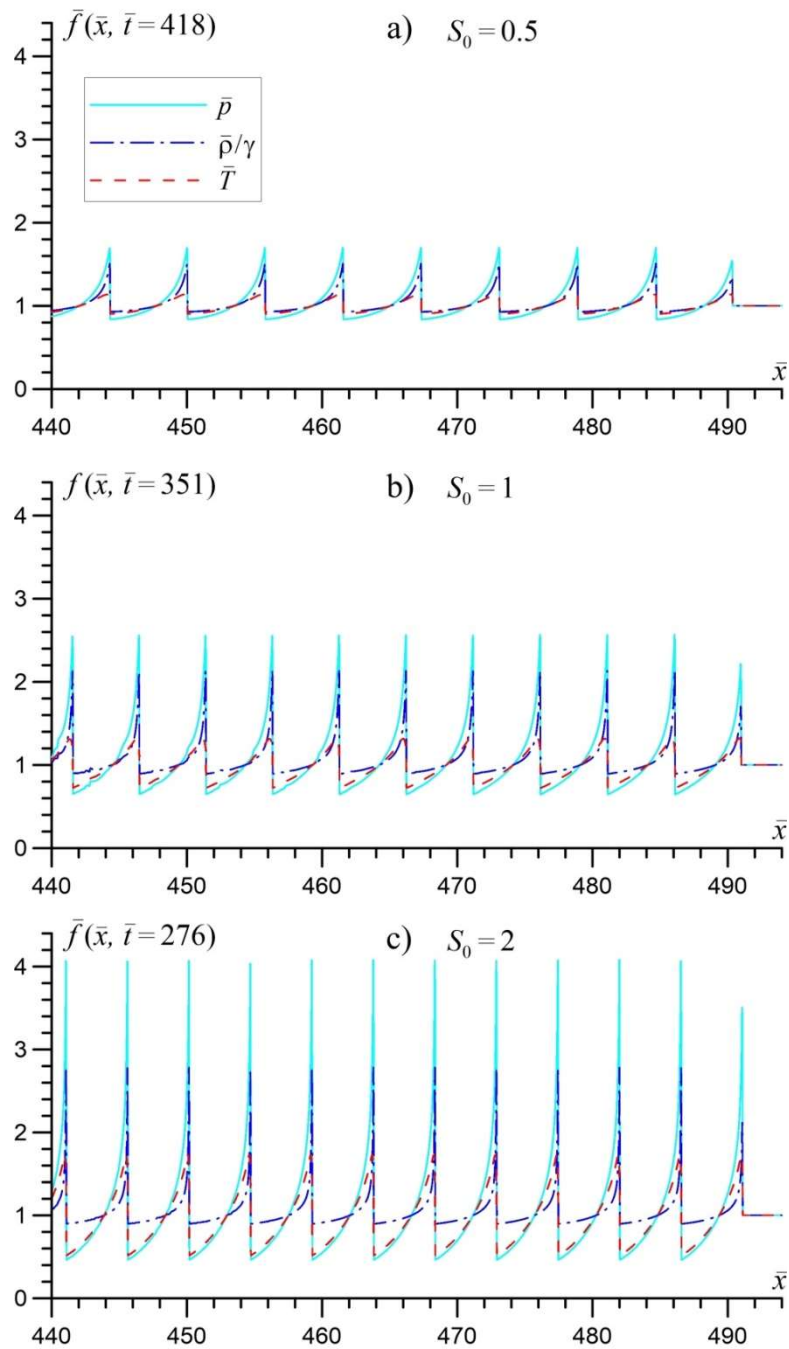


Рис. 3. Квазистационарная система ударно-волновых импульсов (УВИ) на конечной нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости. Показаны пространственные распределения давления, плотности и температуры для различных вычислительных экспериментов из табл. 1: а) модель 5; б) модель 7; в) модель 11

На рис. 4 для различных моделей показаны пространственные распределения локальной степени неравновесности среды $S(\bar{x})$, термодинамической $\bar{T}(\bar{x})$ и колебательной $\bar{T}_v(\bar{x})$ температур. Область представления ограничена отрезком $475 \leq \bar{x} \leq 494$ и содержит от 2-х до 3-х УВИ в зависимости от модели. Видно, что величины $S(\bar{x})$ и $\bar{T}_v(\bar{x})$ находятся в противофазе с температурой $\bar{T}(\bar{x})$, т.е. за фронтом УВ термодинамическая температура достигает своего максимума, а колебательная температура и локальная степень неравновесности среды, наоборот, достигают своих минимальных значений. Перед фронтом УВ реализуется обратная ситуация. На правой границе в области невозмущенного течения (окрестность точки $\bar{x} = 494$) можно определить начальные значения газодинамических параметров

ров, что позволяет наглядно оценить изменение структуры течения в УВИ по сравнению с начальным состоянием.

С увеличением интенсивности ударно-волновых импульсов возрастает и локальная степень неравновесности среды (S) перед фронтом УВ в области пониженной температуры, что соответственно приводит и к увеличению отношения \bar{T}_v/\bar{T} . В области повышенной температуры за фронтом УВ с ростом интенсивности УВИ величина S и \bar{T}_v/\bar{T} , наоборот, уменьшаются.

Отметим, что система УВИ, сформировавшихся на конечной стадии эволюции акустической неустойчивости, имеет качественно аналогичную структуру, как и система автоволновых импульсов, полученных ранее в работах [11, 14] на основе численного решения акустического уравнения с учетом квадратичной нелинейности.

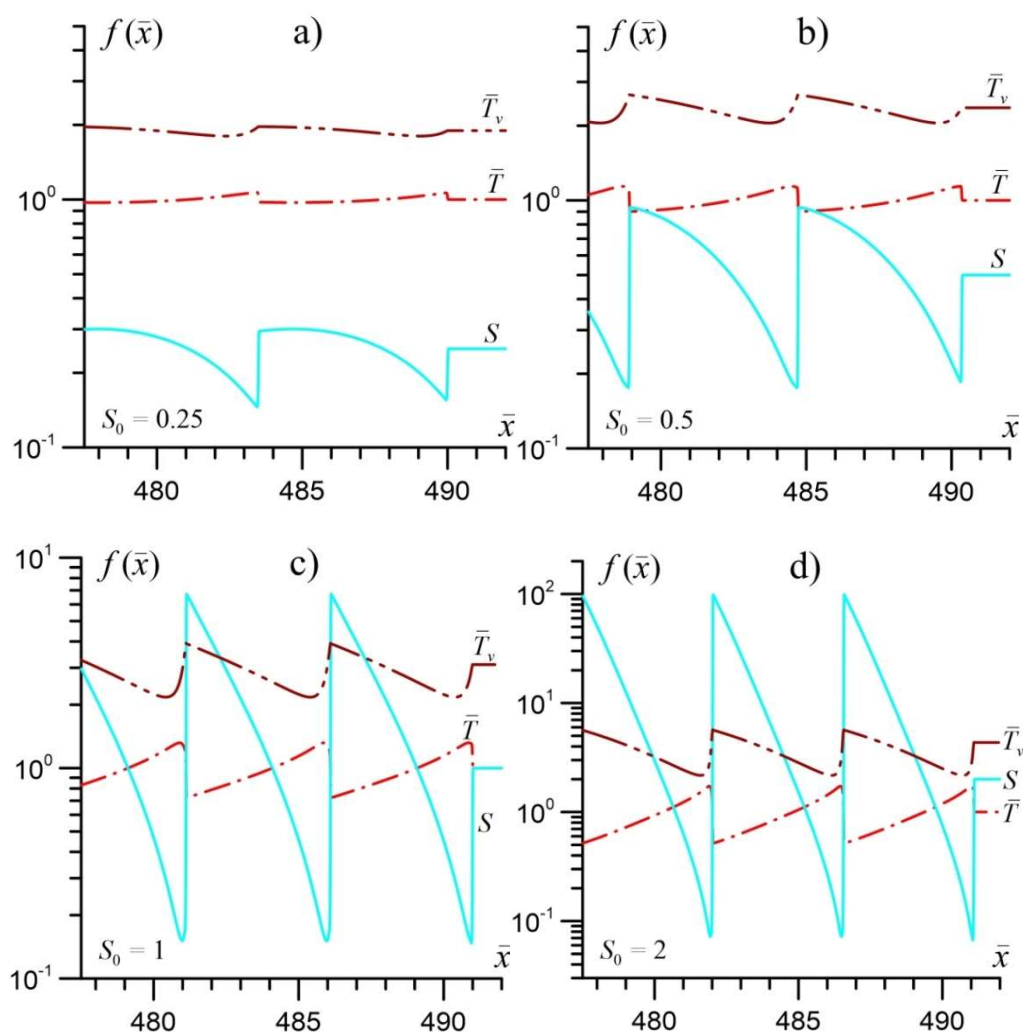


Рис. 4. Структура течения в системе ударно-волновых импульсов (УВИ) в окрестности правой границы волнового пакета. Показаны пространственные распределения температуры \bar{T} , колебательной температуры \bar{T}_v и локальной степени неравновесности среды S для различных вычислительных экспериментов из табл. 1: а) модель 4 при $\bar{t} = 462$; б) модель 5 при $\bar{t} = 418$; в) модель 7 при $\bar{t} = 351$; д) модель 11 при $\bar{t} = 276$

Структура ударных волн, сформировавшихся на конечной нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости, показана на рис. 5 для первых двух УВИ в окрестности правой границы волнового пакета. Переходя в систему отсчета, связанную с движущимся со скоростью \bar{u}_{sh} фронтом УВ, получаем, что газ натекает на фронт УВ справа со сверхзвуковой скоростью $\bar{u}_* = |\bar{u} - \bar{u}_{sh}| > \bar{c}_s$ и числом Маха $M = \bar{u}_*/\bar{c}_s > 1$. Для модели 11 с $S_0 = 2$,

представленной на рис. 5, скорость фронтов УВ составляет $\bar{u}_{sh} \approx 1.84$, и в натекающем потоке газа получаем $M_1 \approx 1.84$ и $M_2 \approx 2.85$ для первого и второго УВИ соответственно. Положение фронта ударных волн, проходящих через звуковую точку $\bar{u}_* = \bar{c}_s$, показано штриховой линией на рис. 5. В численных экспериментах ширина фронта УВ составляет 3–4 расчетных ячейки. Для выбранного пространственного разрешения численных моделей в табл. 1 получаем следующую оценку ширины фронта ударных волн: $\bar{l}_{sh} \approx 0.03 \div 0.04$. Последующие ударно-волновые импульсы в волновом пакете имеют аналогичную структуру УВ. Отметим, что в пилообразной системе слабых ударных волн (см. рис. 1, *b, c*) газ также натекает на фронт УВ со сверхзвуковой скоростью, но с меньшими числами Маха: $M \approx 1.05 \div 1.1$.

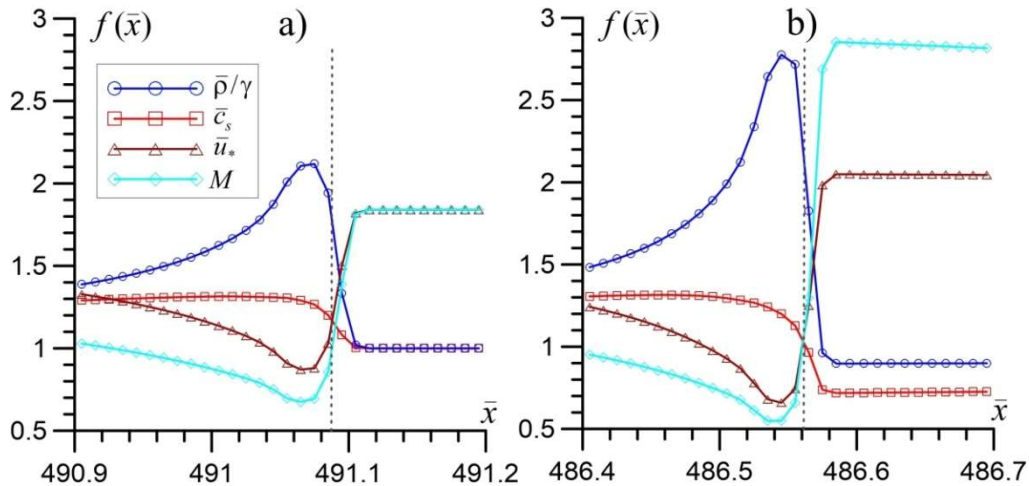


Рис. 5. Структура ударных волн в окрестности первых двух максимумов (фронтов УВИ) на правой границе волнового пакета (см. рис. 3, *c*): а) первый максимум, граничащий с невозмущенной средой; б) второй максимум. Для модели 11 с $S_0 = 2$ показаны пространственные распределения плотности $\bar{\rho}/\gamma$, скорости звука \bar{c}_s , скорости натекающего газа на фронт ударной волны $\bar{u}_* = |\bar{u} - \bar{u}_{sh}|$ и соответствующего числа Маха $M = \bar{u}_*/\bar{c}_s$, где $\bar{u}_{sh} \approx 1.84$ – скорость фронта УВ. Маркерами на кривых отмечены узлы расчетной сетки, а вертикальной точечной линией показано положение фронта УВ

На рис. 6 показано влияние начальной степени неравновесности среды (модели 1–15 из табл. 1) на параметры течения за фронтом УВ (L -индекс) и перед фронтом УВ (R -индекс) в системе ударно-волновых импульсов на конечной стадии эволюции акустической неустойчивости. Видно, что все параметры течения в системе УВИ, представленные на рис. 6, нелинейным образом зависят от значения величины S_0 . Давление \bar{p}_L , плотность $\bar{\rho}_L$ и температура \bar{T}_L за фронтом УВ возрастают с увеличением S_0 , а перед фронтом УВ величины \bar{p}_R , $\bar{\rho}_R$ и \bar{T}_R , наоборот, убывают (см. рис. 6, *a*). Для этих величин всегда выполнены условия $\bar{p}_L > \bar{p}_R$, $\bar{\rho}_L > \bar{\rho}_R$ и $\bar{T}_L > \bar{T}_R$. Значения колебательных температур $\bar{T}_{v,L}$ и $\bar{T}_{v,R}$ возрастают с увеличением S_0 , но для них всегда выполняется обратное условие $\bar{T}_{v,L} < \bar{T}_{v,R}$ (см. рис. 6, *a*). Как видно из рис. 6, *b*, величина локальной неравновесности среды перед фронтом УВ (S_R) быстро возрастает с увеличением S_0 , достигая значений $S_R \approx 520$ при $S_0 = 3$. Значение локальной неравновесности среды за фронтом УВ (S_L) сначала незначительно возрастает с увеличением S_0 , а затем при $S_0 > 0.75$ начинает быстро убывать. Также как и для колебательных температур, всегда выполняется условие $S_L < S_R$. Скорость распространения УВИ и число Маха, натекающего на фронт УВ газа, увеличиваются с ростом начальной степени неравновесности среды (см. рис. 6, *b*). На рис. 6, *b* дополнительно показаны зависимости $\lambda_{sh}(S_0)$ и $\omega_{sh}(S_0)$, которые демонстрируют эффекты сгущения (уменьшения расстояния между фронтами УВ) и увеличения частоты прохождения ударно-волновых импульсов с ростом величины S_0 .

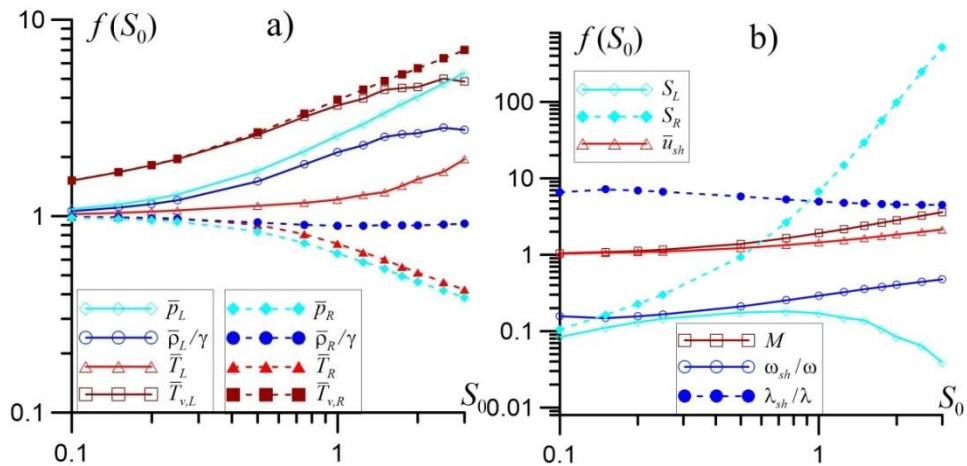


Рис. 6. Зависимость параметров течения в системе УВИ от начальной степени неравно-
 весности среды S_0 . Показаны значения параметров течения за фронтом УВ (L -индекс) и
 перед фронтом УВ (R -индекс): а) давление, плотность, температура, колебательная тем-
 пература; б) локальное значение степени неравности среды, скорость УВ, число Маха
 натекающего на фронт УВ газа, относительные длина волны λ_{sh}/λ (расстояние между
 фронтами УВ) и частота ω_{sh}/ω системы УВИ

4.2. Влияние охлаждения

Рассмотрим влияние относительной температуры внешней среды \bar{T}_{ex} , которая опреде-
 ляет модель охлаждения $\Lambda(T)$, т.е. значение параметра Λ_T в (16). Из выражения (18) сле-
 дует, что с увеличением параметра Λ_T (\bar{T}_{ex} при этом также возрастает) величина акустиче-
 ского инкремента уменьшается и становится отрицательной при превышении некоторого
 порогового значения ($\Lambda_T > \Lambda_T^*$ или $\bar{T}_{ex} > \bar{T}_{ex}^*$). В численных моделях 16–25 из табл. 1 варьи-
 руется величина внешней температуры \bar{T}_{ex} при фиксированных значениях S_0 .

При различных значениях \bar{T}_{ex} структура течения на нелинейной стадии развития аку-
 стической неустойчивости качественно не меняется, т.е. волновой пакет проходит все ста-
 дии эволюции, описанные в пп. 4.1. На рис. 7 показано влияние внешней температуры \bar{T}_{ex}
 (модели 16–23 из табл. 1) на параметры течения за фронтом УВ (L -индекс) и перед фронтом
 УВ (R -индекс) в системе ударно-волновых импульсов на конечной стадии эволюции аку-
 стической неустойчивости.

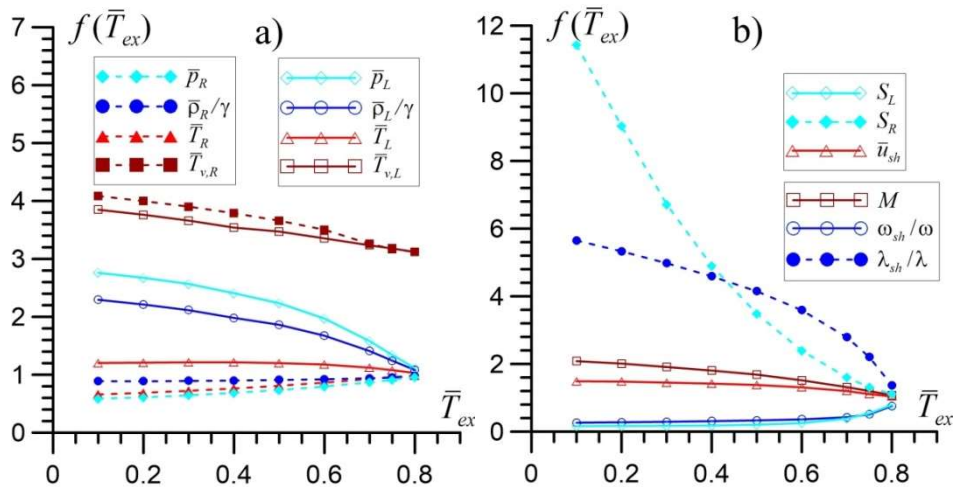


Рис. 7. Зависимость параметров течения в системе УВИ от внешней температуры \bar{T}_{ex} .
 Показаны значения параметров течения за фронтом УВ (L -индекс) и перед фронтом УВ
 (R -индекс): а) давление, плотность, температура, колебательная температура; б) локаль-
 ное значение степени неравности среды, скорость УВ, число Маха натекающего на
 фронт УВ газа, относительные длина волны λ_{sh}/λ (расстояние между фронтами УВ) и
 частота ω_{sh}/ω системы УВИ

Видно, что все параметры течения в системе УВИ, представленные на рис. 7, нелинейным образом зависят от величины \bar{T}_{ex} . С увеличением значения \bar{T}_{ex} амплитуда ударных волн уменьшается, т.к. значения параметров течения (\bar{p}_L , $\bar{\rho}_L$, \bar{T}_L) за фронтом УВ убывают, а перед фронтом УВ величины \bar{p}_R , $\bar{\rho}_R$ и \bar{T}_R , наоборот, возрастают (рис. 7, а). Значения колебательных температур $\bar{T}_{v,L}$ и $\bar{T}_{v,R}$ убывают с увеличением \bar{T}_{ex} (рис. 7, а). Как видно из рис. 7, б, с увеличением параметра \bar{T}_{ex} величина S_R быстро убывает, а S_L медленно возрастает. Кроме того, с ростом \bar{T}_{ex} скорость распространения УВИ, число Маха натекающего на фронт УВ газа и расстояние между фронтами УВ уменьшаются, а частота прохождения ударно-волновых импульсов увеличивается.

В численных экспериментах 24 и 25 (см. табл. 1) звуковые волны затухают ($\bar{\alpha} < 0$) и соответственно нелинейные волновые структуры (УВИ) не образуются. На рис. 8 показана динамика затухающих звуковых волн в моделях 24–25.

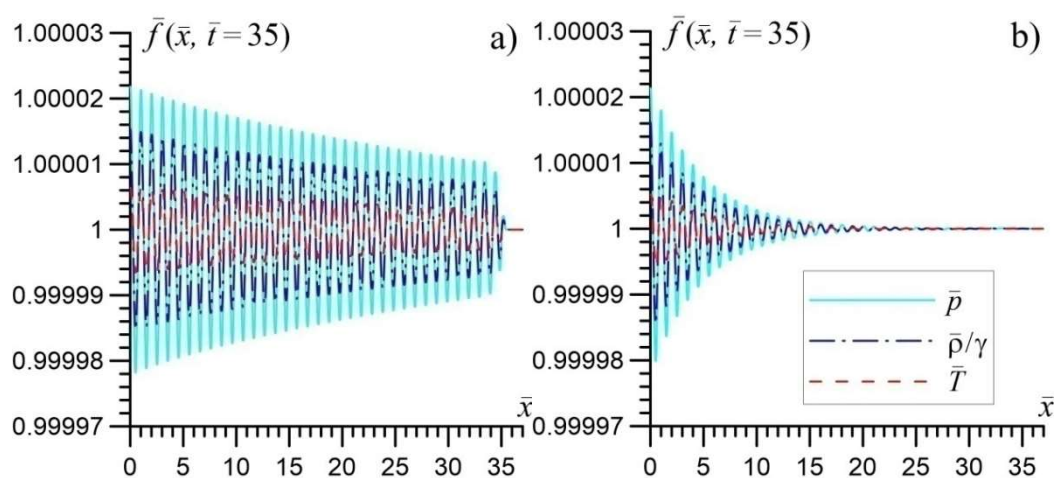


Рис. 8. Затухание звуковых волн в неравновесном газе с $\bar{\alpha} < 0$ (акустический декремент). Показаны распределения давления, плотности и температуры в акустической волне для двух вычислительных экспериментов из табл. 1: а) модель 24; б) модель 25

4. Заключение

Сформулируем основные результаты работы:

1. Построена численная модель динамики неравновесного колебательно-возбужденного газа с учетом вязкости и теплопроводности, которая позволяет рассматривать различные модели времени релаксации, нагрева и охлаждения. Выбранный способ обезразмеривания основных уравнений позволяет сократить количество калибровочных параметров численной модели.
2. Разработан вычислительный инструмент (программный комплекс), основанный на газодинамических методах сквозного счета CSPH-TVD и MUSCL, для исследования динамики распространения неустойчивых звуковых волн в колебательно-возбужденном газе с различными моделями времени релаксации, нагрева и охлаждения. Этот инструмент позволяет с высокой точностью и пространственным разрешением изучать различные стадии последовательной эволюции акустической неустойчивости.
3. Проведено детальное исследование динамики звуковых волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе на линейной и нелинейной стадиях развития акустической неустойчивости. Показано, что для малых возмущений (относительная амплитуда $\sim 10^{-4} \div 10^{-3}$) результаты численного моделирования с высокой точностью совпадают с выводами линейного анализа устойчивости (линейной модели), т.е. относительное отклонение значений акустического инкремента в численной и линейной моделях составляет менее 10^{-4} . На нелинейной стадии эволюции акустической неустойчивости за счет эффекта нелинейного укручения волнового профиля сначала формируется пилообраз-

ная система слабых ударных волн с относительной амплитудой $\sim 1 \div 50 \%$, а затем в результате нелинейного взаимодействия (слияния) ударных волн (УВ) на правой границе волнового пакета образуется система ударно-волновых импульсов (УВИ) с относительной амплитудой $\sim 10 \div 500 \%$. Образовавшаяся таким образом система УВИ распространяется в неравновесном газе с постоянной скоростью и практически неизменной амплитудой, что позволяет сделать вывод о квазистационарности этой нелинейной структуры и определить ее как конечную стадию эволюции акустической неустойчивости.

4. Исследовано влияние начальной степени неравновесности среды, которая определяется удельной мощностью нагрева источника накачки при фиксированных значениях температуры и времени релаксации, на параметры течения в системе УВИ. Показано, что с увеличением начальной степени неравновесности среды возрастает амплитуда и скорость УВИ. Характерной особенностью структуры течения в системе УВИ является то, что пространственные распределения термодинамических параметров газа (давления, плотности и температуры) находятся в противофазе с колебательной температурой и локальной (текущей) степенью неравновесности среды, т.е. значения последних перед фронтом ударной волны (область минимума в УВИ) достигают своих максимальных значений, а за фронтом УВ (область максимума в УВИ) – минимальных значений. Кроме того, кинематический анализ показал, что с ростом амплитуды и скорости УВИ происходит сгущение (уменьшение расстояния между фронтами волн) и увеличение частоты прохождения УВИ через неравновесный газ.
5. Изучено влияние температуры внешней среды, которая определяет модель охлаждения, связанную с поперечным потоком тепла в плоском волноводе. Показано, что с ростом температуры внешней среды ($T_{ex} \rightarrow T_0$) при фиксированных значениях других параметров течения происходит уменьшение как акустического инкремента, так и амплитуды и скорости УВИ. Кроме того, кинематический анализ показал, что с ростом температуры внешней среды расстояние между фронтами УВ уменьшаются, а частота прохождения ударно-волновых импульсов увеличивается.

В данной работе для детального исследования линейной и нелинейной стадий эволюции акустической неустойчивости и демонстрации эффективности разработанной численной модели все вычислительные эксперименты проведены для значений параметров, соответствующих двухатомному газу H_2 при температуре $T_0 \approx 1000\text{K}$ и атмосферном давлении [35]. Отметим, что построенная численная модель может быть использована и для исследования динамики акустической неустойчивости в других газах как двухатомных, так и многоатомных с несколькими колебательными модами. Для этого необходимо предварительно определить полную колебательную энергию неравновесного газа и выделить минимальную из характеристических колебательных температур. Кроме того, в некотором приближении разработанный вычислительный инструмент может применяться и для смеси газов. Для этого также необходимо предварительно рассчитать усредненные/эффективные значения параметров численной модели для смеси газов. Это позволит сначала на качественном уровне определить основные закономерности эволюции акустической неустойчивости в таких средах, а затем уточнить полученные решения, используя более сложные многокомпонентные модели с учетом химических реакций [9, 21, 42]. Следует также отметить, что разработанная численная модель динамики неравновесного акустически активного газа может быть обобщена на случай произвольных моделей нагрева и охлаждения, которые при учете радиационных потерь и химических реакций могут сложным образом зависеть от плотности и температуры [4, 6, 7, 16, 19, 27, 43–46].

Благодарности и ссылки на гранты

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (РНФ) № 23-21-00401, <https://rscf.ru/project/23-21-00401/>

Литература

1. Kogan E. Y., Molevich N. E. Sound waves in a nonequilibrium molecular gas // *Soviet Physics Journal*. 1986. V. 29. Pp. 547–551.
2. Молевич Н. Е., Ораевский А. Н. Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1988. Т. 94. № 3. С. 128–132.
3. Осипов А. И., Уваров А. В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // *Успехи физических наук*. 1992. Т. 162. № 11. С. 1–42.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199211a.0001>
4. Молевич Н. Е. Дисперсия скорости звука и вторая вязкость в средах с неравновесными химическими реакциями // *Акустический журнал*. 2003. Т. 49. № 2. С. 229–232.
5. Zavershinskii D., Molevich N., Belov S., Riashchikov D. Over stability of acoustic waves in heat-releasing gaseous media // *AIP Conference Proceedings*. 2020. V. 2304, issue 1, article id. 020028.
<https://doi.org/10.1063/5.0034849>
6. Напалков О. Г., Кустова Е. В., Сайфутдинов А. И. Исследование СВЧ разряда в воздухе на основе расширенной гидродинамической модели // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т. 24, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-5/articles/1063/>
7. Суржиков С. Т. Применение квазистационарных eRC-моделей для расчета неравновесного излучения ударных волн при скорости порядка 10 км/с // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т. 23, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-4/articles/1015/>
8. Литвинцев А. С., Молчанова А. Н., Ващенко П. В., Кашковский А. В., Бондарь Е. А. Влияние поверхностных химических реакций на высотную аэротермодинамику модельной капсулы // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т. 24, вып. 2.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-2/articles/1035/>
9. Шоев Г. В., Бондарь Е. А., Облапенко Г. П., Кустова Е. В. Разработка и апробация методики численного моделирования термически неравновесных диссоциирующих течений в ANSYS-Fluent // *Теплофизика и аэромеханика*. 2016. Т. 23. № 2. С. 159–171.
10. Осипов А. И., Уваров А. В. Неравновесный газ: проблемы устойчивости // *Успехи физических наук*. 1996. Т. 166. № 6. С. 639–650.
11. Макарян В. Г., Молевич Н. Е. Структура слабых ударных волн в стационарно неравновесной среде // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2005. Т. 3.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2005-3/articles/84/>
12. Макарян В. Г., Молевич Н. Е. Слабые ударные волны в неравновесных средах с отрицательной дисперсией // *Журнал технической физики*. 2005. Т. 75, вып. 6. С. 13–18.
13. Makaryan V. G., Molevich N. E. Stationary shock waves in nonequilibrium media // *Plasma Sources Science and Technology*. 2007. V. 16. № 1. Pp. 124–131.
14. Molevich N. E., Galimov R. N., Makaryan V. G., Zavershinskii D. I. General nonlinear acoustical equation of relaxing media and its stationary solutions // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2013. V. 133. № 5. Pp. 3555–3563.
15. Nelson D., Springel V., Pillepich A. et al. The IllustrisTNG simulations: public data release // *Computational Astrophysics and Cosmology*. 2019. V. 6. № 2. Pp. 1–29.
16. Crain R. A., van de Voort F. Hydrodynamical Simulations of the Galaxy Population: Enduring Successes and Outstanding Challenges // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 2023. V. 61. Pp. 473–515.
17. Елизарова Т. Г., Злотник А. А., Истомина М. А. Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // *Астрономический журнал*. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21.

18. Khoperskov S., Zinchenko I., Avramov B., Khrapov S., Berczik P., Saburova A., Ishchenko M., Khoperskov A., Pulsoni C., Venichenko Yu., Bizyaev D., Moiseev A. Extreme kinematic misalignment in IllustrisTNG galaxies: the origin, structure, and internal dynamics of galaxies with a large-scale counterrotation // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021. V. 500. № 3. Pp. 3870–3888.
19. Khoperskov S., Haywood M., Snaith O., Di Matteo P., Lehnert M., Vasiliev E., Naroenkov S., Berczik P. Bimodality of $[\alpha\text{Fe}]-[\text{Fe}/\text{H}]$ distributions is a natural outcome of dissipative collapse and disc growth in Milky Way-type galaxies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 2021. V. 501. Pp. 5176–5196.
20. Бутенко М. А., Беликова И. В., Кузьмин Н. М., Хохлова С. С., Иванченко Г. С., Тен А. В., Кудина И. В. Численное моделирование внешней спиральной структуры галактик: влияние неосесимметрии темного гало на форму газового диска // *Математическая физика и компьютерное моделирование*. 2022. Том 25. № 3. С. 73–83.
21. Панасенко А. В. Результаты расчетов распространения детонационных волн в канале сводородосодержащей смесью газов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2023. Т.24, вып. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-3/articles/1045/>
22. Хоперсков А. В., Храпов С. С., Недугова Е. А. Диссипативно-акустическая неустойчивость в аккреционных дисках на нелинейной стадии // *Письма в астрономический журнал*. 2003. Т. 29. № 4. С. 288–299.
23. Афанасьев В. Л., Додонов С. Н., Храпов С. С., Мусцовой В. В., Моисеев А. В. Формирование структур конусов ионизации в галактиках с активными ядрами: II. Нелинейное гидродинамическое моделирование // *Астрофизический бюллетень*. 2007. Т. 62. № 1. С. 2–31.
24. Khrapov S., Khoperskov A. Dynamics of unstable sound waves in a non-equilibrium medium at the nonlinear stage // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. V. 973. id.012007. Pp.1–11. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012007
25. Khrapov S., Khoperskov A., Khoperskov S. Lagrange-Eulerian method for numerical integration of the gas dynamics equations: parallel implementation on GPUs // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. V.1392. id.012041. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012041
26. van Leer B. Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method // *J. Comput. Phys*. 1979. V. 32. Pp.101–136.
27. Khoperskov S. A., Vasiliev E. O., Sobolev A. M., Khoperskov A. V. The simulation of molecular clouds formation in the Milky Way // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2013. V. 428. Pp. 2311–2320.
28. Landau L., Teller E. Theory of sound dispersion // *Physik Zeitschrift der Sowjetunion*. 1936. V. 10. Pp. 34–43.
29. Косарева А. А., Нагнибеда Е. А. Диссоциация и колебательная релаксация в пространственно однородной смеси $\text{CO}_2/\text{CO}/\text{O}$ // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2016. Т. 3 (61), вып. 3. С. 468–480.
30. Millikan R. C., White D. R. Systematics of vibrational relaxation // *The Journal of Chemical Physics*. 1963. V. 39. Pp. 3209–3213.
31. Кустова Е. В., Облапенко Г. П., Шарафутдинов И. З. Модели колебательной релаксации в неравновесных многотемпературных течениях // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2015. Т. 16. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/536/>
32. Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Ступоченко Е. В., Шелепин Л. А. Колебательная релаксация и газовые лазеры // *Успехи физических наук*. 1972. Т. 108. № 4. С. 655–699.
33. Park C. *Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics*. J. Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
34. Ковач Э. А., Лосев С. А., Сергиевская А. Л., Храпов Н. Каталог моделей физико-химических процессов 2. Процессы колебательного энергообмена // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2010. Т. 10. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332/>

35. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П., Худяков В. А., Костин В. Н. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. М.: ВИНТИ, АН СССР. 1980. Т. 10. № 1. 379 с.
36. Храпов С. С., Иванченко Г. С., Радченко В. П., Титов А. В. Численное моделирование акустической неустойчивости в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Журнал технической физики. 2023. Т. 93, вып. 12. С.1727–1731.
37. Храпов С. С., Иванченко Г. С., Радченко В. П., Маковеев И. С. Динамика малых возмущений в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2023. Т. 26. № 4. С. 83–105.
38. Harten A., Lax P., van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // SIAM review. 1983. V. 25. Pp. 35–61.
39. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver // Shock Waves. 1994. V. 4. №1. Pp. 25–34.
40. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. Pp. 357–393.
41. Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1992. V. 30. Pp. 543–574.
42. Галкин В. С., Лосев С. А. Уравнения релаксационной газодинамики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Т. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-6/articles/288/>
43. Шапиро С. А., Тьюколски С. А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч.2. М.: Мир, 1985. 400 с.
44. Vasiliev E. O. Non-equilibrium ionization states and cooling rates of photoionized enriched gas // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2011. V. 414. Pp. 3145–3157.
45. Кусов А. Л., Козлов П. В., Быкова Н. Г., Забелинский И. Е., Герасимов Г. Я., Левашов В. Ю. Прямое статистическое моделирование излучения за фронтом ударной волны в кислороде // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, вып. 3. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-3/articles/1000/>
46. Кусов А. Л., Быкова Н. Г., Герасимов Г. Я., Забелинский И. Е., Козлов П. В., Левашов В. Ю. Прямое статистическое моделирование излучения за фронтом ударной волны в смеси CO₂ и N₂ // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2023. Т. 24, вып. 2. <http://chemphys.edu.ru/issues/2023-24-2/articles/1038/>

References

1. Kogan E. Y., Molevich N. E., Sound waves in a nonequilibrium molecular gas, *Soviet Physics Journal*, 1986, vol. 29, pp. 547–551. <https://doi.org/10.1007/BF00895501>
2. Molevich N. E., Oraevskii A. N., Sound viscosity in media in thermodynamic disequilibrium, *Soviet Physics - JETP*, 1988, vol. 67, no. 3, pp. 504–508.
3. Osipov A. I., Uvarov A. V. Kinetic and gasdynamic processes in nonequilibrium molecular physics, *Soviet Physics Uspekhi*, 1992, vol. 35, no. 11, pp. 903–923. <https://doi.org/10.1070/PU1992v035n11ABEH002275>
4. Molevich N. E. Sound velocity dispersion and second viscosity in media with nonequilibrium chemical reactions, *Acoustical Physics*, 2003, vol. 49, no. 2, pp. 189–192. <https://doi.org/10.1134/1.1560381>
5. Zavershinskii D., Molevich N., Belov S., Riashchikov D., Over stability of acoustic waves in heat-releasing gaseous media, *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2304, issue 1, article id. 020028. <https://doi.org/10.1063/5.0034849>

6. Napalkov O. G., Kustova E. V., Sayfutdinov A. I., Study of microwave discharge in air on the basis of the extended fluid dynamic model, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 5. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.5.1063>
7. Surzhikov S. T. Application of Quasi-Stationary eRC Models for the Calculation of Non-Equilibrium Radiation of Shock Waves at Velocity about 10 km/s, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, no. 4. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.4.1015>
8. Litvintsev A. S., Molchanova A. N., Vashchenkov P. V., Kashkovsky A. V., Bondar Y. A. Influence of surface chemical reactions on high-altitude aerothermodynamics of a model capsule, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 2. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.2.1035>
9. Shoev G. V., Bondar Y. A., Oblapenko G. P., Kustova E. V. Development and testing of a numerical simulation method for thermally nonequilibrium dissociating flows in ANSYS Fluent, *Thermophysics and Aeromechanics*, 2016, vol. 23, no. 2, pp. 151–163. <https://doi.org/10.1134/S0869864316020013>
10. Osipov A. I., Uvarov A. V. Stability problems in a nonequilibrium gas, *Physics Uspekhi*, 1996, vol. 39, no. 6, pp. 597–608. <https://doi.org/10.1070/PU1996v039n06ABEH000150>
11. Makarian V., Molevich N. Structure of weak shock waves in a stationary nonequilibrium medium, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2005, vol. 3. [in Russian].
12. Makaryan V. G., Molevich N. E. Weak shock waves in negative-dispersion nonequilibrium media, *Technical Physics*, 2005, vol. 50, no. 6, pp. 685–691. <https://doi.org/10.1134/1.1947341>
13. Makaryan V. G., Molevich N. E. Stationary shock waves in nonequilibrium media, *Plasma Sources Science and Technology*, 2007, vol. 16, no. 1, pp. 124–131. <https://doi.org/10.1088/0963-0252/16/1/017>
14. Molevich N. E., Galimov R. N., Makaryan V. G., Zavershinskii D. I. General nonlinear acoustical equation of relaxing media and its stationary solutions, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2013, vol. 133, no. 5, pp. 3555–3563. <https://doi.org/10.1121/1.4806465>
15. Nelson D., Springel V., Pillepich A. et al. The IllustrisTNG simulations: public data release, *Computational Astrophysics and Cosmology*, 2019, vol. 6, no. 2, pp. 1–29. <https://doi.org/10.1186/s40668-019-0028-x>
16. Crain R. A., van de Voort F. Hydrodynamical Simulations of the Galaxy Population: Enduring Successes and Outstanding Challenges, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 2023, vol. 61, pp. 473–515. <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-041923-043618>
17. Elizarova T. G., Istomina M. A., Zlotnik A. A. Hydrodynamical aspects of the formation of spiral-vortical structures in rotating gaseous disks, *Astronomy Reports*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 9–18. <https://doi.org/10.1134/S1063772918010018>
18. Khoperskov S., Zinchenko I., Avramov B., Khrapov S., Berczik P., Saburova A., Ishchenko M., Khoperskov A., Pulsoni C., Venichenko Yu., Bizyaev D., Moiseev A. Extreme kinematic misalignment in IllustrisTNG galaxies: the origin, structure, and internal dynamics of galaxies with a large-scale counterrotation, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2021, vol. 500, no. 3, pp. 3870–3888. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa3330>
19. Khoperskov S., Haywood M., Snaith O., Di Matteo P., Lehnert M., Vasiliev E., Naroenkov S., Berczik P. Bimodality of $[\alpha\text{Fe}]$ - $[\text{Fe}/\text{H}]$ distributions is a natural outcome of dissipative collapse and disc growth in Milky Way-type galaxies, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2021, vol. 501, no. 4, pp. 5176–5196. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa3996>
20. Butenko M. A., Belikova I. V., Kuzmin N. M., Khokhlova S. S., Ivanchenko G. S., Ten A. V., Kudina I. G. Numerical simulation of the galaxies outer spiral structure: the influence of the dark halo non-axisymmetry on the gaseous disk shape, *Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2022, vol. 25, no. 3, pp. 73–83. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.3.5>

21. Panasenko A. V. Calculation of Shock Wave Formation in a Shock Tube with a Different Method of Initial Gas Outflow, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 3. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.3.1045>
22. Khoperskov A. V., Khrapov S. S., Nedugova E. A. Dissipative-Acoustic Instability in Accretion Disks at a Nonlinear Stage, *Astronomy Letters*, 2003, vol. 29, no. 4, pp. 246–257. <https://doi.org/10.1134/1.1564856>
23. Afanasiev V. L., Dodonov S. N., Khrapov S. S., Mustsevoi V. V., Moiseev A. V. Formation of ionization-cone structures in active galactic nuclei: II. Nonlinear hydrodynamic modeling, *Astrophysical Bulletin*, 2007, vol. 62, no. 1, pp. 15–25. <https://doi.org/10.1134/S1990341307010026>
24. Khrapov S., Khoperskov A. Dynamics of unstable sound waves in a non-equilibrium medium at the nonlinear stage, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 973, article id. 012007. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/973/1/012007>
25. Khrapov S., Khoperskov A., Khoperskov S. Lagrange-Eulerian method for numerical integration of the gas dynamics equations: parallel implementation on GPUs, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1392, article id. 012041. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1392/1/012041>
26. van Leer B. Towards the Ultimate Conservation Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method, *Journal of Computational Physics*, 1979, vol. 32, no. 1, pp. 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1)
27. Khoperskov S. A., Vasiliev E. O., Sobolev A. M., Khoperskov A. V. The simulation of molecular clouds formation in the Milky Way, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 428, no. 3, pp. 2311–2320. <https://doi.org/10.1093/mnras/sts195>
28. Landau L., Teller E. Theory of sound dispersion, *Physik Zeitschrift der Sowjetunion*, 1936, vol. 10, pp. 34–43.
29. Kosareva A. A., Nagnibeda E. A. Dissociation and vibrational relaxation in a spatially homogeneous mixture CO₂/CO/O, *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2016, no 3, pp. 468–480. [in Russian]. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.315>
30. Millikan R. C., White D. R. Systematics of vibrational relaxation, *The Journal of Chemical Physics*, 1963, vol. 39, no. 12, pp. 3209–3213. <https://doi.org/10.1063/1.1734182>
31. Kustova E., Oblapenko G., Sharafutdinov I. Vibrational relaxation models for non-equilibrium multi-temperature flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2015, vol. 16, no. 2. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2015-16-2/articles/536/>
32. Gordiets B. F., Osipov A. I., Stupochenko E. V., Shelepin L. A. Vibrational relaxation in gases and molecular lasers, *Soviet Physics Uspekhi*, 1973, vol. 15, pp. 759–785. [in Russian]. <https://doi.org/10.1070/PU1973v015n06ABEH005065>
33. Park C., *Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics*, J.Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1990.
34. Kovach E., Losev S., Sergievskaya A., Khrapak N. Catalogue of models of physical and chemical processes. Part 2. Vibrational energy exchange processes, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2010, vol. 10. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-10/articles/332/>
35. Alemasov V. E., Dregalin A. F., Tishin A. P., Khudyakov V. A., Kostin V. N., *Thermodynamic and thermophysical properties of combustion products*, M.: VINITI, USSR Academy of Sciences, 1980, vol. 10, no. 1. [in Russian].
36. Khrapov S. S., Ivanchenko G. S., Radchenko V. P., Titov A. V. Numerical Simulation of Acoustic Instability in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas, *Journal of Technical Physics*, 2023, vol. 93, no. 12, pp.1727–1731. [in Russian]. <https://doi.org/10.61011/JTF.2023.12.56805.f213-23>
37. Khrapov S. S., Ivanchenko G. S., Radchenko V. P., Makoveev I. S. Dynamics of Small Disturbances in a Nonequilibrium Vibrationally Excited Gas, *Mathematical physics and computer modeling*, 2023, vol. 26, no. 4, pp. 83–105. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2023.4.7>

38. Harten A., Lax P., van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM review*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35–61. <https://doi.org/10.1137/1025002>
39. Toro E. F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver, *Shock Waves*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 25–34. <https://doi.org/10.1007/BF01414629>
40. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, 1983, vol. 49, no.3, pp. 357–393. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(83\)90136-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(83)90136-5)
41. Monaghan J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1992, vol. 30, pp. 543–574. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551>
42. Galkin V., Losev S. Equations of relaxation gasdynamics, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2008, vol. 6. [in Russian]. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-6/articles/288/>
43. Shapiro S. A., Tyukolski S. A., *Black holes, white dwarfs and neutron stars. Part 2*, М.: Mir, 1985. [in Russian].
44. Vasiliev E. O. Non-equilibrium ionization states and cooling rates of photoionized enriched gas, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, vol. 414, no. 4, pp. 3145–3157. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18623.x>
45. Kusov A., Kozlov P., Bykova N., Zabelinskii I., Gerasimov G., Levashov V. Direct statistical simulation of oxygen radiation behind shock wave, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, no. 3. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.3.1000>
46. Kusov A., Bykova N., Gerasimov G., Zabelinskii I., Kozlov P., Levashov V. Direct Statistical Simulation of Radiation Behind the Shock Wave Front in CO₂ and N₂ Mixture, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2023, vol. 24, no. 2. [in Russian]. <http://doi.org/10.33257/PhChGD.24.2.1038>

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2023 г.