

# Application of Discrete Kinetic Model for Euler – Poisson System to Plasma Aerodynamics Problems

A.S. Dobrovolskaya<sup>1</sup>, N.I. Klyuchnikov<sup>1</sup>, V.A. Biturin

<sup>1</sup> *Join Institute for High Temperatures,*

*Moscow, 125412, Russia*

*dobrovolskaya.anastasia@gmail.com*

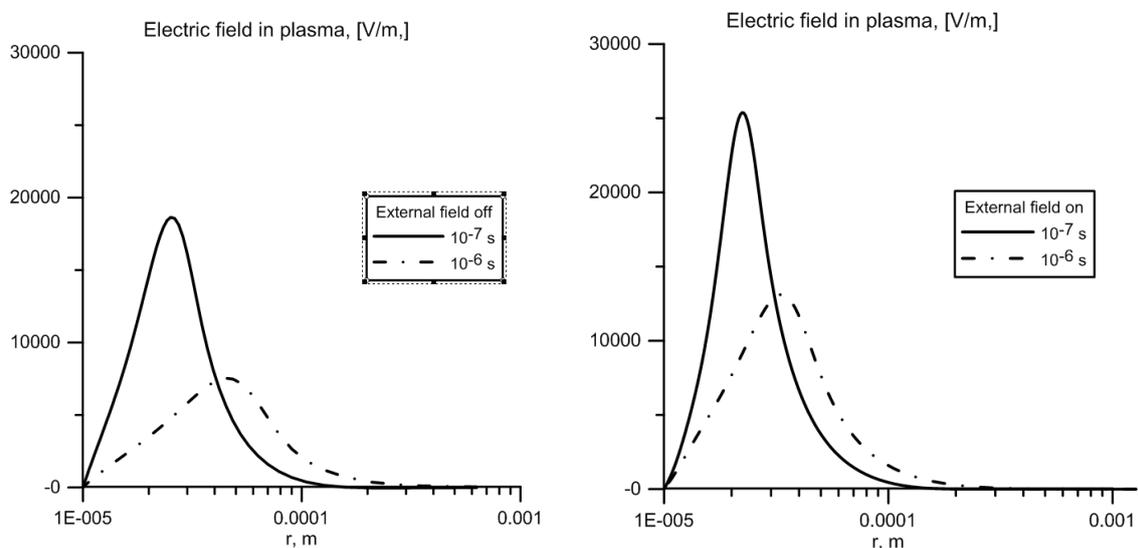
*niklyuch@mail.ru*

*valentin.biturin@gmail.com*

## Abstract

In this work authors examine the decay of plasma layer in neutral gas in spherical symmetric case using lattice Boltzmann method for Euler – Poisson equations. Effects of external electrical field on plasma decay are shown.

Keywords: numerical simulation, lattice Boltzmann method, Euler – Poisson system.



Evolution of the electric field in plasma layer during decay without external electric field (left picture) and with one (right picture).

УДК 533.9

# Применение дискретной кинетической модели для системы уравнений Эйлера – Пуассона к задачам плазменной аэродинамики

А.С. Добровольская<sup>1</sup>, Н.И. Ключников<sup>1</sup>, В.А. Битюрин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Объединенный Институт Высоких Температур РАН,  
125412 Россия, г. Москва, ул. Ижорская, д.13, стр.2  
dobrovolskaya.anastasia@gmail.com  
niklyuch@mail.ru  
valentin.biturin@gmail.com,*

## Аннотация

В работе рассмотрен распад плазменного слоя в нейтральном газе в сферически-симметричном случае на основе решения уравнений Эйлера – Пуассона с помощью метода решеточных уравнений Больцмана. Показано влияние внешнего поля на распад плазменного слоя.

Ключевые слова: численные методы, решеточный метод Больцмана, уравнения Эйлера – Пуассона.

## 1. Введение

Проблема моделирования переноса зарядов в самосогласованном поле часто возникает в различных областях физики плазмы. Во многих случаях поведение слабоионизованной плазмы в плотном нейтральном газе можно описать системой уравнений Эйлера – Пуассона. В изотермическом случае она представляет собой по два уравнения (непрерывности и Эйлера) для нейтрального газа, ионов и электронов, и уравнение Пуассона для электрического поля. Система Эйлера – Пуассона применима, когда движение плазмы носит гидродинамический характер (длина свободного пробега много меньше характерных размеров задачи) и электрическое поле меняется достаточно медленно, что можно не решать систему уравнений Максвелла. Она описывает различные явления в плазме, физике полупроводников, астрофизике и т.д.

Нахождение решения системы Эйлера – Пуассона далеко не тривиально [1, 2], и даже численное решение представляет значительные трудности [3]. Один из возможных способов преодоления этих трудностей – использование методов дискретной кинетической теории.

За последние 30 лет семейство численных методов, известное в литературе как методы решеточных уравнений Больцмана (LVM – в западной печати), зарекомендовало себя как эффективный способ численного моделирования в газодинамике. Эти методы позволяют получить решения уравнений газодинамики (Эйлера, Навье – Стокса, Барнетта), не решая их непосредственно. В этом случае, газодинамические уравнения заменяются системой более простых гиперболических уравнений, полученных из уравнения Больцмана. Переход от непрерывного пространства скоростей к дискретному происходит при вычислении моментов функции распределения [6-8], так как только значения функции распределения при дискретных скоростях необходимы для вычисления моментов. Как только мы переходим в дискретное пространство скоростей, уравнение Больцмана заменяется системой дифференциальных уравнений, решать которую значительно проще, чем уравнение Больцмана, и к

которой можно применять какие-либо стандартные методики решения гиперболических систем уравнений (методы конечных разностей, конечных элементов и т.д.). Таким образом, дискретизация пространства скоростей и координатного пространства происходит независимо. Именно эту версию LBM мы рассматриваем в нашей статье и называем «дискретная кинетическая теория» (в литературе также можно встретить названия «метод решеточных уравнений с конечными разностями», FD-LBM). В данной работе мы приводим решеточные уравнения Больцмана, предназначенные для нахождения решения системы Эйлера – Пуассона в сферически-симметричной случае, основанные на дискретной кинетической теории. Полученная модель представляет собой разумный компромисс между физической точностью и затратами компьютерного времени. Также обсуждается применение дискретной кинетической теории к областям со значительной неоднородностью в плотности плазмы.

В качестве конкретной физической системы рассматривается слабоионизованная плазма в плотном нейтральном газе вокруг сферического тела. Столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь по сравнению со столкновениями с нейтралами, характерный размер задачи много больше длины свободного пробега и можно пользоваться гидродинамическим описанием плазмы. Нейтральный газ считается невозмущенным и покоящимся, химические реакции не учитываются для простоты.

## 2. Дискретная кинетическая модель

Слабоионизованная плазма вокруг заряженного сферически симметричного тела описывается следующей системой уравнений Эйлера – Пуассона, если длина пробега для заряженных частиц много меньше характерного размера задачи и столкновениями между заряженными частицами можно пренебречь

$$\frac{\partial}{\partial t} N_a + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_a V_a) = 0, \quad (1)$$

$$m_a N_a \left( \frac{\partial V_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial V_a}{\partial r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} p_a - q_a N_a \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\mu_{an} N_a V_a}{\tau_a}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_a q_a N_a. \quad (3)$$

Здесь  $r$  – расстояние от центра;  $V_a$  – макроскопическая скорость;  $N_a$  – концентрация;  $p_a$  – парциальное давление частиц типа  $a$  (индексы  $a=i$  и  $a=e$  соответствуют ионам и электронам);  $\Phi$  – электрический потенциал;  $q_a$  и  $m_a$  – заряд и масса частиц типа  $a$ . Величины  $V_a$ ,  $N_a$ , и  $\Phi$  – функции от координаты  $r$  времени  $t$ .

Последний член в уравнении (2) представляет собой силу трения между заряженными частицами и нейтралами ( $\nu_{an}$  – соответствующая эффективная частота столкновений,  $\mu_{an} = m_a m_n / (m_a + m_n)$  – приведенная масса заряженных частиц и нейтралов  $m_n$ ). Межчастичный потенциал взаимодействия для столкновений между заряженными частицами и нейтралами предполагается обратно пропорциональным четвертой степени расстояния. Для этой модели частоты столкновений  $\nu_{an}$  не зависят от скорости заряженных частиц [9].

При определенных условиях систему уравнений (1)–(3) можно упростить, например, в уравнении (2) положить инерционный член равным нулю. Это так называемое диффузионно-дрейфовое приближение, в рамках которого выполнено большинство работ по решению системы (1)–(3) (например, в теории зонда и пылевой плазмы [10–19]). Предлагаемый нами подход позволяет получать решение данной системы уравнений с учетом конвективного члена.

В соответствии с принятым подходом вместо уравнений гидродинамики решается система модельных кинетических уравнений в форме Бхатнагара – Гросса – Крука с дискретными скоростями  $c_j$  и уравнение Пуассона. В безразмерной форме эта система имеет вид

$$Sh_a \frac{\partial f_{a,j}}{\partial t} + \frac{c_j}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f_{a,j}) = -\frac{f_{a,j} - f_{a,j}^0}{\tau_a} + 2X_a (c_j - u_a) f_{a,j}^{eq}, \quad (4)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\sum_{a,j} Z_a f_{a,j}, \quad (5)$$

где  $X_a = 1/r - (Z_a/2) \partial \psi / \partial r$ . Здесь введены безразмерные величины

$$r \rightarrow \frac{r}{R}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad n_a = \frac{N_a}{N_0}, \quad u_a = \frac{V_a}{v_{Ta}}, \quad \psi = \frac{e\Phi}{k_B T}, \quad c = \frac{v_r}{v_{Ta}}, \quad f_a = \frac{v_{Ta} f_a^{DASM}}{N_0}, \quad Sh_a = \frac{R}{v_{Ta} t_0}, \quad (6)$$

где  $R$  и  $t_0$  – характерная длина и время, соответственно,  $v_{Ta} = \sqrt{2k_B T / m_a}$  (тепловая скорость частиц типа  $a$ ) выбрана в качестве характерного масштаба скорости, а  $Sh_a$  – число Струхалля. Функции распределения  $f_a^0$  и  $f_a^{eq}$  соответственно равны

$$f_{a,j}^0 = \frac{n_a}{\sqrt{\pi}} w_j \left[ 1 - \left( \mu_a^2 + \frac{\mu_n^2}{3} \right) u_a^2 + 2\mu_a c_j u_a + \left( \mu_a^2 + \frac{\mu_n^2}{3} \right) c_j^2 u_a^2 \right], \quad (7)$$

$$f_{a,j}^{eq}(r, t) = \frac{n_a}{\sqrt{\pi}} w_j \left( 1 - u_a^2 + 2c_j u_a + 2c_j^2 u_a^2 \right), \quad (8)$$

где  $\mu_n = \frac{m_n}{(m_a + m_n)}$  и  $\mu_a = \frac{m_a}{(m_a + m_n)}$ .

Искомые гидродинамические величины (решения уравнения Эйлера) определяются формулами

$$\sum_{j=1}^3 f_{a,j} = n_a, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^3 c_j f_{a,j} = n_a u_a \quad (10)$$

При этом выбор дискретных скоростей основан на квадратурной формуле Гаусса, согласно которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} c^m f_a(c, r, t) dc = \sum_{j=1}^n c_j^m f_{a,j}(c_j, r, t), \quad (11)$$

где узлы  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (дискретные скорости) – это нули полиномов Эрмита  $H_n(c)$ . Величины  $w_j$ , фигурирующие в (7) и (8), даются формулами

$$w_j = \frac{\sqrt{\pi} 2^{n+1} n!}{\left( \frac{d}{dc} H_n(c) \right)_{c=c_j}} \quad (12)$$

Для  $n$  узлов формула (11) точна для всех полиномов степени  $\leq 2n-1$ . Такая схема интегрирования для уравнения Эйлера должна быть точной до моментов 4го порядка. Значит,  $n=3$  – минимальное число узлов для данной проблемы [20]. Три абсцессы ( $c_j$ ) и их веса ( $w_j$ ) для квадратуры (11) равны

$$\begin{aligned} c_1 &= -\sqrt{3/2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \sqrt{3/2}, \\ w_1 &= \sqrt{\pi}/6, \quad w_2 = 2\sqrt{\pi}/3, \quad w_3 = \sqrt{\pi}/6. \end{aligned} \quad (13)$$

Описанная схема согласуется с формулировками статей [6] и [8], где читатель может найти больше подробностей. Система уравнений (4)–(5) эквивалентна системе уравнений Эйлера-Пуассона (1)–(3) и позволяет получать решение последней, будучи проще математически.

### 3. Численная схема расчета

Уравнение (4) содержит жесткий нелинейный член (интеграл столкновений) и требует аккуратности даже без учета объемной силы, но включение в расчет самосогласованного поля может привести к еще большей неустойчивости и появлению нефизических осцилляций в решении. Экранирование зарядов в плазме всегда сопровождается большими градиентами в концентрации заряженных частиц и величине электрического поля. Таким образом, для получения решения следует выбрать стабильный, точный и эффективный метод, подходящий для решений с большими градиентами. Для аппроксимации конвективного члена была выбрана взвешенная слабо осциллирующая схема (WENO), разработанная для решений, содержащих градиенты и устойчивая к возникновению численных осцилляций [21]. Для интегрирования по времени мы используем явно-неявную схему Рунге – Кутты третьего порядка [22], где явным образом рассматривается конвективный член (как более медленно меняющийся), а неявным – интеграл столкновений и объемная сила.

Для интегрирования ФР на шаге от  $t$  до  $\Delta t$  с помощью явно-неявной схемы производятся следующие действия:

$$f_{a,j}(x, t + \Delta t) = f_{a,j}(x, t) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{m=1}^{k-1} \omega_m \left( x^2 c_j \frac{\partial f_{a,j}^m}{\partial x} - 2c_j x f_{a,j}^m \right) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{m=1}^k w_m \left( \frac{f_{a,j}^{0,m} - f_{a,j}^m}{\tau_a} + F_{a,j}^m \right), \quad (14)$$

где  $f_{a,j}^m$ ,  $f_{a,j}^{0,m}$ ,  $f_{a,j}^{eq,m}$ ,  $F_{a,j}^m$  и  $k$  это ФР референсная функция, равновесная функция и силовой член на  $m$ -й итерации, и количество итераций. Функция распределения на  $m$ -й итерации вычисляется как

$$f_{a,j}^m = f_{a,j}(x, t) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{n=1}^{m-1} \alpha_{m,n} \left( x^2 c_j \frac{\partial f_{a,j}^n}{\partial x} - 2c_j x f_{a,j}^n \right) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{n=1}^m a_{m,n} \left( \frac{f_{a,j}^{0,n} - f_{a,j}^n}{\tau_a} + F_{a,j}^n \right) \quad (15)$$

Коэффициенты  $\alpha_{m,n}$ ,  $a_{m,n}$ ,  $w_m$ ,  $\omega_m$  зависят от порядка явно-неявной схемы [20]. Вычисление градиента – это явная часть схемы, поэтому для него используются значения только предыдущих итераций. Но для расчета  $f_{a,j}^{0,m}$ ,  $f_{a,j}^{eq,m}$  и  $F_{a,j}^m$  нужны моменты функции распределения на  $m$ -й итерации, так как это – неявная часть. К счастью, благодаря свойству интеграла столкновений (первые моменты от него равны нулю), мы можем вычислить моменты на  $m$ -й итерации только на основе значений с предыдущих итераций

$$n_a^m = n_a(x, t) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{n=1}^{m-1} \sum_j \alpha_{m,n} \left( x^2 c_j \frac{\partial f_{a,j}^n}{\partial x} - 2c_j x f_{a,j}^n \right), \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 n_a^m u_a^m = n_a(x, t) u_a(x, t) + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{n=1}^{m-1} \alpha_{m,n} \sum_j c_j \left( x^2 c_j \frac{\partial f_{a,j}^n}{\partial x} - 2c_j x f_{a,j}^n \right) + \\
 + \frac{\Delta t}{Sh_a} \sum_{n=1}^m a_{m,n} \left( -\omega_a^m \mu_{n,a} n_a^m u_a^m + n_a^m F_a^m + n_a^m x \right)
 \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнения (16)–(17) определяют концентрацию и поток заряженных частиц на  $m$ -й итерации,  $F_a^m$  – электрическая сила на  $m$ -й итерации. Силу для  $m$ -й итерации мы получаем, решая уравнение Пуассона с концентрациями на  $m$ -й итерации. Таким образом, не только столкновительный член, но и силовой член рассматриваются полностью неявно. Это очень важно отметить, так как неаккуратный учет силового члена приводит к осцилляциям в решении.

В расчетах для данной работы использовалась схема WENO 5-го порядка точности для аппроксимации градиента и явно-неявная схема IMEX 3-го порядка точности для интегрирования по времени. Сочетание этих схем можно часто встретить в работах по методу LBM, в задачах, требующих аккуратного рассмотрения. Для удобства расчет ведется в обратных координатах,  $x = R_0/r$  на равномерной сетке, то есть, при переходе к координате  $r$  получается сетка, сгущающаяся у поверхности зонда.

В данной работе используются два типа граничных условий на поверхности  $r=R$  – полное отражение (нулевой поток) и полное поглощение (нулевой отраженный поток). В первом случае при решении используется условие

$$f_{a,3} = f_{a,1},$$

а во втором

$$f_{a,3} = 0.$$

Было проверено, что численное решение системы уравнений (4) (без уравнения Пуассона) с помощью описанных выше схем воспроизводит решение уравнения Эйлера, и ошибка не превышает ожидаемую для дискретной теории (возникающую при обрезке разложения функции распределения) при скоростях, меньше тепловой.

Одной из причин, побудивших авторов на разработку дискретной кинетической теории была уверенность, что использование диффузионно-дрейфового приближения приводит к заметной ошибке в ситуациях, когда им пользуются, несмотря на то, что конвективным членом уже не стоит пренебрегать. Чтобы оценить ошибку, мы сравним результат, получаемый в диффузионно-дрейфовом приближении с результатом, полученным с помощью нашей модели. Рассмотрим установившееся стационарное состояние для газа с концентрацией  $n_n = 5 \times 10^{24} \text{ м}^{-3}$ , и температурой  $T = 1000 \text{ К}$  со степенью ионизации  $10^{-6}$  вокруг поглощающего зонда с радиусом  $R = 10^{-5} \text{ м}$  с отрицательным потенциалом. Поглощение приводит к сильному потоку на границе, и большому градиенту скорости. Результаты для диффузионно-дрейфового приближения были получены путем решения следующей системы с помощью пакета Maple:

$$n_{i,e}(x) u_{i,e}(x) = D_{i,e} \left( -\nabla n_{i,e}(x) + \frac{z_{i,e} E(x)}{k_B T} \right), \quad (18)$$

$$\varepsilon^2 x^2 \frac{d\varphi(x)}{dx} = n_i(x) - n_e(x) \quad (19)$$

Стационарное состояние в дискретной кинетической модели получено методом установления. Так как мы уже знаем, что дискретная модель верно решает уравнение Эйлера, то разница в решениях будет обусловлена учетом конвективного члена. Чтобы исключить влияние различных граничных условий, для диффузионно-дрейфового приближения использу-

ются граничные значения концентрации, полученные с помощью дискретной кинетической теории (обычно полное поглощение в рамках диффузионно-дрейфового приближения выражается граничным условием  $n = 0$ ). Результаты сравнения приведены в таблице 1, приводятся значения концентраций и токов на границе, значения токов в диффузионно-дрейфовом приближении получены для граничной концентрации, взятой из нашего расчета.

Сравнивая ток через поверхность зонда в таблице 1 видно, что количественные различия у двух методов существенны. Таким образом, при необходимости получения более точного решения использование дискретной модели оправдано за счет включения конвективных членов.

Таблица 1

**Сравнение результатов расчета с помощью дискретной кинетической теории с результатами, полученными в диффузионно-дрейфовом приближении**

	$n_{el}$	$n_{ion}$	$n_{el}u_{el}$	$n_{ion}u_{ion}$
Диффузионно-дрейфовое приближение	0	0	$-3.4 \times 10^{-3}$	-0.08
Дискретная кинетическая модель	$7.9 \times 10^{-3}$	$4.47 \times 10^{-2}$	$-2.96 \times 10^{-3}$	-0.026

#### 4. Пример расчета эволюции плазменного слоя вокруг зонда.

Практические задачи, возникающие в плазменной аэродинамике достаточно сложны для моделирования, так как требуют подробного 3D расчета движения заряженных компонент и нейтралов, с учетом обмена импульсом и энергией между ними, а это весьма затратная по вычислительным ресурсам задача. Тем не менее, можно упростить 3D-расчет если моделировать только газодинамику нейтрального газа, а все влияние плазмы учитывать в виде внешней силы и источника энергии. Влияние плазмы на движение нейтрального газа выражается через а) нагрев и б) передачу импульса. Нагрев происходит всегда при наличии в плазме тока, механическая передача импульса же – только в зонах с нарушением квазинейтральности. Электрическое поле  $E$  при этом складывается из внешнего и из самосогласованного поля плазмы. Таким образом, силу, действующую на нейтральный газ в разряде, можно учесть, если знать, как меняется эволюция нескомпенсированного заряда в плазме в присутствии внешнего поля. В качестве простой модели можно рассмотреть распад плазменного слоя в собственном и во внешнем полях. Подобный слой может возникнуть при реализации плазменно-динамических устройств. В данной работе рассмотрен распад сферического слоя. Несмотря на то, что в реальных системах нет идеальной симметрии, качественные закономерности влияния внешнего поля на распад слоя можно понять из такой постановки.

Рассматривается следующая постановка задачи. Вокруг центрального тела с радиусом  $R$  в начальный момент задан слой плазмы радиусом  $R_p$ . Начальная концентрация электронов и ионов  $n_0$ , температура –  $T$ , концентрация нейтрального газа везде постоянна и равна  $n_n$ . Столкновениями между заряженными частицами пренебрегаем, характерные размеры задачи больше длины свободного пробега, то есть, гидродинамическое описание плазмы применимо. Внешние поля изменяются достаточно медленно, так что можно пользоваться уравнением Пуассона. Ионизацией и рекомбинацией пренебрегаем, так как они начинают давать заметный вклад на достаточно больших временах.

Сначала рассмотрим распад плазменного слоя без внешнего поля. Параметры расчета:  $n_0 = 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ,  $n_n = 5 \times 10^{24} \text{ м}^{-3}$ ,  $R = 10^{-5} \text{ м}$ ,  $R_p = 2 \times 10^{-5} \text{ м}$ ,  $T = 1000 \text{ К}$ . В безразмерных координатах (6) выбранное для решения уравнения (4) значение шага в пространстве:  $dx \cong 0.007$ , CFL = 0.7.

На рис. 1 представлена эволюция пространственного заряда. Видно, что за время меньше одной микросекунды слой распадается, и плотность пространственного заряда, а значит и объемной силы, действующей на газ, падает на порядки.

Поле при этом определяется только собственным полем плазмы, возникшим из-за разделения зарядов, оно представлено на рис. 1. Максимум поля соответствует поверхности с нулевым объемным зарядом (рис. 2).

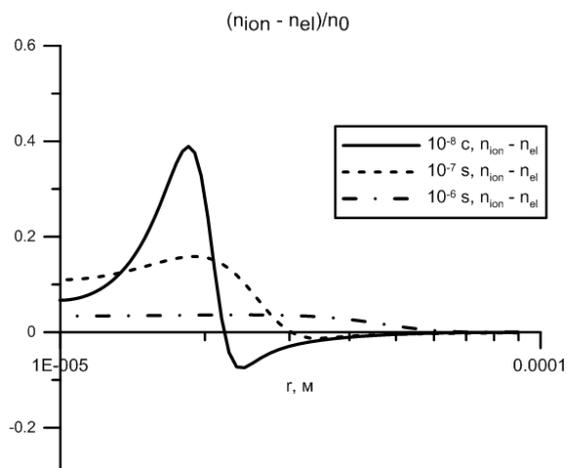


Рис. 1. Эволюция объемного заряда в собственном поле

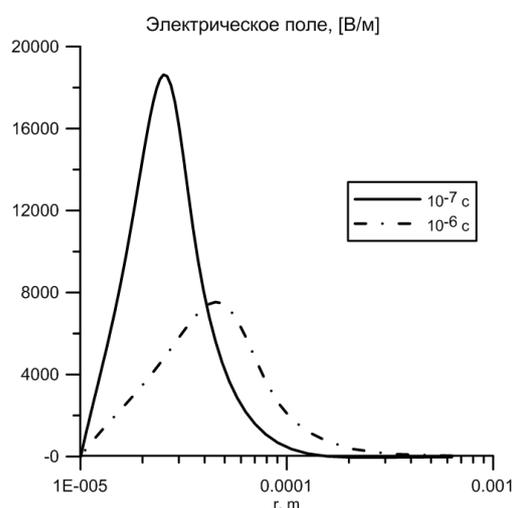


Рис. 2. Эволюция самосогласованного поля в начальный период распада слоя

Теперь рассмотрим ситуацию с приложенным медленно меняющимся полем на границе  $r=R$ :  $E_p = E_0 \sin(\omega t)$ . Частота – 1 МГц. При  $E_0 > 0$ , как и при  $E_0 < 0$  распределение электрических сил меняется слабо (рис. 3). А вот с повышением частоты внешнего поля до 10 МГц (рис. 4) электрическое поле в плазме сохраняется гораздо дольше, из-за того, что внешнее поле начинает действовать, когда в объеме еще есть значительная квазинейтральность. Таким образом, несмотря на стремление плазмы экранировать внешнее поле, до некоторой степени можно управлять процессом разделения зарядов и величиной поля внутри плазмы с помощью изменения параметров внешней цепи.

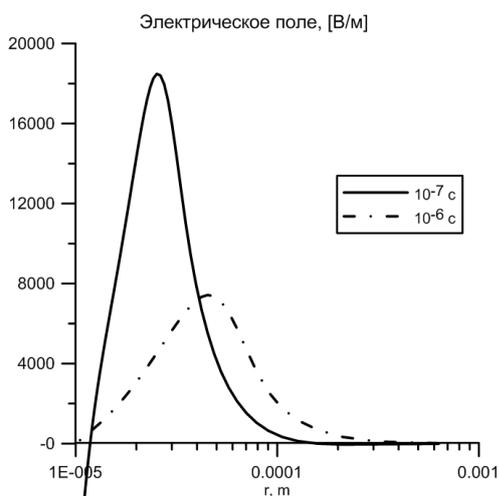


Рис. 3. Эволюция поля в плазме при частоте внешнего поля 1 МГц

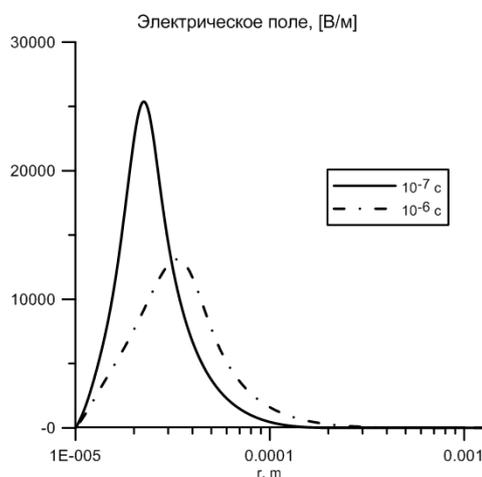


Рис. 4. Эволюция поля в плазме при частоте внешнего поля 10 МГц

## 4. Заключение

Предложенная авторами кинетическая модель с тремя дискретными скоростями корректно воспроизводит и уточняет результаты для диффузионно-дрейфового приближения, и также позволяет получить решение системы уравнений Эйлера – Пуассона без физических упрощений. Схема позволяет получать решение в задачах, где пренебрегать конвективным членом уже не следует.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена в рамках проекта Российского Научного Фонда № №14-50-00124.

## Литература

1. Wang D., Wang Z. “Large BV solutions to the compressible isothermal Euler – Poisson equations with spherical symmetry,” *Nonlinearity*, vol. 19, pp. 1985–2004, Aug. 2006.
2. Chen G-Q., Li T-H., “Global entropy solutions in  $L^\infty$  to the Euler equations and Euler – Poisson equations for isothermal fluids with spherical symmetry,” *Methods Appl. Anal.*, vol. 10, no. 2, pp. 215–244, 2003.
3. Chainais-Hillairet C., Peng Y.-J., Violet I., “Numerical solutions of Euler-Poisson systems for potential flows,” *Appl. Numer. Math.*, vol. 59, pp. 301-315, 2009.
4. Wolf-Gladrow D.A., *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models – An Introduction*, Berlin, Germany: Springer, 2000.
5. Chen S., Doolen G.D., “Lattice Boltzmann method for fluid flows,” *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, pp. 329–364, Jan. 1998
6. Shan X., He X., “Discretization of the Velocity Space in the Solution of the Boltzmann Equation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 1, pp. 65–68, Jan. 1998.
7. Xe X., Luo L.S., “A priory derivation of the lattice Boltzmann equation,” *Phys. Rev. E*, vol. 55, no. 6, pp. R6333–R6336, Jun. 1997.
8. Shan X., Yuan X.-F., Chen H., “Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the Navier–Stokes equation,” *J. Fluid Mech.*, vol. 550, pp. 413–441, Mar. 2006
9. Kihara T., Taylo M.H., Hirshfelder J.O., “Transport properties for gases assuming inverse power intermolecular potentials,” *Phys. Fluids*, vol. 3, no 5, pp. 715–720, Sept. 1960.
10. Su C.H., Lam S.H., “Continuum Theory of Spherical Electrostatic Probes,” *Phys. Fluids*, vol. 6, no 10, pp. 1479–1491, Oct. 1963.
11. Cohen I.M., “Characteristics of a Spherical Electrostatic Probe in a Bounded Plasma,” *Phys. Fluid*, vol. 13, no 4, pp. 889–894, Apr. 1970.
12. Toba K., Sayano S., “A continuum theory of electrostatic probes in a slightly ionized gas,” *J. Plasma Physics*, vol. 1, no. 4, pp. 407–423, 1967.
13. Bush W.B., Fendell F.E., “Continuum theory of spherical electrostatic probes (frozen chemistry),” *J. Plasma Physics*, vol. 4, no. 2, pp. 317–334, May 1970.
14. Self S.A., Shih C.H., “Theory and Measurements for Ion Collection by a Spherical Probe in a Collisional Plasma,” *Phys. Fluids*, vol. 11, no 7, pp. 1532–1545, July 1968.
15. Patacchini L., Hutchinson I.H., “Continuum-plasma solution surrounding nonemitting spherical bodies,” *Phys. Plasmas*, vol. 16, p. 062101, 2009.
16. Niyogi K.K.Cohen., I M., “Continuum electrostatic probe theory with magnetic field” *Phys. Fluids*, vol 16, no 1. P. 69, Jan 1973;
17. Chou Y.S., Talbot L., Willis D.R., “Kinetic Theory of a Spherical Electrostatic Probe in a Stationary Plasma,” *Phys. Fluids*, vol. 9, no 11, pp. 2150–2167, Nov. 1966.
18. Дикалюк А.С., Суржиков С.Т. Учет процесса зарядки твердых частиц при моделировании эволюции пылевой компоненты плазмы в нормальном тлеющем разряде // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2011. Т. 11. 5с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2011-11/articles/170/>

19. Крылов В.И. «Приближенное вычисление интегралов», Москва, Наука, 1967.
20. Cardewille G., “A Hermite Upwind WENO scheme for solving hyperbolic equations,” *J. Comp. Phys.*, 227 (2008), pp. 2430–2454
21. Pieraccini S. and Puppo G., “Implicit–Explicit Schemes for BGK Kinetic Equations”, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 32, No. 1, July 2007.

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2015 г.