On the Closure of the Equations for Probability Density of Passive Scalar in a Turbulent Flow

V. Frost[1], V. Krasitskii[2]

[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, 119526, Russia*
[2] *P.P. Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, 117218, Russia*
frost@ipmnet.ru

Abstract

The method proposed by B.Ya. Lyubimov and F.R. Ulinich in 1970 is used to construct approximations for the conditional averages in the equations for the probability density function (PDF). The method allows one to express conditional averages in terms of mixed moments of the scalar and the flow velocity fields and to reduce the problem of the closure equations for the PDF to the problem of closuring the Friedman – Keller chain of equations. These relationships allow us to build approximations of various orders, the first of which are well-known. The features of the solution of the resulting equations are analyzed.

Keywords: the equations for the probability density, the Friedman – Keller chain of equations.

One and two-point equation for (PDF) probability density of the scalar $p(c_1)=p(c_1;\boldsymbol{x}_1,t)$ and $p(c_1,c_2)=p(c_1,c_2;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t)$ are not closed since they contain some terms to determine which additional considerations are necessary. These terms are conventionally average flow velocity components that define the convective transfer of PDF in space, and the Laplacian of a scalar component of the conditional mean in the vicinity of the points studied, defining the molecular transport. For example, one-point equation

$$\frac{\partial p(c_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\langle u_{1j}\,|\,c_1\rangle\,p(c_1)+D\frac{\partial}{\partial c_1}\lim_{X_2\to X_1}\Delta_2\int c_2\,p(c_1,c_2)\,\mathrm{d}c_2+\frac{\partial}{\partial c_1}S(c_1)\,p_1(c_1)=0$$

Here $\Delta_2=\partial^2/\partial x_{2j}^2$. The equation contains $\langle u_{1j}\,|\,c_1\rangle$ – conditional mean flow velocity components, and $\lim\limits_{X_2\to X_1}\Delta_2\int c_2\,p(c_1,c_2)\,\mathrm{d}c_2$ – the conditionally average Laplacian, defined by the PDF of a higher order. The term containing the function $S(c_1)$ describing the chemical conversion is determined by the value of the independent variable, which makes the method based on the equations for PDF very attractive in the description of chemical reactions in turbulent flows.

The "weak coupling approximation" allow us to express two-point PDF and conditional mean velocity components in terms of the one-point PDF and joint moments of the velocity and scalar fields

$$p(c_1,c_2)=p(c_1)\,p(c_2)+m_{12}\frac{\partial p(c_1)}{\partial c_1}\frac{\partial p(c_2)}{\partial c_2}+m_{112}\frac{\partial^2 p(c_1)}{\partial c_1^2}\frac{\partial p(c_2)}{\partial c_2}+m_{122}\frac{\partial p(c_1)}{\partial c_1}\frac{\partial^2 p(c_2)}{\partial c_2}+$$
$$+m_{1112}\frac{\partial^3 p(c_1)}{\partial c_1^3}\frac{\partial p(c_2)}{\partial c_2}+m_{1122}\frac{\partial^2 p(c_1)}{\partial c_1^2}\frac{\partial^2 p(c_2)}{\partial c_2}+m_{1222}\frac{\partial p(c_1)}{\partial c_1}\frac{\partial^3 p(c_2)}{\partial c_2^3}+\ldots,$$

$$\langle u_{1j}\,|\,c_1\rangle=\langle u_{1j}\rangle-\frac{\langle u'_{1j}c'_1\rangle}{p(c_1)}\frac{\partial p(c_1)}{\partial c_1}+\ldots$$

Here $m_{12}=\langle c'_1c'_2\rangle,\;\; m_{112}=\langle c'^2_1c'_2\rangle,\;\; m_{122}=\langle c'_1c'^2_2\rangle$ etc.

These formulas enable one to close the equation for PDF of any order by going to a system of equations for moments, that is, to the Friedman – Keller chain of equations.

УДК532.517.45

О замыкании уравнений для плотности распределения вероятностей пассивного скаляра в турбулентном потоке

В.А. Фрост[1], В.П. Красицкий[2]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия, Москва, 119526, пр. Вернадского, 101, к.1*
[2] *Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, Россия, Москва, 117218, Нахимовский пр., 36*
frost@ipmnet.ru

Аннотация

Для построения приближений для условных средних величин, входящих в уравнения для плотностей распределения вероятностей (ПРВ), используется метод, предложенный Б.Я. Любимовым и Ф.Р. Улиничем в 1970 г. Метод позволяет выразить условные средние через смешанные моменты полей скаляра и скорости потока и свести задачу замыкания уравнений для ПРВ к задаче замыкания цепочки уравнений Фридмана – Келлера. Полученные соотношения позволяют строить приближения различного порядка, первые из которых совпадают с ранее известными. Рассматривается особенности решения получающихся уравнений.

Ключевые слова: уравнения для плотностей вероятности, цепочка уравнений Фридмана – Келлера.

1. Введение

Проблема замыкания уравнений является центральной при математическом моделировании различных турбулентных течений. Наиболее простым и широко используемым способом является использование полуэмпирических соотношений для турбулентного переноса, трения и т. п. Наиболее типичным представителем такого подхода являются различные реализации k – ε подхода. Наряду с этим делаются попытки получения замкнутой системы уравнений без использования подгоночных соотношений (коэффициентов и функциональных зависимостей). Это может быть получено или обрывом цепочки уравнений Фридмана – Келлера (т.е. предположением, что влияние моментов выше некоторого порядка отсутствует), или заданием некоторых соотношений, связывающих моменты различного порядка. Из попыток такого рода наиболее известная гипотеза Миллионщикова [1], использующая соотношения между моментами различных порядков справедливые для нормального распределения вероятностей.

При моделировании турбулентных потоков с химическими реакциями использование уравнений для моментов ограничено очень простыми выражениями для скоростей химических реакций. Появление аррениусовского фактора и связанной с этим существенной нелинейности не позволяет достаточно точно вычислять среднюю скорость химической реакции, являющуюся основным параметром задачи, располагая только моментами распределения. Эта трудность преодолевается использованием уравнений для одноточечных плотностей распределения вероятности (ПРВ) параметров, определяющих закономерности химических процессов. Такой переход приводит к существенному росту вычислительных трудностей, связанных с увеличением числа независимых переменных. До настоящего времени прямое численное интегрирование уравнений для ПРВ ограничено двумя независимыми переменными, характеризующими скалярное поле.

Аналогично уравнениям для моментов уравнения для ПРВ скаляра, получаемые различными способами, являются незамкнутыми. Процесс переноса по пространству и процесс смешения, приводящий к изменению истинных значений концентраций реагентов (называемый процессом микросмешения), требуют дополнительных гипотез. Однако, если основной задачей является определение средней скорости химического реагирования, то трудности замкнутого описания турбулентного переноса и микросмешения принципиально различаются. Для описания турбулентного переноса можно использовать любую модель, используемую при описании турбулентных потоков без химических реакций (турбулентный закон Фика с определяемым независимо коэффициентом турбулентной диффузии и др.). В то же время при описании микросмешения возникают проблемы, связанные с тем, что рассматриваются, как правило, одноточечные уравнения для ПРВ, в рамках которых не удается определить условное среднее значение лапласиана скалярного поля – величину, определяющую собственно микросмешение.

Способы замыкания уравнений для ПРВ отличаются также и от аналогичного процесса для уравнений для моментов. Одним из отличий является то, что проверка сохранения необходимых свойств распределений для уравнений для ПРВ значительно проще, чем проверка неотрицательности спектра или аналогичных свойств для изменённых замыканием уравнений для моментов. Поэтому установление общих закономерностей замыканий для уравнений для ПРВ и уравнений для моментов является очень интересной проблемой. В работе рассматривается упрощенный подход, в котором изменение концентрации скаляра или температуры в результате химических превращений не изменяет плотность среды и, тем самым, не оказывает влияния на динамику потока, следовательно, скаляр может быть назван пассивным.

Уравнения для ПРВ выводятся из эволюционного уравнения для поля пассивного скаляра $c(\boldsymbol{x},t)$:

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+u_j\frac{\partial c(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j}=D\Delta c(\boldsymbol{x},t)+S\left[c(\boldsymbol{x},t)\right] \qquad (1.1)$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x_j^2$ – оператор Лапласа. В уравнении (1.1) $\boldsymbol{u}$ – заданное (статистически) турбулентное поле скорости; $\boldsymbol{x}=(x_1=x,x_2=y,x_3=z)$ – пространственная координата; t – время; D – коэффициент молекулярной диффузии; член $S\left[c(\boldsymbol{x},t)\right]$ – описывает скорость возможного химического превращения и считается заданной функцией $c(\boldsymbol{x},t)$.

Уравнение для одноточечной ПРВ $p(c_1)=p(c_1;\boldsymbol{x}_1,t)$ можно записать в виде [2, 3]

$$\frac{\partial p(c_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\left\langle u_{1j}\,|\,c_1\right\rangle p(c_1)+D\frac{\partial}{\partial c_1}\lim_{X_2\to X_1}\Delta_2\int c_2\,p(c_1,c_2)\,\mathrm{d}c_2+\frac{\partial}{\partial c_1}S(c_1)\,p_1(c_1)=0 \qquad (1.2)$$

Здесь $\Delta_2=\partial^2/\partial x_{2j}^2$; $p(c_1,c_2)=p(c_1,c_2;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,t)$ – двухточечная совместная ПРВ значений скаляра в двух точках $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ в момент времени t. Уравнение (1.2) содержит двухточечную ПРВ и, поэтому, незамкнуто. Слагаемое, содержащее функцию $S(c_1)$, описывающую химическое превращение, определяется значением искомой функции, что и делает метод, основанный на уравнениях для ПРВ, особенно привлекательным при описании химических превращений в турбулентных потоках. Конвективный член содержит условную среднюю компоненту скорости $\left\langle u_{1j}\,|\,c_1\right\rangle$, зависящую от положения рассматриваемой точки $\boldsymbol{x}_1$ и значения независимой переменной c_1.

Аналогично уравнение для двухточечной ПРВ [4, 5]

$$\frac{\partial p_2(c_1,c_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\langle u_{1j}\,|\,c_1,c_2\rangle p_2(c_1,c_2)+\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\langle u_{2j}\,|\,c_1,c_2\rangle p_2(c_1,c_2)+$$
$$+D\frac{\partial}{\partial c_1}\lim_{x_3\to x_1}\Delta_3\int c_3 p_3(c_1,c_2,c_3)\mathrm{d}c_3+D\frac{\partial}{\partial c_2}\lim_{x_3\to x_2}\Delta_3\int c_3 p_3(c_1,c_2,c_3)\mathrm{d}c_3+$$
$$+\frac{\partial}{\partial c_1}S(c_1)p_2(c_1,c_2)+\frac{\partial}{\partial c_2}S(c_2)p_2(c_1,c_2)=0 \qquad (1.3)$$

Здесь $\Delta_3=\partial^2/\partial x_{3j}^2$.·

В уравнение (1.3) входит уже трёхточечная ПРВ $p(c_1,c_2,c_3)=p(c_1,c_2,c_3;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,t)$.

Таким образом, мы приходим к незамкнутой цепочке уравнений для ПРВ. В настоящей работе предлагается использовать способ приближённого замыкания уравнений типа (1.2) и (l.3), предложенный в [6]. Этот способ, который можно назвать приближением слабой связи, описывается в общем виде в следующем разделе.

2. Приближение слабой связи

Для замыкания уравнений для ПРВ нужны некоторые гипотезы о приближённой связи многоточечных ПРВ с ПРВ, распределения вероятностей в меньшем количестве точек. Для замыкания одноточечного уравнения (1.1) нужна гипотеза о связи ПРВ для двух случайных переменных с ПРВ одной переменной, а для замыкания двухточечного уравнения (l.2) нужна гипотеза о связи ПРВ для трёх переменных с ПРВ для двух переменных. Ниже рассматривается одна из таких гипотез.

Пусть имеется система N случайных величин $v_1,v_2,...,v_N$ с N-мерной ПРВ $p(v_1,v_2,\cdots,v_N)$. (Здесь и далее для случайных величин и аргументов ПРВ используются одни и те же обозначения, что, однако, не должно приводить к недоразумениям). Эти случайные величины могут иметь различную гидродинамическую природу. Например, часть из них может быть компонентами скоростей жидкости в различных точках пространства, а часть – значениями концентрации примеси в тех же самых или других точках пространства.

Во многих случаях вместо ПРВ удобно рассматривать её преобразование Фурье, т.е. характеристическую функцию соответствующего распределения вероятности:

$$\varphi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)=\left\langle exp\left(i\sum_{k=1}^{N}\theta_k v_k\right)\right\rangle=\iint\ldots\int p(v_1,v_2,\ldots,v_N)\exp\left(i\sum_{k=1}^{N}\theta_k v_k\right)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\ldots\mathrm{d}v_N \qquad (2.1)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций случайных величин $v_1,v_2,\cdots,v_N$, все значки интегралов означают интегрирование в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, а $i=\sqrt{-1}$. В силу общей формулы обращения интегралов Фурье характеристическая функция однозначно определяет отвечающее ей распределение вероятности:

$$p(v_1,v_2,...,v_N)=\iint\ldots\int\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)\exp\left(-i\sum_{k=1}^{N}\theta_k v_k\right)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\ldots\mathrm{d}\theta_N$$

Отметим следующие свойства характеристической функции:

$$|\varphi(0,0,\ldots,0)|=1,$$

$$|\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)|\le 1,$$

$$\varphi(-\theta_1,-\theta_2,\ldots,-\theta_N)=\varphi^*(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N),$$

$$\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)=\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n,\theta_{n+1},\theta_{n+2},\ldots,\theta_N);\quad \theta_k=0,\ k\ge n,$$

где звёздочкой обозначена комплексно сопряжённая величина.

Кроме того, при любом целом n, любых вещественных $\theta_1^{(1)},\cdots,\theta_1^{(n)},\theta_1^{(2)},\cdots,\theta_2^{(N)},\cdots,$ $\theta_N^{(1)},\cdots,\theta_N^{(n)}$ и любых комплексных $c_1,\cdots,c_n$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi\left(\theta_1^{(k)}-\theta_1^{(l)},\theta_2^{(k)}-\theta_2^{(l)},\cdots,\theta_N^{(k)}-\theta_N^{(l)}\right),c_k,c_l^*\ge 0, \tag{2.2}$$

являющееся аналогом "условия согласованности" для ПРВ:

$$p(v_1,v_2,...,v_N)=\iint\ldots\int p(v_1,v_2,...,v_n,v_{n+1},v_{n+2},...,v_N)\,\mathrm{d}v_{n+1}\ldots\mathrm{d}v_N$$

Неравенство (2.2) следует из того, что его левая часть равняется среднему значению неотрицательной величины

$$\left|\sum\exp\left(i\sum_i\theta_i^{(k)}v_l\right)c_k\right|^2$$

Моменты случайных величин $v_1,v_2,\ldots,v_N$ определяются формулой

$$B_{k_1,k_2,\ldots,k_N}=\langle v_1^{k_1}v_2^{k_2}\cdots v_N^{k_N}\rangle=\iint\cdots\int v_1^{k_1}v_2^{k_2}\cdots v_N^{k_N}\,p(v_1v_2\cdots v_N)\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_N, \tag{2.3}$$

где $k_1,k_2,\cdots,k_N$ – целые неотрицательные числа $(k_j=0,1,2,\cdots,\ j=1,2,\cdots,N)$, сумма которых называется порядком момента. В частности, моменты первого порядка – это средние значения величин $v_1,v_2,\cdots,v_N$.

Известно, что моменты случайных величин $v_1,v_2,\ldots,v_N$ могут быть просто выражены через соответствующую характеристическую функцию $\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)$ (см., например [7, 8]). В самом деле, из сравнения (2.3) с (2.1) следует, что

$$B_{k_1,k_2,\ldots,k_N}=(-i)^K\frac{\partial^K\varphi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_N)}{\left(\partial\theta_1^{k_1}\partial\theta_2^{k_2}\cdots\partial\theta_N^{k_N}\right)}\Big|_{\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_N=0}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что если характеристическая функция может быть представлена своим рядом Тейлора, то существует разложение

$$\varphi(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_N}(i)^K\frac{B_{k_1k_2\ldots k_N}}{k_1!k_2!\ldots k_N!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}\ldots\theta_N^{k_N} \tag{2.4}$$

Рассмотрим сначала случай двух случайных переменных v_1 и v_2 с совместной ПРВ

$$p(v_1,v_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\varphi(\theta_1,\theta_2)\exp\left[-i(\theta_1v_1+\theta_2v_2)\right]\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \tag{2.5}$$

и характеристической функцией

$$\varphi(\theta_1,\theta_2)=\iint p(v_1,v_2)\exp\left[i(\theta_1v_1+\theta_2v_2)\right]\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2 \tag{2.6}$$

Для каждой переменной по отдельности имеем

$$p^{(1)}(v_1)=\frac{1}{2\pi}\iint\varphi^{(1)}(\theta_1)\exp(-i\theta_1 v_1)\,\mathrm{d}\theta_1, \tag{2.7}$$

$$\varphi^{1}(\theta_1)=\iint p^{(1)}(v_1)\exp(i\theta_1 v_1)\,\mathrm{d}v_1 \tag{2.8}$$

и аналогичные формулы для $\varphi^{(2)}(\theta_2)$ и $p^{(2)}(v_2)$. (Здесь введены дополнительные верхние индексы, обозначающие соответствующие одномерные распределения.)

Используя (2.4), имеем

$$\varphi(\theta_1,\theta_2)=\sum_{k_1+k_2} i^{k_1+k_2}\frac{B_{k_1,k_2}}{k_1!k_2!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}, \tag{2.9}$$

$$\varphi^{(1)}(\theta_1)=\varphi(\theta_1,0)=\sum_{k_1} i^{k_1}\frac{B_{k_1}^{(1)}}{k_1!}\theta_1^{k_1}, \tag{2.10}$$

$$\varphi^{(2)}(\theta_2)=\varphi(0,\theta_2)=\sum_{k_1} i^{k_2}\frac{B_{k_2}^{(2)}}{k_2!}\theta_2^{k_2} \tag{2.11}$$

Представим характеристическую функцию $\varphi(\theta_1,\theta_2)$ в виде

$$\varphi(\theta_1,\theta_2)=R(\theta_1,\theta_2)\varphi^{(1)}(\theta_1)\varphi^{(2)}(\theta_2), \tag{2.12}$$

где $R(\theta_1,\theta_2)$ – некоторая новая функция, удовлетворяющая очевидным условиям

$$R(0,0)=R(\theta_1,0)=R(0,\theta_2)=1,\quad R(-\theta_1,-\theta_2)=R^*(\theta_1,\theta_2)$$

Пользуясь (2.9)–(2.12), найдём

$$R(\theta_1,\theta_2)=\frac{\varphi(\theta_1,\theta_2)}{\varphi^{(1)}(\theta_1)\varphi^{(2)}(\theta_2)}=\frac{\sum\limits_{k_1+k_2} i^{k_1+k_2}\frac{B_{k1,k2}}{k_1!k_2!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}}{\sum\limits_{k_1+k_2} i^{k_1+k_2}\frac{B_{k_1}^{(1)}B_{k_2}^{(2)}}{k_1!k_2!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}}=$$

$$=1+m_{12}(-i\theta_1)(-i\theta_2)+m_{112}(-i\theta_1)^2(-i\theta_2)+m_{122}(-i\theta_1)(-i\theta_2)^2+$$

$$+m_{1112}(-i\theta_1)^3(-i\theta_2)+m_{1122}(-i\theta_1)^2(-i\theta_2)^2+m_{1222}(-i\theta_1)(-i\theta_2)^3+\ldots, \tag{2.13}$$

где

$$m_{12}=\langle v_1v_2\rangle-\langle v_1\rangle\langle v_2\rangle=\langle vv\rangle,$$

$$m_{112}=-\frac{1}{2}\langle v_1^2v_2\rangle+\frac{1}{2}\langle v_1^2\rangle\langle v_2\rangle+\langle v_1v_2\rangle\langle v_1\rangle-\langle v_1\rangle^2\langle v_2\rangle$$

$$m_{122}=-\frac{1}{2}\langle v_1v_2^2\rangle+\frac{1}{2}\langle v_1\rangle\langle v_2^2\rangle+\langle v_1v_2\rangle\langle v_2\rangle-\langle v_1\rangle\langle v_2\rangle^2$$

Выражения для m_{1112}, и m_{1122} не выписываются ввиду их громоздкости. Правая часть в (2.13) получается либо разложением дроби в ряд Тейлора, либо простым делением рядов друг на друга. Структура общего члена разложения легко просматривается.

Пользуясь формулами (2.5)–(2.8), найдём

$$p(v_1,v_2)=p(v_1)p(v_2)+m_{12}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}+$$
$$+m_{112}\frac{\partial^2 p(v_1)}{\partial v_1^2}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}+m_{122}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial^2 p(v_2)}{\partial v_2^2}+$$
$$+m_{1112}\frac{\partial^3 p(v_1)}{\partial v_1^3}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}+m_{1122}\frac{\partial^2 p(v_1)}{\partial v_1^2}\frac{\partial^2 p(v_2)}{\partial v_2^2}+$$
$$+m_{1222}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial^3 p(v_2)}{\partial v_2^3}+\ldots \tag{2.14}$$

Эту формулу можно использовать для замыкания одноточечных уравнений для $p(c_1)$. В дальнейшем используется лишь сокращённые варианты формулы (2.14):

$$p(v_1,v_2)=p(v_1)p(v_2)+m_{12}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2} \tag{2.15}$$

и

$$p(v_1,v_2)=p(v_1)p(v_2)+m_{12}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}+m_{112}\frac{\partial^2 p(v_1)}{\partial v_1^2}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}+m_{122}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial^2 p(v_2)}{\partial v_2^2} \tag{2.16}$$

Если представить случайные переменные в виде суммы средних значений и флуктуаций

$$v_1=\langle v_1\rangle+v'_1,\quad v_2=\langle v_2\rangle+v'_2,$$

то

$$m_{12}=\langle v'_1v'_2\rangle,\quad m_{112}=\langle v'^2_1v'_2\rangle,\quad m_{122}=\langle v'_1v'^2_2\rangle$$

Приближения, основанные на формулах (2.14)–(2.16) будем называть "приближениями слабой связи".

Найдём с помощью (2.13) условное среднее $\langle v_1|v_2\rangle$. По теореме о полной вероятности $p(v_1,v_2)=p(v_1|v_2)\,p(v_2)$. Тогда, например, для формулы (2.15)

$$p(v_1\,|\,v_2)=p(v_1)+\frac{m_{12}}{p(v_2)}\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2}$$

и

$$\langle v_1\,|\,v_2\rangle=\int v_1 p(v_1\,|\,v_2)\,\mathrm{d}v_1=\langle v_1\rangle+\frac{m_{12}}{p(v_2)}\frac{\partial p(v_2)}{\partial v_2},$$

где учтено, что

$$\int v_1\frac{\partial p(v_1)}{\partial v_1}\mathrm{d}v_1=-1$$

Так как $p(v_2)>0$, то знак $\partial p(v_2)/\partial v_2$ определяет больше или меньше условное среднее $\langle v_1|v_2\rangle$ безусловного среднего $\langle v_1\rangle$. Но так как $p(v_2)$ обычно имеет максимум, то при различных v_2 может быть и та и другая ситуация.

Случай трёх переменных необходим для замыкания уравнения (1.2) для двухточечной ПРВ. Для этого случая сразу запишем аналог формулы (2.14) в обозначениях, близких к используемым при замыкании уравнения (1.3)

$$p\left(u,c_{1,}c_2\right)=p\left(c_1,c_2\right)p\left(u\right)+\left[n_{12}\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1}+n_{13}\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_2}\right]\frac{\partial p\left(u\right)}{\partial u}+$$
$$+\left[n_{112}\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1}+n_{113}\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_2}\right]\frac{\partial p^2\left(u\right)}{\partial u^2}+$$
$$+\left[n_{221}\frac{\partial p^2\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1^2}+n_{331}\frac{\partial p^2\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_2^2}+n_{123}\frac{\partial p^2\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1\partial c_2}\right]\frac{\partial p\left(u\right)}{\partial u}+\ldots\ , \qquad (2.17)$$

где

$$n_{12}=\left\langle u'c'_1\right\rangle,\ n_{13}=\left\langle u'c'_2\right\rangle,\ n_{112}=-\frac{1}{2}\left\langle u'^2c'_1\right\rangle,\ n_{113}=-\frac{1}{2}\left\langle u'^2c'_2\right\rangle,$$
$$n_{221}=-\frac{1}{2}\left\langle u'c'^2_1\right\rangle,\ n_{331}=-\frac{1}{2}\left\langle u'^2c'^2_2\right\rangle,\ n_{123}=\left\langle u'c'_1c'_2\right\rangle$$

Можно показать, что с помощью формул типа (2.17) вычисляются все корреляционные моменты, требующиеся для замыкания уравнений для ПРВ.

Пользуясь формулой (2.17) найдём условное среднее $\langle u|c_1,c_2\rangle$. Используя (2.17) и теорему о полной вероятности

$$p\left(u,c_{1,}c_2\right)=p\left(u\,|\,c_{1,}c_2\right)p\left(c_1,c_2\right),$$

получаем

$$\left\langle u\,|\,c_1,c_2\right\rangle=\left\langle u\right\rangle-\frac{1}{p\left(c_1,c_2\right)}\left[\left\langle u'c'_1\right\rangle\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1}+\left\langle u'c'_2\right\rangle\frac{\partial p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_2}\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{2}\left\langle u'c'^2_1\right\rangle\frac{\partial^2 p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1^2}+\frac{1}{2}\left\langle u'c'^2_1\right\rangle\frac{\partial^2 p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_2^2}+\left\langle u'c'_1c'_2\right\rangle\frac{\partial^2 p\left(c_1,c_2\right)}{\partial c_1\partial c_2}\right]+\cdots \qquad (2.18)$$

3. Замыкание уравнений для ПРВ с помощью приближения слабой связи

Полагая в формуле (2.16) $v_1=u_{1j}$, $v_2=c_1$, получим условную скорость, входящую в конвективный член уравнения (1.2)

$$\left\langle u_{1j}\,|\,c_1\right\rangle=\left\langle u_{1j}\right\rangle-\frac{\left\langle u'_{1j}c'_1\right\rangle}{p\left(c_1\right)}\frac{\partial p\left(c_1\right)}{\partial c_1} \qquad (3.1)$$

Для замыкания диффузионного члена в (1.2) используем формулу (2.17) с $v_1=c_1$, $v_2=c_2$. Тогда одноточечное уравнение (1.2) запишется в виде

$$\frac{\partial p_1(c_1)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_{1j}}\left(\left\langle u_{1j}\right\rangle p_1\left(c_1\right)-\left\langle u'_{1j}c'_1\right\rangle\frac{\partial p_1\left(c_1\right)}{\partial c_1}\right)+\frac{\partial}{\partial c_1}S\left(c_1\right)p_1\left(c_1\right)+$$
$$+D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(p_1\left(c_1\right)\Delta_1\left\langle c_1\right\rangle-\frac{\partial p_1\left(c_1\right)}{\partial c_1}\lim_{x_2\to x_1}\Delta_2\left\langle c'_1c'_2\right\rangle+\frac{\partial^2 p_1\left(c_1\right)}{\partial c_1^2}\lim_{x_2\to x_1}\Delta_2\left\langle c'_1c'_2\right\rangle\right)=0 \qquad (3.2)$$

Если выражение $\lim\limits_{x_2\to x_1}$ задаётся или определяется независимым образом, то член с этим выражением известен как "обратный параболический член" [3].

Перейдём к выводу уравнения для двухточечной ПРВ. Полагая в (2.18) сначала $u = u_{1j}$, а потом $u = u_{2j}$, найдём выражения для конвективных членов в (l.3). Например,

$$\left\langle u_{1j}\,|\,c_1,c_2\right\rangle = \left\langle u_{1j}\right\rangle - \frac{1}{p(c_1,c_2)}\left[\left\langle u'_{1j}c'_1\right\rangle\frac{\partial p(c_1,c_2)}{\partial c_1} + \left\langle u'_{1j}c'_2\right\rangle\frac{\partial p(c_1,c_2)}{\partial c_2}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left\langle u'_{1j}c'^2_1\right\rangle\frac{\partial^2 p(c_1,c_2)}{\partial c_1^2} + \frac{1}{2}\left\langle u'_{1j}c'^2_1\right\rangle\frac{\partial^2 p(c_1,c_2)}{\partial c_2^2} + \left\langle u'_{1j}c'_1c'_2\right\rangle\frac{\partial^2 p(c_1,c_2)}{\partial c_1\partial c_2}\right] + \cdots \tag{3.3}$$

Полагая в формуле (2.17) $u = c_1$, $c_1 = c_2$, $c_2 = c_3$, получим выражение для ПРВ $p(c_1,c_2,c_3)$, входящей в диффузионный член уравнения (1.3). Подставляя в (l.3) все найденные члены, получим окончательно

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_{1j}}\left\{\left\langle u_{1j}\right\rangle p_2 - \left[\left\langle u'_{1j}c'_1\right\rangle\frac{\partial p_2}{\partial c_1} + \left\langle u'_{1j}c'_2\right\rangle\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_{2j}}\left\{\left\langle u_{2j}\right\rangle p_2 - \left[\left\langle u'_{2j}c'_1\right\rangle\frac{\partial p_2}{\partial c_1} + \left\langle u'_{2j}c'_2\right\rangle\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right]\right\} +$$

$$+D\frac{\partial}{\partial c_2}\left\{p_2\Delta_2\left\langle c_2\right\rangle - \left[\frac{\partial p_2}{\partial c_1}\lim_{x_3\to x_1}\Delta_3\left\langle c'_1c'_3\right\rangle + \frac{\partial p_2}{\partial c_2}\lim_{x_3\to x_2}\Delta_3\left\langle c'_2c'_3\right\rangle\right]\right\} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial c_1}S(c_1)\,p_2 + \frac{\partial}{\partial c_2}S(c_2)\,p_2 = 0 \tag{3.4}$$

Здесь всюду для краткости $p_2 = p(c_1,c_2;x_1,x_2,t)$.

Уравнения (3.2) и (3.4) требуют привлечения дополнительных сведений о совместных моментах поля скорости и скаляра, что можно рассматривать как сведение задачи к задаче о турбулентном поле скорости, которая может решаться в рамках цепочки уравнений Фридмана – Келлера или привлечением сведений о требуемых совместных моментах. В то же время уравнение (3.2) не замкнуто, как и ранее, так как диффузионные слагаемые содержат двухточечные характеристики скалярного поля.

В Приложении показано, что в изотропном случае уравнение для двухточечной ПРВ требует знания некоторых структурных функций турбулентного поля.

4. Заключение

В уравнениях (3.2) и (3.4) для одноточечной и двухточечной ПРВ содержатся члены двух типов. Во-первых, второй член в (3.2) и второй и третий члены в (3.4) описывают турбулентный перенос и влияние турбулентности на структуру поля скаляра (*conv*) и, во-вторых, содержащие коэффициент молекулярной диффузии и описывающие микросмешение (*diff*). В одноточечном уравнении (3.2) наиболее сложной задачей является описание микросмешения. Величина $\langle u'_{1j}c_1\rangle$ в формуле (3.2) представляет собой компоненту турбулентного потока q_j, уравнение для которого должно входить в систему определяющих уравнений. С учетом этого формула (3.1) является обобщением хорошо известного соотношения для условной средней скорости [3]

$$\langle u'_{1j}c_1\rangle \approx \langle u'_{1j}\rangle + \frac{q_j}{\langle c'^2_1\rangle}\left(c_1 - \langle c_1\rangle\right),$$

полученной для гауссова распределения вероятности $p_1(c_1)$. Предлагаемый метод позволяет не только обобщить аппроксимацию для условной средней скорости на произвольное распределение вероятностей, но при сохранении большего числа слагаемых получить аппроксимации высших порядков, содержащие совместные моменты скорости и скаляра высших порядков. Во всех случаях это моменты первого порядка по скорости.

Таким образом:

- Показано, что метод [6], названный приближением слабой связи, позволяет строить замыкание уравнений для ПРВ как последовательность приближений.
- Получен алгоритм, связывающий условные и безусловные моменты сложных ПРВ и позволяющий рассматривать уравнения для ПРВ скалярного поля совместно с уравнениями для турбулентного поля скорости, не вводя совместных условных моментов и уравнений для них.
- Получены первые приближения для ПРВ поля скаляра, совпадающие с известными.
- В качестве примера приведены следующие приближения.

Приложение

Уравнение для двухточечной ПРВ в изотропном случае

Произведем в уравнении (3.4) замену переменных: от независимых переменных $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ к новым переменным – расстоянию между точками $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ и координате первой точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$. Обратимся сначала к конвективному члену в уравнении (3.4). В случае однородной турбулентности все производные по x_j в этом члене следует опустить. Кроме того, в случае однородной турбулентности все средние поля и одноточечные корреляции, содержащие скорость, следует положить равными нулю. Здесь и в дальнейшем мы опускаем штрихи у флюктуационных переменных, так как в случае однородной турбулентности в них нет необходимости.

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
B_{c,j}(\boldsymbol{r}) &= \langle c_1 u_{2j} \rangle = \langle c(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle, \\
B_{j,c}(\boldsymbol{r}) &= \langle u_{1j} c_{2j} \rangle = \langle u_j(\boldsymbol{x}) c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle, \\
B_{cc,j}(\boldsymbol{r}) &= \langle c_1^2 u_{2j} \rangle = \langle c^2(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle, \\
B_{j,cc}(\boldsymbol{r}) &= \langle u_{1j} c_2^2 \rangle = \langle u_j(\boldsymbol{x}) c^2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle, \\
B_{c,jc}(\boldsymbol{r}) &= \langle c_1 u_{2j} c_2 \rangle = \langle c(\boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle, \\
B_{jc,c}(\boldsymbol{r}) &= \langle u_{1j} c_1 c_2 \rangle = \langle u_j(\boldsymbol{x}) c(\boldsymbol{x})\, c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}) \rangle
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что в случае однородной турбулентности имеют место следующие свойства этих функций:

$$\begin{aligned}
B_{c,j}(\boldsymbol{r}) &= B_{j,c}(-\boldsymbol{r}), \\
B_{j,cc}(\boldsymbol{r}) &= B_{cc,j}(-\boldsymbol{r}), \\
B_{c,jc}(\boldsymbol{r}) &= B_{jc,c}(-\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала конвективный член в уравнении (3.4). С этими обозначениями и с учетом свойств этот член запишется в виде

$$conv = \frac{\partial}{\partial r_j}\left[-B_{c,j}(r)\frac{\partial p_2}{\partial c_1} - B_{c,j}(-r)\frac{\partial p_2}{\partial c_2} + \frac{1}{2} B_{cc,j}(r)\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1^2} - \frac{1}{2} B_{cc,j}(-r)\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_2^2} - \right.$$

$$-\left(B_{jc,c}(r)-B_{jc,c}(-r)\right)\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1 \partial c_2}\Bigg] \qquad (\text{П}.1)$$

Рассмотрим теперь конвективный член в изотропном случае. В этом случае все функции зависят от $r=|\boldsymbol{r}|$, и имеют место представления [7]

$$B_{j,c}(\boldsymbol{r})=B_{L,c}(\boldsymbol{r})\frac{r_j}{r},$$
$$B_{cc,j}(\boldsymbol{r})=B_{cc,L}(\boldsymbol{r})\frac{r_j}{r}\ , \qquad (\text{П}.2)$$
$$B_{jc,j}(\boldsymbol{r})=B_{Lc,c}(\boldsymbol{r})\frac{r_j}{r},$$

где индекс L означает проекцию вектора и на направление $\boldsymbol{r}$, так что, например,

$$B_{L,c}(\boldsymbol{r})=\left\langle u_L(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\right\rangle$$

С учётом представлений (П.2) выражение для конвективного члена (П.1) можно записать в виде

$$conv=\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)\left[B_{L,c}(r)\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_1}-\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)+\frac{1}{2}B_{cc,L}(r)\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1^2}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_2^2}\right)-2B_{Lc,c}(r)\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1 \partial c_2}\right] \qquad (\text{П}.3)$$

Наконец, обратимся к диффузионному члену в уравнении (3.4). В однородном случае $\Delta_1\langle c_1\rangle=\Delta_2\langle c_2\rangle=0$, и остаётся

$$diff=-D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_1}\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_1}\Delta_3\langle c_1c_3\rangle+\frac{\partial p_2}{\partial c_2^2}\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_1}\Delta_3\langle c_2c_3\rangle\right)-$$
$$-D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_1}\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_2}\Delta_3\langle c_1c_3\rangle+\frac{\partial p_2}{\partial c_2^2}\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_2}\Delta_3\langle c_2c_3\rangle\right)$$

Здесь нужно только конкретизировать коэффициенты, содержащие пределы типа $\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_1}\Delta_3\langle c_1c_3\rangle$. Обозначим через $B_{c,c}(\mathbf{r})=\langle c(\mathbf{x})c(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle$ корреляционную функцию поля концентрации в изотропном случае и $A(\mathbf{r})=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)B_{c,c}(\mathbf{r})$, где $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$ – соответствующий оператор Лапласа.

Имеем

$$\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_1}\Delta_3\langle c_1c_3\rangle=A(0),$$
$$\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_1}\Delta_3\langle c_2c_3\rangle=A(r),$$
$$\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_2}\Delta_3\langle c_1c_3\rangle=A(r),$$
$$\lim_{\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}_2}\Delta_3\langle c_2c_3\rangle=A(0)$$

Тогда диффузионный член запишется в виде

$$diff = -D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(A(0)\frac{\partial p_2}{\partial c_1}+A(r)\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)-D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{A(r)\partial p_2}{\partial c_1}+A(0)\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)$$

Окончательно уравнение (П.3) для двухточечной ПРВ в изотропном случае запишется в виде

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}+\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}\right)\left(B_{L,c}(r)\left(\frac{\partial p_2}{\partial c_1}-\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{2}B_{cc,L}(r)\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1^2}+\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_2^2}\right)-2B_{Lc,c}(r)\frac{\partial^2 p_2}{\partial c_1 \partial c_2}\Bigg)-$$
$$-D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(A(0)\frac{\partial p_2}{\partial c_1}+A(r)\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)-D\frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{A(r)\partial p_2}{\partial c_1}+A(0)\frac{\partial p_2}{\partial c_2}\right)=0 \quad (\text{П.4})$$

Это уравнение содержит в качестве коэффициентов четыре функции: $B_{L,c}(r)$, $B_{cc,L}(r)$, $B_{L,cc}(r)$ и $A(r)$.

Уравнение для одноточечной ПРВ может быть получено из уравнения (П.4) переходом к $r=0$ и использованием свойств СПРВ или простым интегрированием по c_2.

Благодарности и ссылки на гранты

Благодарим Э.В. Теодоровича за помощь в подготовке публикации. Работа поддержана в рамках проекта INTAS (# 00-353)

Литература

1. Миллионщиков М.Д. К теории однородной турбулентности // Докл. Акад. Наук. 1941. Т. 32. № 9. С.611–614.
2. Фрост В.А. Математическая модель турбулентного горения //Труды третьего Всесоюзного совещания по теории горения. М. Наука. т.1. С. 122–125. 1960
3. Kuznetsov V.R., Sabelnikov У.A. Turbulence and Combustion. Hemisphere Publish . Corp., New York. 1990.
4. OBrien E. E. (1980) The probability density function approach to turbulent reactive flows. Turbulent Reacting Flows, Eds. Libby P. A.and Williams F.A., Springer–Verlag, Chap. 5.
5. Eswaran V., OBrien E.E., Deckert A. The modeling of the two-point probability density function of a reacting scalar in isotropic turbulence// *Combust. Sci. Tech.,* Vol. 65, 1–18. 1989.
6. Любимов Б.Я., Улинич Ф.Р. К проблеме замыкания в теории турбулентности // Докл. Акад. Наук. 1970. Т. 191. № 3. С.551–552.
7. Monin A.S., Yaglom A.M. (1975). Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1. M.I.T. Press.
8. Крамер Г. Математические методы статистики. М. Мир. 1975. 648с.

Статья поступила в редакцию 7 октября 2016 г.