

# Surface Waves Along the Interface of Stably Stratified Liquids

Yu. D. Chashechkin<sup>1</sup>, A. A. Ochirov<sup>1</sup>, K. Yu. Lapshina<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526, Russia*

<sup>2</sup> *P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, 150003, Russia*

yulidch@gmail.com, otchirov@mail.ru

## Abstract

The problem of propagation of traveling surface waves along the interface of two stably stratified inviscid unlimited semi-infinite liquid media of different densities is considered. The dispersion relations of wave motions and expressions for the flows of the amount of matter and energy in both liquids are obtained and analyzed.

Keywords: surface waves, stratified liquid, interface.

The model of ideal immiscible uniformly stratified liquids is investigated. The dispersion relation in physically observable variables for plane surface waves propagating along the interface is obtained

$$k_{za} = \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right)},$$

$$k_{zw} = \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right)},$$

$$\gamma k_x^3 + g \left(1 - \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}}\right) k_x - \omega \left( \sqrt{\omega^2 - N_w^2} + \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}} \sqrt{\omega^2 - N_a^2} \right) = 0$$

For large density difference fluids (for example, an air-water system) the influence of the upper medium on the dispersion ratios is insignificant compared to the case of a single liquid. However, this effect becomes noticeable when considering liquids whose densities do not differ much from each other. The description of dispersion relations, phase and group velocities of surface waves in stratified media in physically observable variables is proposed. The expressions obtained can be used to determine the dispersion characteristics of real liquids in the gravitational wave region (where the viscosity effect is negligible) to describe the wave part of the solution. To build complete solutions, it is necessary to take into account the viscosity of the liquid.

УДК 532.65

# Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред

Ю. Д. Чашечкин<sup>1</sup>, А. А. Очиров<sup>1</sup>, К. Ю. Лапшина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,  
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д. 101-1*

<sup>2</sup> *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия, Ярославль,  
150003, ул. Советская, д. 14/2*

yulidch@gmail.com, otchirov@mail.ru

## Аннотация

В настоящем исследовании рассмотрена задача о распространении бегущих поверхностных волн вдоль границы раздела двух устойчиво стратифицированных невязких неограниченных полубесконечных жидких сред разной плотности. Получены и проанализированы дисперсионные соотношения волновых движений и выражения для потоков количества вещества и энергии в обеих жидкостях.

Ключевые слова: поверхностные волны, стратифицированная жидкость, граница раздела.

## 1. Введение

Исследования течений жидкостей привлекают внимание в связи с большим количеством академических и практических приложений [1–5]. При изучении волнового движения свободной поверхности исторически сначала рассматривались гравитационные [6, 7] и капиллярные [8] волны в однородной жидкости. Наблюдения показывали, что даже малые вариации плотности вносят заметный вклад в характеристики волнового движения. Дж. Г. Стокс в фундаментальной работе [9] положил начало исследованию волн в двухслойных жидкостях. Если среды участвуют в относительном сдвиговом смещении, то обычно основное внимание уделяется эволюции границы раздела или определению критических параметров перехода к неустойчивому состоянию [10–13]. Традиционно изучается неустойчивость Кельвина – Гельмгольца, которая в случае учета поверхностного натяжения принимает пороговый характер [14, 15]. В неоднородных средах изучается генерация [16] и распространение волн вдоль границы раздела [17], переносом вещества и энергии [18–20]. Исследование многослойных систем связано с интересом к эффекту «мертвой воды» [21]. Академический и практический интерес исследователей связан с развитием неустойчивости Рэлея – Тейлора. Подробный анализ поведения двухслойной системы идеальных жидкостей приведен в монографии [22]. Там же проведено обобщение на случай вязкой жидкости и случай экспоненциально стратифицированной нижней среды. В работе [23] довольно подробно рассмотрены двумерные и трехмерные течения (в том числе и в стратифицированной) однослойной жидкости. А в исследовании [24] рассматривается стабилизация и отражение волн в устойчиво стратифицированной жидкости со сдвиговым течением при помощи численных методов. Стоит отметить, что значительное развитие получило в основном направление, связанное с изучением условий развития неустойчивости в стратифицированных слоях. При этом используются и аналитические [25, 26] и экспериментальные [27] и численные методы [28, 29]. Однако основное внимание, как правило, уделяется критериям развития неустойчивости, а дисперсионные соотношения и собственно процесс распространения поверхностных волн не исследуется должным образом. Фазовые скорости установившихся внутренних волн в двух-

слоистой системе, в которой нижняя жидкость обладает постоянной плотностью, а верхняя – стратифицирована, рассчитаны в [30]. Задачи распространения акустических волн в системе газ-жидкость решаются при помощи численных методов [31]. Распространение волн вдоль свободной поверхности идеальной и вязкой жидкости рассмотрено в [32, 33], соответственно. При учете вязкости в решении [33] возникают тонкие высокоградиентные структуры – лигаменты, сопутствующие волнам, отсутствующие в идеальных жидкостях [32]. Научный и практический интерес представляет более детальное изучение задачи распространения волн в многослойной жидкости. Настоящее исследование является обобщением задачи [32] на случай двух несмешивающихся идеальных жидкостей.

## 2. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается распространение бегущих синусоидальных волн вдоль границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в декартовой системе координат  $Oxyz$ , в которой плоскость  $Oxy$  совпадает с равновесным положением границы раздела жидкостей, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх против направления действия поля сил тяжести  $\mathbf{g}$ . Считается, что нижняя жидкость более плотная с плотностью  $\rho_w$  занимает нижнее полупространство  $z < 0$ , а верхняя жидкость с плотностью  $\rho_a < \rho_w$  занимает верхнее полупространство  $z > 0$ . Поверхность раздела характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  или нормированным на равновесное значение плотности нижней жидкости  $\rho_{00w}$  коэффициентом  $\gamma = \sigma / \rho_{00w}$ . Считается, что вдоль границы раздела распространяется бегущая волна. Волновое возмущение поверхности описывается функцией  $z = \zeta(x, t)$ .

Задачи о распространении поверхностных волн характеризуются собственными временными и пространственными масштабами [33]. Параметры, характеризующие систему представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения собственных параметров

Параметр	Жидкости			
	Стратифицированные (СЖ)		Однородные (ОЖ)	
	Сильно	Слабо	Потенциально	Актуально
Частота плавучести $N$ , $\text{с}^{-1}$	1	0.01	0.00001	0.0
Период плавучести $T_b$	6.28 с	10.5 мин	7.3 дней	$\infty$
Масштаб стратификации $\Lambda$	9.8 м	100 км	$10^8$ км	$\infty$
Капиллярная постоянная жидкости $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$ , см	0.3	0.3	0.3	0.3
Вязкий волновой масштаб $\delta_N^{gv} = \sqrt[3]{gv/N}$ , см	2.14	200	200000	$\infty$
Микромасштаб Стокса $\delta_N^v = \sqrt{v/N}$ , см	0.1	1.0	30	$\infty$

В рассматриваемой модели собственными параметрами задачи являются частота  $N = \sqrt{g/\Lambda}$  (период  $T_b = 2\pi/N$ ) плавучести, капиллярная постоянная  $\delta_g^\gamma = \sqrt{\gamma/g}$  и масштаб стратификации  $\Lambda = |(1/\rho_{00}) d\rho/dz|^{-1}$  ( $\rho_{00}$  – значение плотности на равновесном уровне).

В основе математической формулировки лежит полная система уравнений движения [34]. Эффектами, связанными с вязкостью, диффузией и температуропроводностью в настоящем исследовании пренебрегается. Для упрощения математических выкладок задача решается в предположении, что движение не зависит от горизонтальной координаты  $y$ .

## 2.1. Математическая формулировка задачи

Математическая формулировка задачи состоит из основных уравнений движения в обеих жидкостях (уравнения Эйлера и уравнение неразрывности)

$$\begin{cases} z > \zeta : \begin{cases} \partial_t \rho_a + \operatorname{div}(\rho_a \mathbf{u}_a) = 0, \\ \rho_a \partial_t \mathbf{u}_a + \rho_a (\mathbf{u}_a \cdot \nabla) \mathbf{u}_a = -\nabla P_a + \rho_a \mathbf{g}; \end{cases} \\ z < \zeta : \begin{cases} \partial_t \rho_w + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{u}_w) = 0, \\ \rho_w \partial_t \mathbf{u}_w + \rho_w (\mathbf{u}_w \cdot \nabla) \mathbf{u}_w = -\nabla P_w + \rho_w \mathbf{g} \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее нижним индексом  $a$  обозначены величины, относящиеся к верхней жидкости, а индексом  $w$  – к нижней;  $\mathbf{u}_{a,w} = u_{a,w} \mathbf{e}_x + w_{a,w} \mathbf{e}_z$  – поле скоростей;  $\mathbf{e}_{x,z}$  – орты оси  $Ox$  и  $Oz$  соответственно, а  $P_{a,w}$  – давление в жидкости.

В качестве упрощения будем рассматривать жидкости переменной плотности без учета действия физических факторов, обеспечивающих ее переменность и вместо уравнения состояния зададим стратификацию плотности верхней и нижней жидкости. Для обеих сред будем считать, что стратификация задается экспоненциальной функцией

$$\rho_a = \rho_{00a} \left[ e^{-z/\Lambda_a} + s_a(x, z, t) \right], \quad \rho_w = \rho_{00w} \left[ e^{-z/\Lambda_w} + s_w(x, z, t) \right] \quad (2)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении используется профиль плотности, принимающий бесконечно большие значения при бесконечном удалении от границы раздела. Поскольку движение затухает с глубиной на больших глубинах амплитуды возмущений будут пренебрежимо малы с масштабами задачи (см. табл. 1) и использование предлагаемого приближения возможно. Функциями  $s_{a,w}$  задается отклонение плотности от равновесного за счет волнового движения. Давление представим в виде суммы гидростатического и волнового давлений

$$P_a = \int_z^\zeta \rho_a(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}_a, \quad P_w = \int_z^\zeta \rho_w(x, \xi, t) g d\xi + \tilde{P}_w \quad (3)$$

Задачу (1)–(3) необходимо дополнить стандартными граничными условиями на границе раздела сред

$$z = \zeta : \quad \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u}_a \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \quad \partial_t(z - \zeta) + \mathbf{u}_w \cdot \nabla(z - \zeta) = 0, \quad P_w - P_a = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla(z - \zeta)}{|\nabla(z - \zeta)|} = -\frac{\partial_x \zeta}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x \zeta)^2}} \mathbf{e}_z \quad (4)$$

## 2.2. Линеаризованная задача

Задача (1)–(4) решается в приближении Буссинеска для инфинитезимальных волн методом разложения по малому параметру. При этом нужно произвести процедуру сноса граничных условий (4) на равновесную поверхность  $z = 0$ . Обоснование процедуры можно найти в [35], подробное описание в [36], а применение в [18, 37 – 39]. В плоской постановке в приближении Буссинеска можно ввести функции тока  $\psi_{a,w}$  такие, что

$$u_a = \partial_z \psi_a, \quad w_a = -\partial_x \psi_a, \quad u_w = \partial_z \psi_w, \quad w_w = -\partial_x \psi_w \quad (5)$$

Тогда в линейном приближении в приближении Буссинеска математическая формулировка задачи для функций тока запишется следующим образом:

$$z > 0 : \quad \partial_z \tilde{P}_a - \rho_{00a} \partial_{xt} \psi_a = 0, \quad \rho_{00a} g \partial_x \zeta + \rho_{00a} \partial_{zt} \psi_a + \partial_x \tilde{P}_a = 0, \quad (6)$$

$$\partial_t s_a + \frac{1}{\Lambda_a} \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right) \partial_x \psi_a = 0; \quad (7)$$

$$z < 0: \quad \partial_z \tilde{P}_w - \rho_{00w} \partial_{xt} \psi_w = 0, \quad \rho_{00w} g \partial_x \zeta + \rho_{00w} \partial_{zt} \psi_w + \partial_x \tilde{P}_w = 0, \quad (8)$$

$$\partial_t s_w + \frac{1}{\Lambda_w} \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right) \partial_x \psi_w = 0; \quad (9)$$

$$z = 0: \quad \partial_t \zeta + \partial_x \psi_a = 0, \quad \partial_t \zeta + \partial_x \psi_w = 0, \quad \tilde{P}_w - \tilde{P}_a + \sigma \partial_{xx} \zeta = 0 \quad (10)$$

Избавляясь в уравнениях Эйлера и уравнениях неразрывности от давления и функции, задающей колебания плотности, приведем уравнения (6)–(9) к выражениям для функций тока

$$z > 0: \quad \partial_{tt} \Delta \psi_a + N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right) \partial_{xx} \psi_a = 0; \quad (11)$$

$$z < 0: \quad \partial_{tt} \Delta \psi_w + N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right) \partial_{xx} \psi_w = 0 \quad (12)$$

### 3. Решение

Решение задачи (11)–(12) с граничными условиями (10) в виде бегущих волн

$$\begin{aligned} \psi_a &= A \exp(-k_{za} z) \exp(ik_x x - i\omega t), \\ \psi_w &= B \exp(k_{zw} z) \exp(ik_x x - i\omega t) \end{aligned} \quad (13)$$

приводит к дисперсионным соотношениям, связывающим компоненты волнового вектора для обеих сред. Подставляя (13) в (11)–(12) получим

$$\begin{aligned} k_x^2 \left[ \omega^2 - N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right) \right] - k_{za}^2 \omega^2 &= 0, \\ k_x^2 \left[ \omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right) \right] - k_{zw}^2 \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Решение выражений (14) относительно вертикальных компонентов волнового вектора приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} k_{za} &= \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_a^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_a}\right)}, \\ k_{zw} &= \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right)} \end{aligned} \quad (15)$$

Подстановка (13) в граничные условия (10) с учетом (15) приводит к уравнению для компонента волнового вектора  $k_x$

$$\gamma k_x^3 + g \left( 1 - \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}} \right) k_x - \omega \left( \sqrt{\omega^2 - N_w^2} + \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}} \sqrt{\omega^2 - N_a^2} \right) = 0 \quad (16)$$

Выражение (16) проще анализировать в безразмерном виде. В качестве параметров обезразмеривания выберем собственные параметры задачи – частоту плавучести нижней среды  $N_w$  и капиллярную постоянную  $\delta_g^\gamma$ , тогда уравнение (16) преобразуется в

$$k_{*x}^3 + k_{*x}(1 - \delta\rho) - \varepsilon\omega_*\left(\sqrt{\omega_*^2 - 1} + \delta\rho\sqrt{\omega_*^2 - \delta N^2}\right) = 0,$$

$$\delta\rho = \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}}, \quad \delta N = \frac{N_a}{N_w} \quad (17)$$

Здесь  $k_{*x}$  и  $\omega_*$  – суть безразмерный компонент волнового вектора и безразмерная частота волнового движения соответственно.

Уравнение (17) имеет три корня

$$k_{*x1} = \frac{2^{1/3}(\delta\rho - 1)}{\alpha} + \frac{\alpha}{3 \cdot 2^{1/3}},$$

$$k_{*x2,3} = -\frac{(1 \pm i\sqrt{3})(\delta\rho - 1)}{2^{1/3}\alpha} - \frac{(1 \mp i\sqrt{3})\alpha}{6 \cdot 2^{1/3}}, \quad (18)$$

$$\alpha = \left\{ 27\varepsilon\omega_*\left(\sqrt{\omega_*^2 - 1} + \delta\rho\sqrt{\omega_*^2 - \delta N^2}\right) + \sqrt{-108(\delta\rho - 1)^3 + \left[27\varepsilon\omega_*\left(\sqrt{\omega_*^2 - 1} + \delta\rho\sqrt{\omega_*^2 - \delta N^2}\right)\right]^2} \right\}^{1/3}$$

Условие физической реализации корней связано с необходимостью затухания движения с глубиной для нижней жидкости и с высотой для верхней. Математически это условие можно выразить следующим образом:

$$\operatorname{Re}(k_{za}) > 0, \quad \operatorname{Re}(k_{zw}) > 0 \quad (19)$$

Анализ корней уравнения (18) показывает, что физическому условию реализации (19) удовлетворяет только корень  $k_{*x1}$ .

Частота волнового движения определяет энергию и, следовательно, является положительно определенной величиной. В предложенном представлении частота является параметром, а дисперсионные соотношения описывают связь между компонентами волнового вектора.

На рис. 1 представлены зависимости длины поверхностной волны от частоты волнового движения на границе раздела жидкостей воздух-вода ( $\sigma = 72$  дин/см,  $\rho_{00w} = 1$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_{00a} = 0.001$  г/см<sup>3</sup>) при разных уровнях стратификации нижней жидкости: литерой (1) обозначена зависимость при сильно стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 1$  с<sup>-1</sup>, литерой (2) – зависимость при слабо стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 0.01$  с<sup>-1</sup>, и литерой (3) – зависимость при очень слабой стратификации нижней среды  $N_w = 0.001$  с<sup>-1</sup>. Стратификация верхней жидкости при этом полагалась неизменной и частота плавучести верхней среды принималась равной  $N_a = 0.012$  с<sup>-1</sup>.

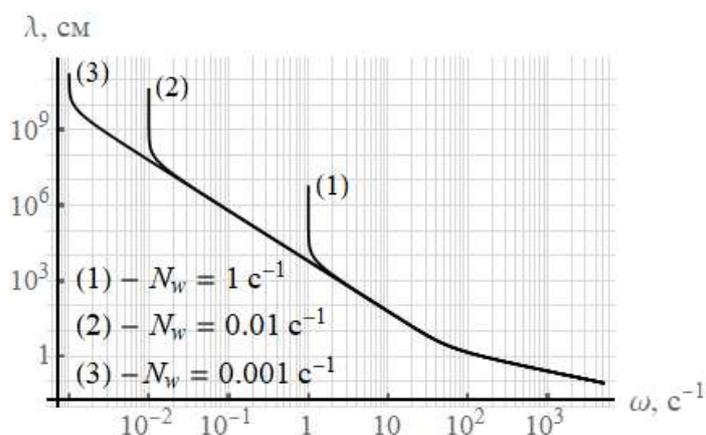


Рис. 1. Зависимость длины поверхностной волны от частоты волнового движения для системы жидкостей с параметрами воды и воздуха

Стратификация оказывает заметное влияние в области гравитационных волн, при этом верхняя жидкость, у которой плотность много меньше плотности нижней, практически не оказывает влияния на зависимость длины поверхностного волнового движения от частоты. При рассмотрении жидкостей, значения плотностей которых близки, ситуация меняется значительно. Проанализируем выражение (18). Если  $\rho_{00a} \ll \rho_{00w}$ , то отношение  $\delta\rho \ll 1$  играет роль малого параметра и корни дисперсионного уравнения с высокой точностью совпадают с решениями для случая одной стратифицированной жидкости [24]. Если же плотности сред близки, то слагаемые в (18) в  $\alpha$  при  $\delta\rho$  не малы и вносят существенный вклад. Особенности решения могут возникнуть в том случае, если будут близки значения частот плавучести верхней и нижней среды. Для иллюстрации сказанного построим на рис. 2 зависимость длины поверхностной волны от частоты волнового движения в системе жидкостей бензол-вода ( $\rho_{00a} = 0.88$  г/см<sup>3</sup>,  $\sigma = 35$  дин/см) при разных уровнях стратификации нижней жидкости: литерой (1) обозначена зависимость при сильно стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 1$  с<sup>-1</sup>, литерой (2) – зависимость при слабо стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 0.01$  с<sup>-1</sup>, и литерой (3) – зависимость при очень слабой стратификации нижней среды  $N_w = 0.001$  с<sup>-1</sup>. Стратификацию верхней жидкости при этом будем полагать неизменной, а частоту плавучести верхней среды такой же, как и в системе вода-воздух  $N_a = 0.012$  с<sup>-1</sup>.

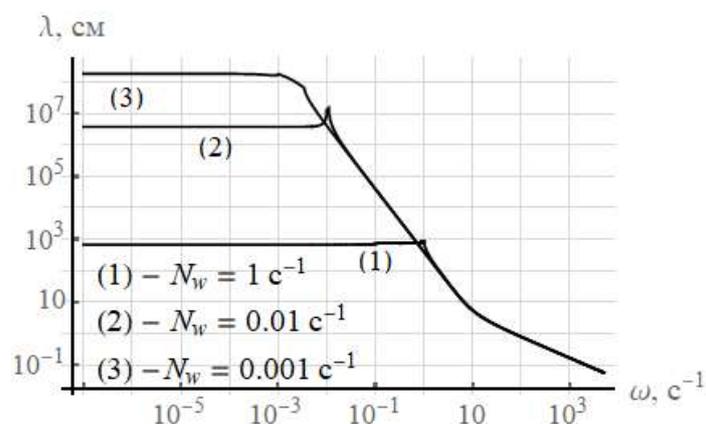


Рис. 2. Зависимость длины поверхностной волны от частоты волнового движения для системы жидкостей с параметрами воды и бензола

Из рис. 2 видно, что учет верхней среды приводит к тому, что в спектре поверхностных волн отсутствуют запрещенные частоты, однако, не все длины волн могут возникнуть в такой модели.

За скорость переноса энергии волновым движением (скорость движения амплитудного фронта волны) отвечает групповая скорость  $c_{gr}$ , фазовый фронт перемещается с фазовой скоростью волны  $c_{ph}$ . На рис. 3 и рис. 4 представлены зависимости фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скорости от длины поверхностной волны и от частоты волнового движения, соответственно, для системы жидкостей с параметрами воды и воздуха. Литерой (1) и (4) обозначены зависимости при сильно стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 1$  с<sup>-1</sup>, литерой (2) и (5) – зависимости при слабо стратифицированной нижней жидкости  $N_w = 0.01$  с<sup>-1</sup>, и литерой (3) и (6) – зависимость при очень слабой стратификации нижней среды  $N_w = 0.001$  с<sup>-1</sup>.

Видно, что и групповая, и фазовая скорости немонотонно зависят от частоты (длины волны) волнового движения и достигают минимума при некотором значении частоты (длины волны). На границе вода-воздух своего минимального значения  $c_{gr\min} = 18$  см/с групповая скорость достигает при частоте  $\omega_{gr\min} = 40.5$  с<sup>-1</sup> и длине волны  $\lambda_{gr\min} = 0.7$  см. При этом в области капиллярных волн групповая скорость превышает фазовую, а в области гравитационных волн – наоборот. Примечательно, что фазовая и групповая скорости сравниваются при

минимальном значении фазовой скорости (и принимают значения на границе вода-воздух  $c_{gr} = c_{ph\min} = 23$  см/с). Частота волнового движения при этом  $\omega_{ph\min} = 85$  с<sup>-1</sup> и для воды  $\omega_{ph\min} = 85$  с<sup>-1</sup>, а длина волны  $\lambda_{ph\min} = 1.7$  см.

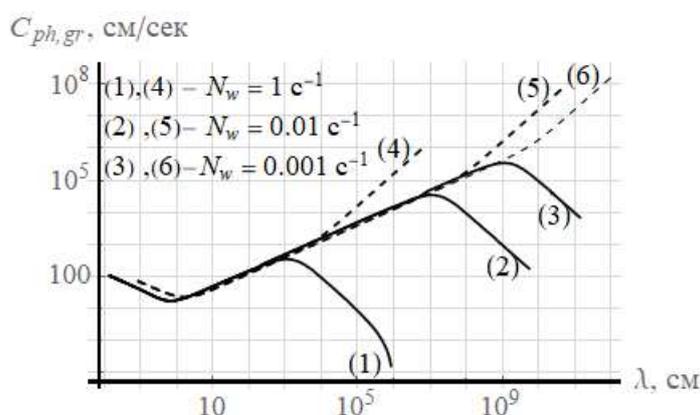


Рис. 3. Зависимости фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скоростей от длины поверхностной волны

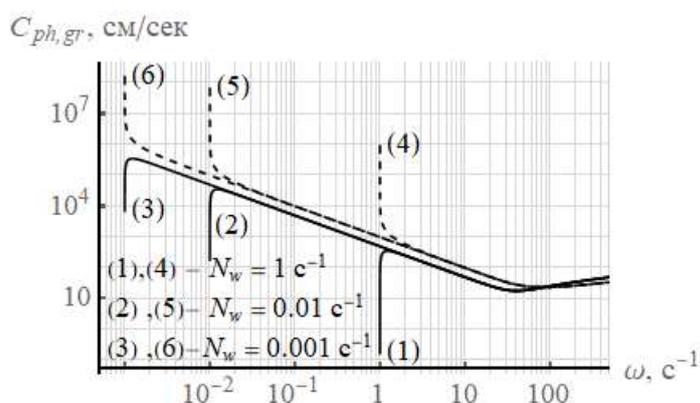


Рис. 4. Зависимости фазовой (пунктирные линии) и групповой (сплошные линии) скоростей от частоты волнового движения

Интересно проследить за потоком энергии и количества вещества. В [40] показано, что в идеальной жидкости поток энергии  $\Phi_{Ea,w}$ , связанный с распространением волны без учета внутренней энергии, выражается формулами

$$\begin{aligned}\Phi_{Ea} &= -\mathbf{u}_a \left( \rho_a \frac{\mathbf{u}_a^2}{2} + P_a \right), \\ \Phi_{Ew} &= -\mathbf{u}_w \left( \rho_w \frac{\mathbf{u}_w^2}{2} + P_w \right)\end{aligned}\quad (20)$$

Примечательно, что поток переноса количества вещества волной  $\Phi_{pa,w}$  в направлении распространения волны отличается только векторным множителем [40]

$$\begin{aligned}\Phi_{pa} &= \frac{\mathbf{k}_a}{|\mathbf{k}_a|} \left( \rho_a \frac{\mathbf{u}_a^2}{2} + P_a \right), \\ \Phi_{pw} &= \frac{\mathbf{k}_w}{|\mathbf{k}_w|} \left( \rho_w \frac{\mathbf{u}_w^2}{2} + P_w \right)\end{aligned}\quad (21)$$

Интерес представляют не значения потоков в определенные моменты времени, а их осреднённые значения за временной период  $T = 2\pi/\omega$

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi dt \quad (22)$$

#### 4. Предельные переходы

В случае рассмотрения упрощенных моделей выражения, полученные в настоящей работе, сводятся к известным формулам. Рассмотрим предельный переход к случаю двухслойной системы, образованной однородными жидкостями с постоянными плотностями  $\rho_{00w}$  и  $\rho_{00a}$ . В этом случае дисперсионные соотношения (15)–(16) принимают вид

$$k_{za} = k_{zw} = k_x, \quad (23)$$

$$\gamma k_x^3 + g \left( 1 - \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}} \right) k_x - \omega^2 \left( 1 + \frac{\rho_{00a}}{\rho_{00w}} \right) = 0 \quad (24)$$

В научной и учебной литературе дисперсионные уравнения чаще представляют в виде зависимости частоты от волнового числа. В более привычном виде выражение (24) переписывается

$$\omega^2 = \frac{k_x \left[ \sigma k_x^2 + g(\rho_{00w} - \rho_{00a}) \right]}{\rho_{00w} + \rho_{00a}} \quad (25)$$

Выражение (25) с точностью до обозначений совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в [22] при рассмотрении неустойчивости Рэлея – Тейлора. Таким образом, в предельном переходе  $N_{w,a} \rightarrow 0$  задача сводится к известным соотношениям.

Если рассмотреть задачу в пределе одной стратифицированной жидкости  $\rho_a \rightarrow 0$ , то дисперсионные соотношения (15)–(16) с точностью до обозначений совпадают с полученными в [32]

$$k_{zw} = \pm \frac{k_x}{\omega} \sqrt{\omega^2 - N_w^2 \exp\left(-\frac{z}{\Lambda_w}\right)}, \quad (26)$$

$$k_x^3 + \frac{g}{\gamma} k_x - \frac{\omega}{\gamma} \sqrt{\omega^2 - N_w^2} = 0 \quad (27)$$

И, наконец, максимально возможное упрощение задачи и сведение ее к распространению поверхностных волн вдоль свободной поверхности идеальной однородной жидкости также приводит к известным соотношениям

$$k_{zw} = k_x, \quad (28)$$

$$k_x^3 + \frac{g}{\gamma} k_x - \frac{\omega^2}{\gamma} = 0 \quad (29)$$

В научной и учебной литературе дисперсионное соотношение обычно представляется в виде зависимости частоты волнового движения от волнового числа. При этом для вязкой жидкости частота принимается комплексной, а в качестве критерия отбраковки части решений используется знак мнимой части [40, § 25]. В последнее время частота, как мера энергии и основной параметр волн, принимается действительной, и положительно определенной, а волновое число – комплексным, учитывающим затухание волны с удалением от источника.

В таком описании дисперсионные соотношения задают связь между компонентами волнового вектора для выбранной частоты волны. При анализе уравнений методами теории сингулярных возмущений учитываются и волновые компоненты, которым соответствуют регулярные решения, и лигаменты, характеризуемые сингулярно возмущенными решениями [33]. Подход, использованный в данных расчетах, в более общей постановке позволяет находить полные решения систем уравнений механики жидкостей, описывающие и динамику, которая характеризуют волны, и тонкую структуру течений, высокоградиентные прослойки и волокна в которых описывают лигаменты [41], Положение прослоек в пространстве определяется видом волны и граничными условиями задачи.

## 5. Заключение

В системе двух идеальных несмешивающихся равномерно стратифицированных жидкостей построены дисперсионные соотношения, описывающие распространение поверхностных волн вдоль границы раздела сред. Для жидкостей с большой разницей плотности (например, система воздух-вода) влияние верхней среды на дисперсионные соотношения оказывается незначительным по сравнению со случаем одной жидкости. Однако, это влияние становится заметным при рассмотрении жидкостей, плотности которых не сильно отличаются друг от друга.

Рассчитаны дисперсионные соотношения, фазовые и групповые скорости поверхностных волн в стратифицированных средах в физически наблюдаемых переменных. Полученные выражения можно использовать для определения дисперсионных характеристик реальных жидкостей в диапазоне частот гравитационных волн (где влияние вязкости незначительно) для описания волновой части решения. Для построения полных решений необходимо учитывать вязкость жидкости.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 «Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью», <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

## Литература

1. Gemmrich J., Monahan A. Surface and interfacial waves in a strongly stratified upper ocean // *Journal of Physical Oceanography*. – 2021. – Vol. 51. – № 2. – Pp. 269–278. DOI: <https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0073.1>
2. Чашечкин Ю. Д., Прохоров В. Е. Визуализация картины течения импакта свободно падающей капли при генерации звуковых пакетов // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т.23, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-5/articles/1011/>. DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.5.1011>
3. Туник Ю. В. Метод Годунова – Колгана для расчета течений вязкого газа // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2022. Т. 23, вып. 5. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-5/articles/1010/>. DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.5.1010>
4. Ильичева М. Н. О некоторых аспектах динамики дисперсной воды в лесном массиве при наличии пожара // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2021. Т. 22, вып. 4. <http://chemphys.edu.ru/issues/2021-22-4/articles/934/>. DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.22.4.934>
5. Zeng C., Zhao C., Zeighami F. Seismic surface wave attenuation by resonant metasurfaces on stratified soil // *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. – 2022. – Vol. 51. – № 5. – Pp. 1201–1223. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.3611>
6. Лэмб Г. *Гидродинамика*. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 928 с

7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе И. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I М.: Государственное Издательство Физико-математической литературы, – 1963. – 585 с.
8. Thomson W. Hydrokinetic solutions and observations // *Phil. Mag.* – 1871. – V. 42. – Pp. 362–377. DOI: <https://doi.org/10.1080/14786447108640585>
9. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves//*Trans. Cambridge Phil. Soc.* 1847. V.8. Pp. 441–455.
10. Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л. Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // *Успехи физических наук.* – 1989. – Т. 159. – № 9. – С. 83–123. DOI: [10.3367/UFNr.0159.198909c.0083](https://doi.org/10.3367/UFNr.0159.198909c.0083)
11. Фридман А. М. Предсказание и открытие сильнейших гидродинамических неустойчивостей, вызванных скачком скорости: теория и эксперименты// *Успехи физических наук.* – 2008. – Т. 178. – № 3. – С. 225–242. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803a.0225>
12. Зубарев Н. М., Кузнецов Е. А. Формирование особенностей на поверхности раздела жидкостей при развитии неустойчивости Кельвина – Гельмгольца // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* – 2014. – Т. 146. – № 1. – С. 194–204. DOI: [10.7868/S0044451014070207](https://doi.org/10.7868/S0044451014070207)
13. Siddiqui M. H. K., Loewen M. R. Characteristics of the wind drift layer and microscale breaking waves // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2007. – Vol. 573. – Pp. 417–456. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006003892>
14. Абрашкин А., Якубович Е. Вихревая динамика в лагранжевом описании. – М.: ФИЗМАТЛИТ, – 2006. – 176 с.
15. Белоножко Д. Ф., Козин А. В. Об особенностях строения дрейфового течения, инициируемого периодическими волнами, распространяющимися по поверхности вязкой жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа.* – 2011. – № 2. – С. 112–120.
16. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows Part 3. Kelvin-Helmholtz instability // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1959. – Vol. 6. – № 4. – Pp. 583–598. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112059000842>
17. Weissman M. A. Nonlinear wave packets in the Kelvin-Helmholtz instability // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* – 1979. – V. 290. – № 1377. – Pp. 639–681. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1979.0019>
18. Белоножко Д. Ф., Очиров А. А. О массопереносе, порожденном волновым возмущением поверхности тангенциального разрыва поля скоростей // *Журнал технической физики.* – 2018. – Т. 88. – № 5. – С. 675–683. DOI: [10.21883/JTF.2018.05.45894.2315](https://doi.org/10.21883/JTF.2018.05.45894.2315)
19. Yousefi K., Veron F., Buckley M. P. Momentum flux measurements in the airflow over wind-generated surface waves // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2020. – Vol. 895. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.276>
20. Wang L. H. et al. Surface wave effects on energy transfer in overlying turbulent flow // *Journal of Fluid Mechanics.* – 2020. – Vol. 893. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.246>
21. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Яковлева Л.С. О поверхностных и внутренних гравитационных волнах в трехслойной несмешивающейся жидкости// *Журнал технической физики.* – 2015. – Т. 85. – № 12. – С. 40–44.
22. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability, International Series of Monographs on Physics. – Oxford: Clarendon Press, – 1961 – 685 p.
23. Abarbanel H. D. I. et al. Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* – 1986. – Vol. 318. – № 1543. – Pp. 349–409. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1986.0078>
24. Jones W. L. Reflexion and stability of waves in stably stratified fluids with shear flow: A numerical study // *Journal of Fluid Mechanics.* – 1968. – Vol. 34. – № 3. – Pp. 609–624. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112068002119>
25. Batchelor G. K., Nitsche J. M. Instability of stationary unbounded stratified fluid // *Journal of fluid mechanics.* – 1991. – Vol. 227. – Pp. 357–391. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112091000150>

26. Batchelor G. K., Nitsche J. M. Instability of stratified fluid in a vertical cylinder // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1993. – Vol. 252. – Pp. 419–448. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112093003829>
27. Praud O., Fincham A. M., Sommeria J. Decaying grid turbulence in a strongly stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. – 2005. – Vol. 522. – Pp. 1–33. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211200400120X>
28. Jaiswal S. P., Gavara M. Study of Rayleigh-Taylor instability in viscosity-stratified fluid layers // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2022. – Vol. 134. – P. 105773. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105773>
29. Štrubelj L., Tiselj I. Two-fluid model with interface sharpening // *International journal for numerical methods in engineering*. – 2011. – Vol. 85. – № 5. – Pp. 575–590. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2978>
30. Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л. О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // *Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа*. – 2009. – № 2. – С. 125–145.
31. Xue Y. et al. Investigation on propagation mechanism of leakage acoustic waves in gas-liquid stratified flow // *Ocean Engineering*. – 2022. – Vol. 266. – P. 112962. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112962>
32. Очиров А. А., Чашечкин Ю. Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // *Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана*. — 2022. — Т. 58, № 5. — С. 524–533. DOI: [10.31857/S000235152205008X](https://doi.org/10.31857/S000235152205008X)
33. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. – 2022. – Vol. 11, no. 8. – P. 402. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
34. Chashechkin Y. D. Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows // *Axioms*. – 2021. – Vol. 10. – № 4. – P. 286. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
35. Joseph D. D. Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves // *Archive for rational mechanics and analysis*. – 1973. – Vol. 51. – № 4. – Pp. 295–303. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250536>
36. Очиров А. А. О массопереносе, вызванном распространением волнового пакета по границе раздела жидких сред // *Ученые записки физического факультета Московского университета*. – 2018. – № 6. – С. 1860301.
37. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. 2-е изд. М.: ГИФМЛ, 1959.
38. McGoldrick L. F. On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant interaction // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1972. – Vol. 52. – № 4. – Pp. 725–751. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002733>
39. Nayfeh, A., & Hassan, S. The method of multiple scales and non-linear dispersive waves // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1971. – Vol. 48. – № 3. – Pp. 463–475. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112071001708>
40. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука. – 1986.
41. Chashechkin Yu. D. Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves // *Math. Model. Nat. Phenom*. 2018. Vol. 13. № 2. Pp. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020>

## References

1. Gemmrich J., Monahan A., Surface and interfacial waves in a strongly stratified upper ocean, *Journal of Physical Oceanography*, 2021, vol. 51, no. 2, pp. 269–278. DOI: <https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0073.1>

2. Chashechkin Yu. D., Prokhorov V. E., Visualization of the flow pattern of the impact of a freely falling drop during the generation of sound packets, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, no. 5. [in Russian]. DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.5.1011>. Available at <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-5/articles/1011/>
3. Tunik Y. V., Godunov – Kolgan method for calculating viscous gas flows, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2022, vol. 23, no. 5. [in Russian] DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.23.5.1010>. Available at <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-5/articles/1010/>
4. Ilicheva M., On some aspects of the dynamics of dispersed water in the forest in the presence of a fire, *Physical-Chemical Kinetics in Gas Dynamics*, 2021, vol. 22, no. 4. [in Russian]. DOI: <http://doi.org/10.33257/PhChGD.22.4.934>. Available at <http://chemphys.edu.ru/issues/2021-22-4/articles/934/>
5. Zeng C., Zhao C., Zeighami F., Seismic surface wave attenuation by resonant metasurfaces on stratified soil, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2022, vol. 51, no. 5 pp. 1201–1223. DOI: <https://doi.org/10.1002/eqe.3611>
6. Lamb H., *Hydrodynamics*, Cambridge: Univ. Press, 1932.
7. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V., *Theoretical hydromechanics. Vol. I*, Interscience, 1964.
8. Thomson W., Hydrokinetic solutions and observations, *Phil. Mag*, 1871, vol. 42. pp. 362–377.
9. Stokes G. G., On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 1847, vol. 8, pp. 441–455.
10. Stepanyants Y. A., Fabrikant A. L., Propagation of waves in hydrodynamic shear flows, *Soviet Physics Uspekhi*, 1989, vol. 32, no. 9, pp. 783–805. DOI: 10.1070/PU1989v032n09ABEH002757
11. Fridman A. M., Prediction and discovery of extremely strong hydrodynamic instabilities due to a velocity jump: theory and experiments, *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, no. 3. DOI: 10.1070/PU2008v051n03ABEH006470
12. Zubarev N. M., Kuznetsov E. A., Singularity formation on a fluid interface during the Kelvin – Helmholtz instability development, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2014, vol. 119, no. 1, pp. 169–178. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063776114060077>
13. Siddiqui M. H. K., Loewen M. R., Characteristics of the wind drift layer and microscale breaking waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, vol. 573, pp. 417–456. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112006003892>
14. Abrashkin A., Yakubovich E., *Vortex dynamics in the Lagrangian description*, M.: FIZMATLIT, 2006. [in Russian]
15. Belonozhko D. F., Kozin A. V., Structure of the drift flow initiated by periodic waves traveling over a viscous fluid surface, *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 270–277. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462811020098>
16. Miles J. W., On the generation of surface waves by shear flows Part 3. Kelvin-Helmholtz instability, *Journal of Fluid Mechanics*, 1959, vol. 6, no. 4, pp. 583–598. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112059000842>
17. Weissman M. A., Nonlinear wave packets in the Kelvin-Helmholtz instability, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1979, vol. 290, no. 1377, pp. 639–681. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1979.0019>
18. Belonozhko D. F., Ochirov A. A., Mass Transfer Induced by a Wave Perturbation on the Surface of the Velocity Field Tangential Discontinuity, *Technical Physics*, 2018, vol. 63, no. 5, pp. 653–661. DOI: <https://doi.org/10.1134/S106378421805002X>
19. Yousefi K., Veron F., Buckley M. P., Momentum flux measurements in the airflow over wind-generated surface waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 895. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.276>
20. Wang L. H., et al., Surface wave effects on energy transfer in overlying turbulent flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, vol. 893. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.246>

21. Shiryaeva S. O., Grigor'ev A. I., Yakovleva L. S., On the surface and internal gravitational waves in a three-layer immiscible liquid, *Technical Physics*, 2015, vol. 60, no. 12 pp. 1772–1777. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063784215120208>
22. Chandrasekhar S., *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon Press, 1961.
23. Abarbanel H. D. I., et al., Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1986, vol. 318, no. 1543, pp. 349–409. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1986.0078>
24. Jones W. L., Reflexion and stability of waves in stably stratified fluids with shear flow: A numerical study, *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, vol. 34, no. 3, pp. 609–624. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112068002119>
25. Batchelor G. K., Nitsche J. M., Instability of stationary unbounded stratified fluid, *Journal of fluid mechanics*, 1991, vol. 227, pp. 357–391. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112091000150>
26. Batchelor G. K., Nitsche J. M., Instability of stratified fluid in a vertical cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, vol. 252, pp. 419–448. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112093003829>
27. Praud O., Fincham A. M., Sommeria J., Decaying grid turbulence in a strongly stratified fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 2005, vol. 522, pp. 1–33. DOI: <https://doi.org/10.1017/S002211200400120X>
28. Jaiswal S. P., Gavara M., Study of Rayleigh-Taylor instability in viscosity-stratified fluid layers, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2022, vol. 134, p. 105773. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105773>
29. Štrubelj L., Tiselj I., Two-fluid model with interface sharpening, *International journal for numerical methods in engineering*, 2011, vol. 85, no. 5, pp. 575–590. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.2978>
30. Makarenko N. I., Mal'tseva Z. L. Phase velocity spectrum of internal waves in a weakly-stratified two-layer fluid, *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 278–294. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462809020124>
31. Xue Y., et al., Investigation on propagation mechanism of leakage acoustic waves in gas-liquid stratified flow, *Ocean Engineering*, 2022, vol. 266, p. 112962. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112962>
32. Ochirov A. A., Chashechkin Y. D., Two-Dimensional Periodic Waves in an Inviscid Continuously Stratified Fluid, *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 450–458. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001433822050085>
33. Chashechkin Y. D., Ochirov A. A., Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field, *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 8, p. 402. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms11080402>
34. Chashechkin Y. D., Foundations of engineering mathematics applied for fluid flows, *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 4, p. 286. DOI: <https://doi.org/10.3390/axioms10040286>
35. Joseph D. D. Domain perturbations: the higher order theory of infinitesimal water waves, *Archive for rational mechanics and analysis*, 1973, vol. 51, no. 4, pp. 295–303. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00250536>
36. Ochirov A. A., On the mass transport in the propagation of a wavepacket along the interface of liquid media, *Memoirs of the Faculty of Physics*, 2018, no. 6, p. 1860301. [in Russian] Available at <http://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2018/6/1860301/>
37. Levich V. G., *Physicochemical hydrodynamics*, 2nd Edition, M: GIFML, 1962.
38. McGoldrick L. F. On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant interaction, *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 52, no. 4, pp. 725–751. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002733>
39. Nayfeh A., & Hassan S., The method of multiple scales and non-linear dispersive waves, *Journal of Fluid Mechanics*, 1971, vol. 48, no. 3, pp. 463–475. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112071001708>

40. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Fluid Mechanics: Volume 6*, Elsevier, 1987, 552 p.
41. Chashechkin Yu. D., Singularly perturbed components of flows – linear precursors of shock waves, *Math. Model. Nat. Phenom*, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 1–29.  
DOI: <https://doi.org/10.1051/mmnp/2018020>

Статья поступила в редакцию 19 декабря 2022 г.