

Capillary and Gravity Surface Waves with Accompanied Ligaments: Asymptotic Theory and Drop Impact Experiment

Yu. D. Chashechkin, A. A. Ochirov

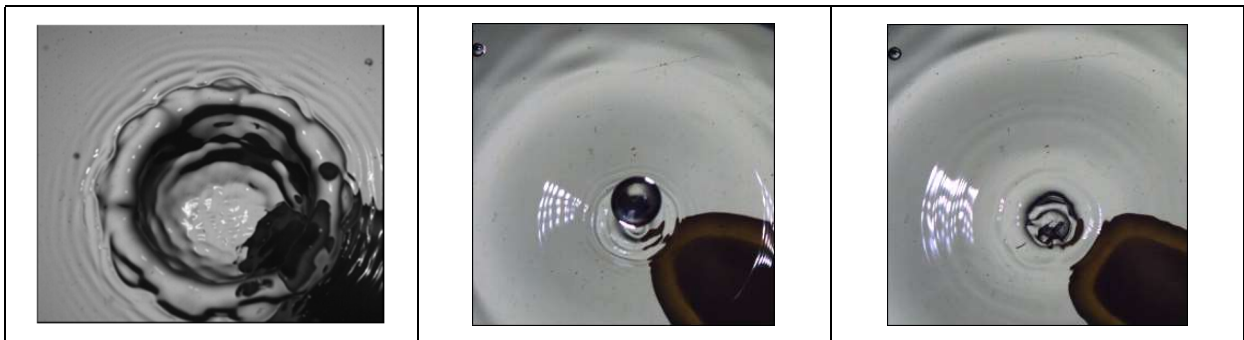
*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,
Moscow, 119526, Russia*

yulidch@gmail.com, otchirov@mail.ru

Abstract

Capillary, gravity, and capillary-gravity surface periodic flows in different fluid models are investigated analytically using the theory of singular perturbations. Models of viscous and ideal, homogeneous or uniformly stratified fluids are considered. The periodic surface flow in the viscous fluid model contains ligaments that are thin trickles, in addition to wave component. Approximate expressions of the dispersion relations for all flow components in the models under consideration are presented. The studied components observed experimentally at all stages of the evolution of the drop impact flow.

Keywords: Surface periodic flows, waves, ligaments, structure, asymptotic theory, singular expansions, drop impact.



Different shapes of circular capillary waves in a drop impact flow

УДК532.59

Капиллярные и гравитационные поверхностные волны и сопутствующие лигаменты: асимптотическая теория и эксперимент

Ю. Д. Чашечкин, А. А. Очиров

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1
yulidch@gmail.com, otchirov@mail.ru*

Аннотация

Аналитически исследованы капиллярные, гравитационные и капиллярно-гравитационные поверхностные периодические течения в различных моделях с использованием теории сингулярных возмущений. Рассмотрены модели вязких и идеальных, однородных или равномерно стратифицированных жидкостей. Периодический поверхностный поток в модели вязкой жидкости, помимо волновой составляющей, содержит лигаменты, проявляющиеся в виде тонких струек. Представлены приближенные выражения дисперсионных соотношений для всех составляющих течения в рассматриваемых моделях. Исследуемые компоненты наблюдались экспериментально на всех этапах эволюции импакта капли.

Ключевые слова: Поверхностные периодические течения, волны, лигаменты, структура, асимптотическая теория, сингулярные разложения, импакт капли.

1. Введение

Изучение периодических течений в жидкостях, наблюдаемых с доисторических времен и художественно описываемых со времен античности, влияние которых остро ощущают жители прибрежных районов и мореплаватели, систематически проводится с середины XVIII века, первоначально экспериментально [1, 2], а с появлением систем уравнений движения жидкостей – математически [3]–[5]. Традиционно проводится только анализ волнового движения при изучении периодических течений вдоль свободной поверхности жидкости [6]–[9]. Большое количество исследований посвящено классификации, описанию физических причин возникновения волн и предсказанию их поведения при распространении и влиянии на климат [10]–[13]. В то же время экспериментально наблюдается тонкая структура потоков жидкости [14]–[16].

В течениях импакта капли помимо капиллярно-гравитационных волн на всех этапах эволюции явления возникают различные волокна, которые определяют перенос вещества и энергии [17]. Изменение энергии океана без учета конверсии доступной поверхностной потенциальной энергии обстоятельно исследовано в [18]. Вопрос о механизмах передачи энергии от поверхностных и внутренних океанических волн акустическим периодическим возмущениям поставлен в [19]. Внимание к поиску полных решений уравнений движения привлекалось в [20]. Волновые составляющие течения в идеальных однослойных и двухслойно стратифицированных жидкостях подробно проанализированы в [21]. Поверхностные и внутренние волны, а также сопутствующие им мелкие составляющие течения в вязких жидкостях изучены в [22, 23]. Периодические течения в слабосжимаемых средах рассмотрены в работе [24]. Фундаментальные уравнения вязких и идеальных, однородных или стратифици-

рованных жидкостей рассматриваются в работе [25]. В настоящей работе исследуется распространение периодических течений в слабосжимаемых вязких сплошных средах и показано изменение дисперсионных соотношений при переходе к более простым моделям. Обсуждаются результаты экспериментальных наблюдений волн и тонкой структуры течений на разных этапах эволюции процесса слияния капли с покоящейся принимающей жидкостью в импактном режиме.

2. Постановки задачи

Математическая постановка задачи основана на фундаментальной системе уравнений. Она состоит из уравнения состояния, уравнений для описания переноса вещества, концентрации примеси, температуры и импульса и записывается следующим образом [20, 25]:

$$G = G(P, S, s_n, T), \quad (1)$$

$$\rho = \rho(P, S, s_n, T), \quad (2)$$

$$\partial_t \rho + \nabla_j (p^j) = Q_\rho, \quad (3)$$

$$\partial_t (p^i) + \nabla_j \Pi^{ij} = \rho g^i + 2\varepsilon^{ijk} p_j \Omega_k + Q^i, \quad (4)$$

$$\partial_t (\rho T) + \nabla_j (p^j T) = \Delta(\kappa_T \rho T) + Q_T, \quad (5)$$

$$\partial_t (\rho s_n) + \nabla_j (p^j s_n) = \Delta(\kappa_s \rho s_n) + Q_{s_n} \quad (6)$$

Здесь G – потенциал Гиббса; $Q_\rho, Q^i, Q_T, Q_{s_n}$ определяют источник массы, импульса, температуры и концентрации соли соответственно; p^j обозначает компоненты импульса; $\Pi^{ij} = \rho u^i u^j + P \delta^{ij} - \sigma^{ij}$ – тензор плотности потока импульса; u^i – компоненты скорости жидкости; δ^{ij} – дельта функция; $\sigma^{ij} = \mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^k} \right) + \zeta \delta^{ij} \frac{\partial u^k}{\partial x^k}$ обозначает тензор вязких напряжений; μ, ζ – динамическая и объемная вязкости соответственно; g^i – компоненты вектора ускорения свободного падения; ε^{ijk} – символ Леви – Чивиты; Ω – угловая скорость глобального вращения; κ_T, κ_s определяют коэффициенты температуропроводности и диффузии n -й примеси соответственно, символ P обозначает давление, S – энтропию, s_n – соленость n -й примеси и T – температуру. Математическая формулировка должна быть дополнена начальными и граничными условиями. Условия непротекания и прилипания на поверхности твердого непроницаемого тела Σ записываются следующим образом:

$$\mathbf{u}|_\Sigma = 0, \mathbf{u}|_{t \leq 0} = 0, P|_{t \leq 0} = P_0, s_n|_{t \leq 0} = s_{n0}, T|_{t \leq 0} = T_0 \quad (7)$$

Здесь T_0, P_0, s_{n0} – исходные значения температуры, давления и солености, соответственно. В настоящем исследовании рассматривается двумерное периодическое движение в декартовой системе координат Oxz с осью Oz , противоположно направленной с ускорением свободного падения. Ось Ox совпадает с равновесным уровнем свободной поверхности жидкости $z = 0$. Дополнительно необходимо записать граничные условия на свободной поверхности или границе раздела двух сплошных сред $z = \zeta(x, t)$. Кинематическое граничное условие записывается для обоих контактирующих слоев (или для одной среды в случае свободной поверхности): материальная производная функции F определяющей форму поверхности, на границе принимает нулевое значение. Динамические граничные условия определяются с использованием баланса сил на границе раздела (свободной поверхности жидкости)

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) F = 0, \quad (8)$$

$$n_o^k \sigma_o^{ik} + n_a^k \sigma_a^{ik} = 0 \quad (9)$$

Здесь n^k – компоненты единичного вектора нормали к поверхности раздела, а нижние индексы « o » и « a » относятся к контактирующим средам: океану и атмосфере соответственно.

Математическая формулировка очень объемна и при анализе возникают громоздкие выражения. Для решения исследователи вынуждены прибегать к некоторым упрощениям. В настоящей работе рассматривается модель изотермической среды в отсутствие примесей и источников массы $Q_\rho = 0$ в слабосжимаемой (или несжимаемой) жидкости.

2.1. Модель слабосжимаемой жидкости

В модели двухслойной системы, состоящей из стратифицированного слабосжимаемых океана и атмосферы, давление в обеих средах записывается в виде суммы гидростатического давления и слагаемого, связанного с распространением периодического возмущения

$$P^{o,a} = \int_z^\zeta \rho^{o,a}(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}^{o,a}(x, z, t) \quad (10)$$

Если вариации плотности $\tilde{\rho}^{o,a}$ малы по отношению к соответствующему равновесному значению $\rho_{00}^{o,a}$, то профиль плотности в каждой среде может быть записан в виде

$$\rho^{o,a} = \rho_{00}^{o,a} (r^{o,a}(z) + \tilde{\rho}^{o,a}(x, z, t)) \quad (11)$$

Здесь функции $r^{o,a}(z)$ определяют начальную стратификацию плотности. В настоящей работе используется модель экспоненциальной стратификации, в которой начальная стратификация выглядит следующим образом:

$$r^{o,a}(z) = \exp\left(-\frac{z}{\Lambda^{o,a}}\right) \quad (12)$$

Стратификация характеризуется масштабом стратификации $\Lambda^{o,a}$ и частотой плавучести $N^{o,a} = \sqrt{g/\Lambda^{o,a}}$. После проведения процедуры линеаризации задачи математическая формулировка записывается следующим образом [24]:

$$\begin{aligned} z < 0: \int_z^\zeta e^{-\xi/\Lambda^o} g \partial_x \tilde{\rho}^o(x, \xi, t) + e^{-\xi/\Lambda^o} g \partial_x \zeta + \partial_t u^o - v^o \Delta u^o + \partial_x \tilde{P}^o &= 0, \\ e^{-z/\Lambda^o} \partial_t w^o - v^o e^{-z/\Lambda^o} \Delta w^o + \frac{\partial_z \tilde{P}^o}{\rho_{00}^o} &= 0, \\ \partial_t \tilde{\rho}^o - \frac{w^o}{\Lambda^o} + \partial_x u^o + \partial_z w^o &= 0, \\ \frac{1}{\rho_{00}^o c^{o2}} \partial_t \tilde{P}^o - \frac{w^o g}{c^{o2}} + \partial_x u^o + \partial_z w^o &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} z > 0: \int_z^\zeta e^{-\xi/\Lambda^a} g \partial_x \tilde{\rho}^a(x, \xi, t) + e^{-\xi/\Lambda^a} g \partial_x \zeta + \partial_t u^a - v^a \Delta u^a + \partial_x \tilde{P}^a &= 0, \\ e^{-z/\Lambda^a} \partial_t w^a - v^a e^{-z/\Lambda^a} \Delta w^a + \frac{\partial_z \tilde{P}^a}{\rho_{00}^a} &= 0, \\ \partial_t \tilde{\rho}^a - \frac{w^a}{\Lambda^a} + \partial_x u^a + \partial_z w^a &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_{00}^a c^{a2}} \partial_t \tilde{P}^a - \frac{W^a \mathbf{g}}{c^{a2}} + \partial_x u^a + \partial_z w^a = 0; \quad (14)$$

$$z = 0 : \partial_t \zeta - w^o = 0, \quad \partial_t \zeta - w^a = 0, \quad u^o - u^a = 0,$$

$$\tilde{P}^o - \tilde{P}^a + 2\rho_{00}^a v^a \partial_z w^a - 2\rho_{00}^o v^o \partial_z w^o + \sigma \partial_{xx} \zeta = 0,$$

$$\rho^o v^o (\partial_z u^o + \partial_x w^o) - \rho^a v^a (\partial_z u^a + \partial_x w^a) = 0 \quad (15)$$

Здесь $u^{o,a}, w^{o,a}$ – горизонтальные и вертикальные компоненты скорости соответствующей жидкости, а $c^{o,a}$ определяют скорость звука в каждой среде. Будем искать периодическое решение системы уравнений (13)–(15) в виде периодических функций, пропорциональных $\propto \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t)$ с комплексно определенными компонентами волнового вектора $k_{x,z}$ и действительной положительно определенной частотой периодического движения ω . Подстановка функций такого вида в систему уравнений приводит к дисперсионным соотношениям в обеих средах (здесь для уменьшения громоздкости записываемых выражений опущены верхние индексы, относящиеся к океану и атмосфере соответственно)

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{c^2 \Lambda^2} \left[\omega (v(k_x^2 + k_z^2) - i\omega) (-gk_x^2 \Lambda + \omega(i + k_z \Lambda)(v(k_x^2 + k_z^2) - i\omega)) + \right. \\ & \quad + e^{z/\Lambda} k_z \left((g + ic^2 k_z^2) (-gk_x^2 \Lambda + \omega(i + k_z \Lambda)(v(k_x^2 + k_z^2) - i\omega)) + \right. \\ & \quad \left. \left. + c^2 k_x^2 \Lambda (N^2 (ik_z \Lambda - 1) + \omega(iv(k_x^2 + k_z^2) + \omega)) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

В модели слабвязких жидкостей дисперсионные соотношения (16) являются сингулярно возмущенными. Такие уравнения имеют два типа решений: регулярные и сингулярные. Регулярные корни описывают волновую составляющую периодических течений и сводятся к известным дисперсионным соотношениям для волновых движений при выполнении предельных переходов. Сингулярные корни описывают лигаментную составляющую периодического течения и определяют структуру потока. Математически решения, соответствующие волновой составляющей, определяются следующим условием:

$$|\operatorname{Re}(k_z^{o,a})| \gg |\operatorname{Im}(k_z^{o,a})|; \quad (17)$$

а решения, описывающие лигаментные компоненты течения, определяются выражением

$$|\operatorname{Re}(k_l^{o,a})| \sim |\operatorname{Im}(k_l^{o,a})| \quad (18)$$

Для различия сингулярных и регулярных корней в выражении (18) введено переобозначение $k_l^{o,a}$.

2.2. Модель несжимаемой жидкости

Рассмотрим периодическое движение вдоль свободной поверхности $z = \zeta$ в модели в однослойной полубесконечной несжимаемой жидкости. Задача рассматривается в упрощенном виде, который не уточняет природу расслоения жидкости. В этом случае уравнение состояния заменяется выражением для плотности (11). Основные уравнения движения включают в себя уравнения Навье – Стокса и уравнения неразрывности

$$z < \zeta : \begin{cases} \rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{g} \\ \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, w)$ – скорость жидкости, возникающая вследствие распространения периодического возмущения, а давление P записывается в виде суммы атмосферного P_0 давления, гидростатического давления и периодической добавки \tilde{P}

$$P = P_0 + \int_z^\zeta \rho(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}(x, z, t) \quad (20)$$

Задача (11), (19)–(20) дополняется физически обоснованными граничными условиями на свободной поверхности и естественным условием затухания движения с глубиной

$$z = \zeta : \begin{cases} \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u} \cdot \nabla(z - \zeta) = 0 \\ \boldsymbol{\tau} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot ((\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0 \\ P - P_0 - \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} - 2\rho_{00}(r(z) + \tilde{\rho}) \nu \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Задача решается методом разложения по малому параметру, пропорциональному амплитуде возмущений с использованием теории сингулярных разложений [26, 27].

2.2.1. Задача первого порядка малости

Предположение о несжимаемости жидкости позволяет ввести в приближении Буссинеска скалярную функцию тока ψ , определяющую компоненты вектора скорости

$$u = \partial_z \psi, \quad w = -\partial_x \psi \quad (22)$$

После линеаризации задачи для инфинитезимальных возмущений и проведения процедуры снесения граничных условий [26, 28] математическая формулировка задачи записывается следующим образом:

$$z < 0 : \begin{cases} \rho_{00} g \partial_x \zeta + \rho_{00} g \int_z^\zeta \partial_x \tilde{\rho}(x, \xi, t) d\xi + \rho_{00} \partial_{tz} \psi - \rho_{00} \nu \partial_z \Delta \psi + \partial_x \tilde{P} = 0 \\ -\rho_{00} \partial_{tx} \psi + \rho_{00} \nu \partial_x \Delta \psi + \partial_z \tilde{P} = 0 \\ \partial_t \tilde{\rho} + \frac{\exp(-z/\Lambda)}{\Lambda} \partial_x \psi = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$z = 0 : \begin{cases} \tilde{P} + 2\rho \nu \partial_{zx} \psi + \sigma \partial_{xx} \zeta = 0 \\ \partial_t \zeta + \partial_x \psi = 0 \\ \partial_{zz} \psi - \partial_{xx} \psi = 0 \end{cases} \quad (24)$$

В случае распространения поверхностных возмущений с положительно определенной частотой $\omega > 0$ решение ищется в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \zeta \\ \tilde{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_m \exp(k_z z) \\ A_m \\ P_m \exp(k_z z) \end{pmatrix} \exp(ik_x x - i\omega t) + C.C. \quad (25)$$

Здесь символом $C.C.$ обозначены комплексно сопряженные слагаемые, а символами Y_m, A_m, P_m обозначены амплитуды соответствующих величин. Компоненты комплексно определенного волнового вектора $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + i\mathbf{k}_2 = (k_x, k_z)$ обозначены $k_{x,z}$. Подставляя (25) в (23), получим дисперсионное соотношение, связывающее компоненты волнового вектора с частотой периодического движения

$$\omega(k_x^2 - k_z^2)(ivk_x^2 - ivk_z^2 + \omega) - N^2 k_x^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) = 0 \quad (26)$$

Рассмотрение выражения (26) в безразмерном виде свидетельствует о его принадлежности к классу сингулярно возмущенных уравнений. Выберем в качестве параметров безразмеривания собственные масштабы задачи. Роль временного масштаба играет обратная частота плавучести $\tau_b = N^{-1}$. А в качестве пространственного масштаба выберем вязкий волновой $\delta_N^v = (\nu g)^{1/3} / N$ масштаб. Дополнительный характерный собственный параметр задачи – вязкий пространственный масштаб $\delta_g^v = \sqrt[3]{\nu^2 / g}$. При таком выборе параметров безразмеривания естественным образом формируется параметр $\varepsilon = \delta_g^v / \delta_N^{gv} = N\nu^{1/3} / g^{2/3}$. Для большинства жидкостей этот параметр принимает малые значения $\varepsilon \ll 1$. А выражение (26), связывающее безразмерные компоненты волнового вектора $k_{*x,z}$ и частоту ω_* представляется в виде

$$i\varepsilon(k_{*x}^2 - k_{*z}^2)^2 \omega_* + (k_{*x}^2 - k_{*z}^2) \omega_*^2 - k_{*x}^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) = 0 \quad (27)$$

Уравнение (27) имеет четыре корня. Два решения находятся с использованием регулярного разложения. Такие регулярные или волновые решения k_{*z} описывают волновой компонент течения. Два других решения находятся с использованием сингулярного разложения. Такие решения являются сингулярными или лигаментными и переобозначаются k_{*l} . Сингулярные решения описывают тонкую структуру периодического течения жидкости. Лигаменты проявляются в виде тонких высокоградиентных струй, сопровождающих поверхностные волны. Граничные условия (24) определяют дисперсионное уравнение, которое в размерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} & (k_x^2 + k_z^2) [k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)] - \\ & - (k_x^2 + k_l^2) [k_z \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_z (3k_x^2 - k_z^2)] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Символом $\gamma = \sigma / \rho_{00}$ обозначен коэффициент поверхностного натяжения жидкости, нормированный на равновесное значение плотности. В безразмерном виде дисперсионное уравнение (28) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & (k_l^{*2} + k_{x*}^2) [\delta^2 \varepsilon k_{x*}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{z*} (k_{z*}^2 - 3k_{x*}^2) + k_{x*}^2 - \varepsilon k_{z*} \omega_*^2] - \\ & - (k_{z*}^2 + k_{x*}^2) (\delta^2 \varepsilon k_{x*}^4 + i\varepsilon^2 \omega_* k_{l*} (k_{l*}^2 - 3k_{x*}^2) + k_{x*}^2 - \varepsilon k_{l*} \omega_*^2) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Символ $\delta = \delta_g^v / \delta_N^v = \sqrt{N\gamma / \nu g}$ обозначает безразмерный параметр, характеризующий соотношение собственных масштабов задачи: капиллярной постоянной $\delta_g^v = \sqrt{\gamma / g}$ и микромасштабов Стокса $\delta_N^v = \sqrt{\nu / N}$. Параметр δ не обязательно является малым и принимает значения порядка 1 для широкого класса жидкостей. Подставляя асимптотические значения и оставляя только основные члены, мы получаем асимптотическое выражение, определяющее дисперсионные характеристики [24]. Отметим, что количество корней уравнения соответствует порядку системы исходных уравнений. Из-за громоздкости выражений нетривиальные решения в этой статье не приведены.

Анализ дисперсионных соотношений показывает, что степень выраженности стратификации влияет на масштаб регулярной составляющей периодического потока (длину волны λ) и практически не изменяет масштаб сингулярной составляющей (масштаб лигамента δ_l). На рис. 1 показаны зависимости линейных масштабов волнового компонента (рис. 1, а) и лигамента, присоединенного к волне (рис. 1, б) в жидкости с параметрами воды в модели стратифицированной жидкости с разными значениями частоты плавучести.

При построении зависимости масштаба лигамента от частоты для жидкостей с другими значениями частоты плавучести значения толщин лигамента отличаются на доли процентов и на рисунке различные кривые сливаются.

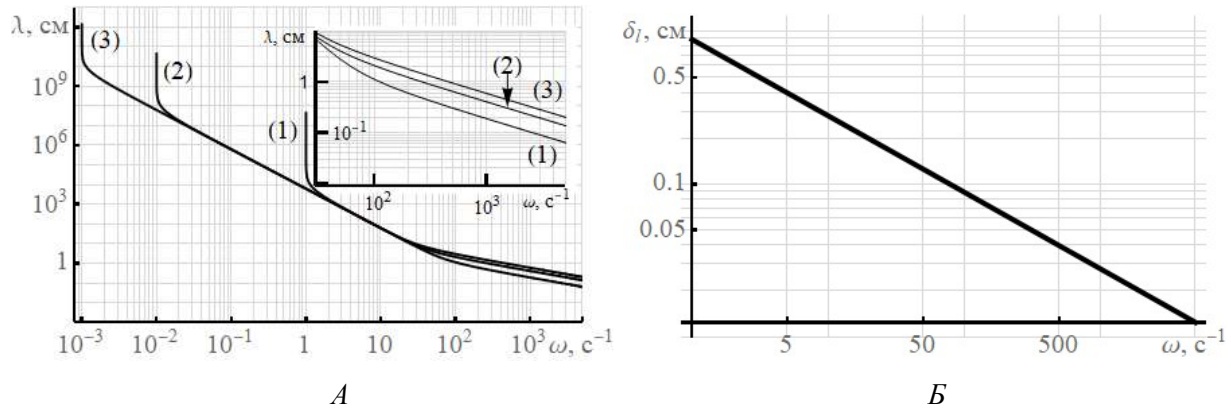


Рис. 1. Зависимость линейных масштабов компонентов периодического течения от частоты для стратифицированной жидкости с параметрами воды: (а) длины волны, кривые (1)–(3) $N = 1, 0.01, 0.001 \text{ c}^{-1}$; (б) толщины лигамента в сильностратифицированной жидкости $N = 1 \text{ c}^{-1}$

2.2.2. Упрощенные модели

В модели однородной вязкой жидкости плотность предполагается постоянной $\rho = \text{const}$. Это существенно упрощает систему уравнений, однако, в то же время убирает из рассмотрения жидкость, в которой происходит движение. Объемная плотность, характеризующая среду, параметры задачи, характеризующие стратификацию, исчезают из уравнений движения. Это приводит к уменьшению числа параметров, определяющих характерные масштабы. Дисперсионное соотношение (26) упрощается

$$(k_x^2 - k_z^2)(ivk_x^2 - ivk_z^2 + \omega) = 0 \quad (30)$$

Уравнение (30) также имеет четыре корня. Регулярные волновые решения найдены с использованием регулярного разложения, а сингулярные лигаментные решения – с использованием сингулярного разложения

$$k_z = \pm k_x, \\ k_l = \pm \sqrt{k_x^2 - i \frac{\omega}{\nu}} \quad (31)$$

Принимая во внимание (31), соотношение (28) также существенно упрощается

$$k_x \left[2k_x (k_l \omega^2 - gk_x^2 - \gamma k_x^4 + i\omega \nu k_l (3k_x^2 - k_l^2)) - (k_x^2 + k_l^2) (\omega^2 - gk_x - \gamma k_x^3 + 2i\omega \nu k_x^2) \right] = 0 \quad (32)$$

В модели вязкой однородной жидкости присутствуют как волновые, так и лигаментные решения, но некоторые из собственных параметров задачи, определяющих характер течения жидкости, исчезают.

В модели идеальной жидкости лигаменты вырождаются. В случае экспоненциально стратифицированной жидкости дисперсионные соотношения имеют вид

$$\omega^2 (k_x^2 - k_z^2) - N^2 k_x^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) = 0, \\ \gamma k_x^3 + gk_x - \omega^2 \sqrt{1 - \frac{N^2}{\omega^2}} = 0 \quad (33)$$

В однородной идеальной жидкости дисперсионные уравнения еще сильнее упрощаются

$$k_x^2 = k_z^2, \quad \gamma k_x^3 + gk_x - \omega^2 = 0 \quad (34)$$

Соотношения (30) – (34) могут быть получены из (26), (28) с использованием соответствующих предельных переходов. Уменьшение порядка системы уравнений приводит к потере части решений.

3. Экспериментальные наблюдения лигаментов и волн в импакте капли

В эксперименте с импактом капли капиллярные волны, дополненные тонкими внутренними структурами, наблюдаются на многих этапах эволюции явления: на ранней стадии вокруг венца, на стенках венца и каверны (рис. 2, *а*), во впадине вокруг опускающегося всплеска (рис. 2, *б*) и на стенках вторичной каверны, образовавшейся после того, как всплеск утих.

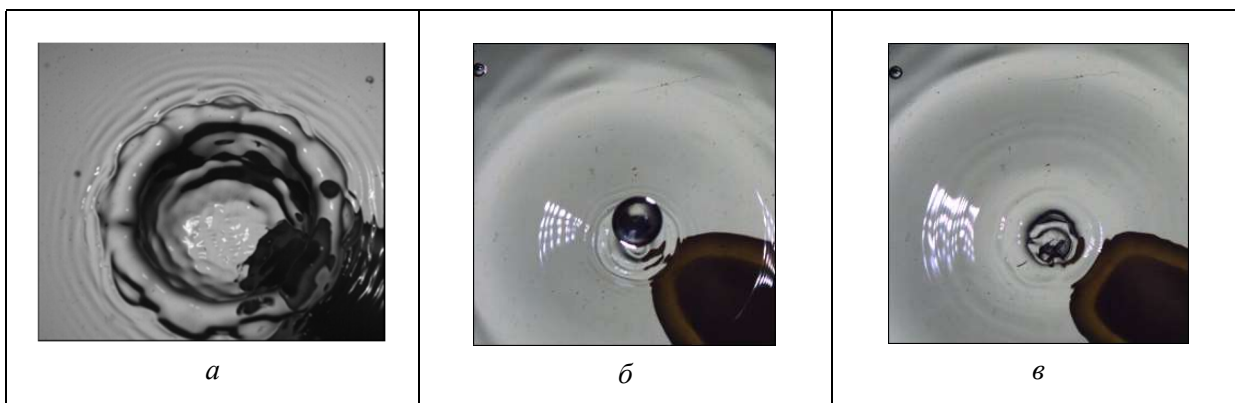


Рис. 2. Различные формы кольцевых капиллярных волн в потоке при ударе капли

Капиллярные волны играют важную роль в распределении импульса капли по поверхности жидкости. Они способствуют образованию облака пузырьков газа, когда шероховатая волнистая поверхность покрывается быстрыми внутренними потоками. Волны вызывают искажение формы первичных и вторичных каверн, которые также способствуют образованию и отрыву газовых пузырьков сложной формы. Газовые полости, которые разрываются с образованием перемычки, излучают акустические сигналы, которые распространены в естественных условиях (“шум дождя”) и активно изучаются экспериментально и теоретически.

4. Заключение

Параметры задачи и пространственные и временные масштабы компонентов потока формулируют требования к точности и разрешающей способности эксперимента. Рассмотрение простых моделей жидкости приводит к тому, что некоторые решения, определяющие процессы, происходящие в потоках жидкости, теряются. Сингулярные компоненты определяют тонкую структуру течений и сопровождают все рассматриваемые типы волн – звуковые, гравитационные, капиллярные и капиллярно-гравитационные. Полученные решения диктуют требования к постановке эксперимента по наблюдению полных решений периодических течений.

Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 124012500442-3).

Литература

1. D'Alembert J.-L.R., la Marquis de Condorcet J.M.A., l'abbe Bossut C. Nouvelles. Expériences sur la Résistance des Fluids. C.-A. Jombert: Paris, France, 1777.
2. Russell, J.S. Report on waves. Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science, York, September 1844; Murray J., Street A.: London, UK, 1845.
3. Euler L. Principes généraux du mouvement des fluids // Mémoires L'académie Des. Sci. Berl. 1757. Vol.11. Pp. 274–315.
4. Navier C.-L.-M.-H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluids // Mém. l'Acad. Sci. 1822. Vol. 6. Pp. 389–417.
5. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Camb. Phil. Soc. 1847, Vol. 8. Pp. 441–455.
6. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 598 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны М: Мир. – 1977.
8. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Гидрометеоиздат, 1980.
9. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане Ч.1. М.: Мир, 1981.
10. Massel S. R. Ocean surface waves: their physics and prediction. World scientific, 1996.
11. Toffoli A., Bitner-Gregersen E. M. Types of ocean surface waves, wave classification // Encyclopedia of maritime and offshore engineering. 2017. Pp. 1–8.
12. Lefevre J. M., Cotton P. D. Ocean surface waves International Geophysics. Academic Press, 2001.
13. Матвеев Л. Т. Физика атмосферы. СПб.: Гидрометеоиздат., 2000; 777 с.
14. ГОСТ 4401-81. Межгосударственный стандарт: Атмосфера стандартная. Параметры.
15. US Standard Atmosphere 1976; NOAA-S/T-76-1562.NASA-TM-X-74335. AccessionNumber 77N16482. Available online: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19770009539>
16. Федоров К.Н. Тонкая термохалинная структура океана. Л-д, Гидрометеоиздат. 1976. 184 с.
17. Чашечкин Ю. Д. Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли //Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2021. Т. 94. № 1. С. 73–91.
18. Wunsch C. Is the ocean speeding up? Ocean surface energy trends // Journal of Physical Oceanography. 2020. Vol. 50. No. 11. Pp. 3205–3217.
19. Wunsch C. Can oceanic flows be heard? Abyssal melodies // The Journal of the Acoustical Society of America. 2022. Vol. 152. No. 4. Pp. 2160–2168.
20. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // Axioms. 2021. Vol. 10. P. 286
21. Чашечкин Ю. Д., Очиров А. А., Лапшина К. Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2022. Т. 23, вып. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
22. Chashechkin Y. D. Conventional partial and new complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation // Mathematics. Vol. 9. No. 586
23. Слепышев А. А., Анкудинов Н. О. Генерация вертикальной тонкой структуры внутренними волнами на сдвиговом течении // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40. № 2. С. 180–197.
24. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic Flows in a Viscous Stratified Fluid in a Homogeneous Gravitational Field // Mathematics. Vol. 11. No 21.
25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теорет. физ. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 736 с.
26. Найфэ А. Введение в методы возмущений М.: Мир, Москва, 1984, 535 с
27. Bender C. M., Orszag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory. Springer Science & Business Media, 2013.

28. Joseph D. D. Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves // Archive for rational mechanics and analysis. 1973. Vol. 51. Pp. 295–303.

References

1. D'Alembert J.-L.R., la Marquis de Condorcet J.M.A., l'abbé Bossut C., *Nouvelles Expériences sur la Résistance des Fluids*, C.-A. Jombert: Paris, France, 1777.
2. Russell J. S., *Report on waves. Report of the fourteenth meeting of the British association for the advancement of science*, York, September 1844; Murray J., Street A.: London, UK, 1845.
3. Euler L., Principes généraux du mouvement des fluids, *Mémoires L'académie Des. Sci. Berl.*, 1757, vol.11, pp. 274–315.
4. Navier C.-L.-M.-H., Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluids, *Mém. l'Acad. Sci.*, 1822, vol. 6, pp. 389–417.
5. Stokes G. G., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Camb. Philos. Soc.*, 1845, vol. 8, pp. 287–305.
6. Lighthill J., *Waves in fluids*, Cambridge University Press, 1978.
7. Whitham, G. B., *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience: N.-Y. USA, 1999.
8. Phillips O. M., *The Dynamics of the Upper Ocean* (Second Edition), Syndics of the Cambridge University Press, England, 1977.
9. Le Blon P., Mysak L., *Waves in Ocean*, Amsterdam: Elsevier, 1978.
10. Massel S. R., *Ocean surface waves: their physics and prediction*, World scientific, 1996.
11. Toffoli A., Bitner-Gregersen E. M., Types of ocean surface waves, wave classification, *Encyclopedia of maritime and offshore engineering*, 2017, pp. 1–8.
12. Lefevre J. M., Cotton P. D., *Ocean surface waves International Geophysics*, Academic Press, 2001.
13. Matveev L. T., *Atmospheric Physics*, Gidrometeoizdat: St. Petersburg, Russia, 2000, 777 p. [In Russian].
14. GOST 4401-81. Interstate standard: Standard atmosphere. Parameters. [In Russian].
15. US Standard Atmosphere 1976; NOAA-S/T-76-1562.NASA-TM-X-74335. AccessionNumber 77N16482. Available online: <https://ntrs.nasa.gov/citations/19770009539>
16. Fedorov K. N., *The subtle thermohaline structure of the ocean*, L-d, Gidrometeoizdat, 1976. [In Russian].
17. Chashechkin Yu. D., Packets of capillary and acoustic waves of drop impact, *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, vol. 94, no. 1, pp. 73–92, 2021. [In Russian].
18. Wunsch C., Is the ocean speeding up? Ocean surface energy trends, *J. Physical Oceanography*, 2020, vol. 50, no. 11, pp. 3205–3217. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0082.1>
19. Wunsch C., Can oceanic flows be heard? Abyssal melodies, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2022, vol. 152, no. 4, pp. 2160–2168. DOI:10.1121/10.0014603
20. Chashechkin Y. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*, 2021, vol. 10, p. 286. <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
21. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A., Lapshina K. Y., Surface waves along the interface of stably stratified liquids, *Technical Physics*, 2024. <https://doi.org/10.1134/S1063784224700439>
22. Chashechkin Y. D., Conventional partial and complete solutions of the fundamental equations of fluid mechanics in the problem of periodic internal waves with accompanying ligaments generation, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 6, p. 586. <https://doi.org/10.3390/math9060586>
23. Slepyshev A. A., Ankudinov N. O., Generation of vertical fine structure by internal waves on shear flow, *Physical Oceanography*, 2024, vol. 31, no. 2, pp. 161–177.
24. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A., Periodic Flows in a Viscous Stratified Fluid in a Homogeneous Gravitational Field, *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 21. <https://doi.org/10.3390/math11214443>

25. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics. V.6. Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press: Oxford, UK, 1987.
26. Nayfeh A. H., *Introduction to Perturbation Technique*, John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1993.
27. Bender C. M., Orszag S. A., *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*, Springer Science & Business Media, 2013.
28. Joseph D. D., Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves, *Archive for rational mechanics and analysis*, 1973, vol. 51, pp. 295–303.
DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250536>

Статья поступила в редакцию 10 сентября 2024 г.