

Hierarchical Model of Premixed Turbulent Flame

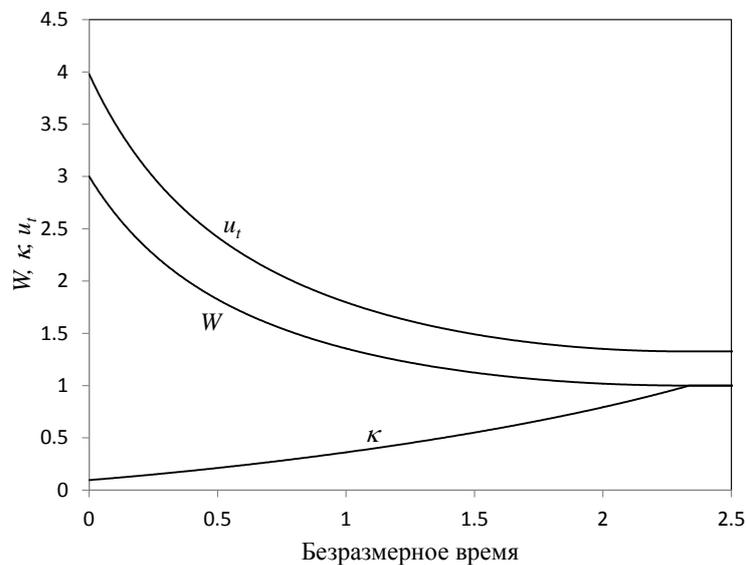
S.A. Rashkovskiy

*Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119526, Russia
rash@ipmnet.ru*

Abstract

The hierarchical model of premixed turbulent combustion is considered. The equation describing the propagation of a curved flame front in a turbulent flow is obtained. It is shown that in the space of wave numbers of turbulent flame front disturbances, it is possible to formulate the Cauchy problem, which allows calculating the statistical structure and velocity of the turbulent flame. The solution to the equation for the two-scale turbulent flame front is considered.

Keywords: turbulent combustion, premixed flame, flame velocity.



Dependencies of velocity of normal propagation of two-scaled curved flame front $w(\tau)$, relative wave numbers of front disturbances $\kappa(\tau)$ and velocity of mean front $u_t(\tau)/u_n^0$ on time for $\mu=3$ and $w_0=3$

УДК 536.46

Иерархическая модель турбулентного пламени в предварительно перемешанной газовой смеси

С.А. Рашковский

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, 101/1
rash@ipmnet.ru*

Аннотация

Рассматривается иерархическая модель турбулентного горения предварительно перемешанной газовой смеси и выводится уравнение описывающее распространение искривленного фронта пламени в турбулентном потоке. Показано, что в пространстве волновых чисел неоднородностей фронта пламени можно сформулировать задачу Коши, позволяющую рассчитать статистическую структуру турбулентного пламени и скорость его распространения. Рассмотрено решение для двухмасштабного фронта турбулентного горения.

Ключевые слова: турбулентное горение, предварительно перемешанная газовая смесь, скорость турбулентного горения.

1. Введение

Как известно, плоское ламинарное пламя в однородной горючей смеси является неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям [1, 2]. Результатом развития неустойчивости ламинарного пламени является возникновение ячеистой структуры фронта, способной существовать длительное время [2–4]. Это приводит к тому, что в реальных условиях горения однородной горючей смеси, где всегда существуют внешние возмущения, ламинарное пламя искривлено, а скорость его распространения по газу отличается от скорости нормального распространения плоского ламинарного пламени. Это отличие связано не столько с зависимостью скорости нормального распространения ламинарного пламени от его кривизны [2], сколько с увеличением площади фронта пламени и, следовательно, с увеличением расхода горючей смеси через его поверхность.

Для понимания детальных механизмов распространения искривленного пламени большую роль играют численные и аналитические исследования различных процессов, участвующих в формировании искривленного фронта. Аналитические решения, в том числе модельных задач, позволяют глубже понять механизмы формирования и распространения искривленного пламени в однородной горючей смеси и на их основе строить более точные модели турбулентного пламени.

В работе [5] методом характеристик исследовано распространение искривленного пламени в однородном газовом потоке и в потоке с периодически изменяющейся вдоль среднего фронта скоростью. В работе исследована нестационарная форма фронта и зависимость скорости распространения среднего фронта от времени и от амплитуды неоднородностей набегающего потока. В работе [6] исследованы деформация и диспергирование фронта пламени под действием больших периодических неоднородностей скорости набегающего потока. В этих работах считается, что искривленное пламя распространяется с постоянной нормальной

скоростью (предел Ландау) или со скоростью, зависящей от кривизны пламени (предел Маркштейна), при этом, гидродинамическая неустойчивость фронта не учитывается. Вместе с тем, известно, что гидродинамическая неустойчивость играет решающую роль в распространении искривленного пламени и пренебрежение этим эффектом может приводить не только к заметной ошибке, но и к качественно другим результатам.

В работе [7] выведено интегро-дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию фронта пламени с учетом его гидродинамической неустойчивости, а в работах [8–10] исследованы решения этих уравнений, описывающие ячеистую структуру ламинарного пламени. Сложный вид этих решений не позволяет в общем случае получить зависимость скорости нестационарного распространения искривленного ламинарного пламени от длины волны возмущений и, кроме того, не позволяет обобщить полученные решения на возмущения с широким спектром волновых чисел, имеющим место в турбулентном пламени, которое можно рассматривать как деформированное ламинарное пламя с непрерывной спектральной характеристикой возмущений.

В работе [11] предложено нелинейное модельное уравнение, описывающее распространение искривленного фронта ламинарного пламени и методом характеристик исследованы его решения.

В настоящей работе на основании этого модельного уравнения предлагается спектральная модель распространения пламени в турбулентном потоке предварительно перемешанной газовой смеси.

2. Спектральная модель пламени

Рассмотрим набегающий турбулентный поток предварительно перемешанной однородной горючей газовой смеси, в котором распространяется пламя. Для простоты турбулентность набегающего потока будем считать однородной и изотропной. Она характеризуется спектральной плотностью энергии турбулентных пульсаций $E(k)$, такой, что среднеквадратические турбулентные пульсации

$$\overline{u'^2} = \int_{k_0}^{\infty} E(k) dk, \quad (1)$$

где k_0 – внешний масштаб течения; черта сверху означает осреднение.

Весь спектр турбулентности набегающего потока можно условно разбить на два диапазона: $k \in [k_0, k_L]$ и $k \in [k_L, \infty]$, где

$$k_L = \frac{2\pi}{\delta_L}, \quad (2)$$

где δ_L – толщина плоского ламинарного пламени. Соответственно,

$$\overline{u'^2} = \underbrace{\int_{k_0}^{k_L} E(k) dk}_I + \underbrace{\int_{k_L}^{\infty} E(k) dk}_II \quad (3)$$

Турбулентные вихри из диапазона I приводят к изгибанию фронта и практически не влияют на внутреннюю структуру ламинарного пламени (такие эффекты, как эффект Маркштейна и растяжение пламени являются эффектами второго порядка). В то же время турбулентные вихри из диапазона II практически не искривляют фронт, однако они интенсифицируют процессы внутри ламинарного пламени и изменяют скорость его нормального распространения. В дальнейшем обозначим скорость нормального распространения плоского

ламинарного пламени с учетом интенсификации внутренних процессов за счет мелкомасштабных турбулентных вихрей из диапазона II как u_L . Для данного турбулентного потока эта величина считается заданной и постоянной характеристикой ламинарного пламени.

Тогда задача расчета турбулентного пламени в предварительно перемешанной газовой смеси сводится к расчету распространения ламинарного пламени, имеющего скорость нормального распространения u_L , в турбулентном потоке со спектром из диапазона I. Эти вихри только искривляют ламинарное пламя, изменяя площадь его поверхности. Пусть мгновенная площадь поверхности искривленного ламинарного пламени равна A_L . Тогда объемный расход свежей горючей смеси через эту поверхность будет

$$G = u_L A_L \quad (4)$$

Такое турбулентное пламя (или, что то же самое, искривленное ламинарное пламя) будем рассматривать, как искривленную математическую поверхность, не имеющую толщины.

Рассматривая Фурье-представление этой поверхности, можно говорить о спектре волновых чисел неоднородностей фронта пламени. В общем случае этот спектр будет непрерывным и будет характеризоваться тем же диапазоном волновых чисел, что и спектр турбулентности набегающего потока, участвующий в искривлении поверхности пламени; т.е. диапазоном I: $[k_0, k_L]$.

Выберем из этого диапазона некоторое волновое число k и осредним поверхность фронта по объемам с масштабом

$$l' = \frac{2\pi}{k'} < \frac{2\pi}{k} \quad (5)$$

Такая процедура эквивалентна тому, что из реального фронта мы удалили все неоднородности с волновыми числами $k' > k$. В результате мы получим более плавный фронт, в котором будут присутствовать только неоднородности с волновыми числами $k'' < k$. Полученную таким образом поверхность назовем частично осредненным фронтом k . Частично осредненный фронт k , как геометрическая поверхность, будет иметь площадь $A(k)$ и может рассматриваться в свою очередь, как некоторое искривленное «ламинарное» пламя. Для него можно ввести скорость «нормального распространения» $u_n(k)$, которую естественным образом можно определить из условия

$$G = u_n(k) A(k), \quad (6)$$

где объемный расход свежей смеси через пламя по-прежнему определяется соотношением (4).

Частично осредненный фронт можно определить для любого волнового числа k . Учитывая, что для всех k выполняется условие (6) с одним и тем же расходом G , дифференцированием получим

$$\frac{du_n}{dk} = -u_n \frac{1}{A} \frac{dA}{dk} \quad (7)$$

Неоднородности реального фронта с волновыми числами $k' > k$, «исчезнувшие» при таком частичном осреднении формируют «внутреннюю структуру» частично осредненного фронта k , которая, как будет показано далее, определяет скорость нормального распространения частично осредненного фронта k .

Рассмотрим частично осредненный фронт $k + dk$. Этот фронт можно представить как частично осредненный фронт k , на поверхности которого имеются возмущения из узкого интервала волновых чисел $[k, k + dk]$. Эти неоднородности можно рассматривать, как возмущения частично осредненного фронта k . Введем отклонение $z(k)$ точек частично возмущен-

ного фронта $[k, k+dk]$ от частично возмущенного фронта k по направлению нормали к последнему. Отклонения $z(k)$ можно рассматривать, как высоту неоднородностей из диапазона $[k, k+dk]$ над поверхностью частично осредненного фронта k .

Введем систему координат, связанную с частично осредненным фронтом k : оси x и y лежат на поверхности фронта k , а ось z направлена по нормали к фронту k в сторону исходной (свежей) горючей смеси. Очевидно, максимальная высота неоднородностей $|z_{\max}(k)|$ будет малой в связи с узким диапазоном dk рассматриваемых возмущений. Для количественной оценки введем радиус кривизны $R(k)$ частично осредненного фронта k . Тогда для возмущений фронта из диапазона $[k, k+dk]$ имеет место условие

$$|z_{\max}(k)| \ll R(k) \quad (8)$$

При выполнении условия (8) можно пренебрегать кривизной системы координат, связанной с частично осредненным фронтом k , и считать ее декартовой.

В этом случае площадь поверхности частично осредненного фронта $k+dk$ будет равна

$$A(k+dk) = A(k) \left\langle \sqrt{1 + |\nabla z|^2} \right\rangle, \quad (9)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает осреднение по поверхности частично осредненного фронта k ; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

– двумерный градиент вдоль поверхности частично осредненного фронта k .

Учитывая условие (8), соотношение (9) можно записать в виде

$$\frac{A(k+dk) - A(k)}{A(k)} = \frac{1}{2} \left\langle |\nabla z|^2 \right\rangle \quad (10)$$

Для узкого диапазона волновых чисел dk должно быть $\left\langle |\nabla z|^2 \right\rangle \sim dk$. Введем

$$\left\langle |\nabla z|^2 \right\rangle = \phi(k) dk, \quad (11)$$

где $\phi(k)$ – спектральная характеристика турбулентного пламени.

С учетом (11) соотношение (10) принимает вид

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dk} = \frac{1}{2} \phi(k) \quad (12)$$

Тогда соотношение (7) примет вид [12, 13]

$$\frac{du_n}{dk} = -\frac{1}{2} \phi(k) u_n \quad (13)$$

Очевидно, частично осредненный фронт, имеющий масштаб k_0 совпадает со средним фронтом турбулентного пламени, а скорость $u_n(k_0)$ является скоростью турбулентного горения

$$u_t = u_n(k_0) \quad (14)$$

При этом скорость неосредненного фронта $u_n(k_L)$ совпадает со скоростью нормального распространения ламинарного пламени

$$u_n(k_L) = u_L \quad (15)$$

Таким образом, формально, расчет скорости турбулентного горения однородной горючей смеси сводится к решению задачи Коши (13), (15): нужно решить уравнение (13) с заданным начальным условием (15) и, используя найденную таким образом функцию $u_n(k)$, вычислить скорость турбулентного горения по формуле (14).

Для решения этой задачи нужно знать функцию $\phi(k)$. Для этого нужно описать развитие неоднородностей с волновыми числами из диапазона $[k, k+dk]$ на поверхности частично осредненного фронта k .

Это можно сделать с помощью идеи перенормировки [12,13]. Она заключается в том, что частично осредненный фронт рассматривается, как «обычное ламинарное пламя», распространяющееся в турбулентном потоке со скоростью нормального распространения $u_n(k)$. При этом спектр турбулентных пульсаций набегающего потока можно разбить на три диапазона: $k' < k$, $k < k' < k+dk$ и $k' > k$.

Турбулентные пульсации из диапазона $k' < k$ не могут создавать неоднородности фронта из диапазона $[k, k+dk]$ и не могут напрямую изменять их амплитуду (эти вихри слишком большие для таких неоднородностей фронта), но могут их растягивать и через это влиять на их эволюцию. Такие вихри формируют неоднородности частично осредненного фронта k , а неоднородности из диапазона $[k, k+dk]$ они переносят, как целое, лишь растягивая (деформируя) их.

Турбулентные пульсации из диапазона $k' > k+dk$ также не оказывают прямого воздействия на неоднородности фронта из диапазона $[k, k+dk]$, т.к. они слишком малы для них. Эти вихри формируют внутреннюю мелкомасштабную структуру неоднородностей из диапазона $[k, k+dk]$, которая определяет скорость нормального распространения $u_n(k)$. Прямое влияние на неоднородности фронта из диапазона $[k, k+dk]$ оказывают только турбулентные пульсации из этого же диапазона.

Для описания эволюции неоднородностей фронта из диапазона $[k, k+dk]$ на фоне частично осредненного фронта k необходимо использовать уравнение распространения фронта. Такие уравнения известны (см., например, [7]), однако все они являются нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями и не удобны для такого анализа. Да и нет необходимости использовать для решения этой задачи такие сложные уравнения.

Более подходящим для этих целей является модельное уравнение перемещения фронта, которое учитывает все основные эффекты, приводящие к росту неоднородностей фронта и их стабилизации [11].

3. Двухмасштабный искривленный фронт пламени

В качестве примера рассмотрим фронт пламени, характеризуемый двумя масштабами неоднородностей: k_1 и k_2 . Это означает, что фронт создан двумя начальными возмущениями с волновыми числами k_1 и k_2 . Будем считать, что

$$k_1 \ll k_2 \quad (16)$$

Такой фронт можно представить состоящим из мелкомасштабных возмущений k_2 , развивающихся на фоне крупномасштабных возмущений k_1 (рис. 1). В этом случае крупномасштабный фронт k_1 является «средней поверхностью» для мелкомасштабного фронта k_2 . При этом считается, что средняя поверхность крупномасштабного фронта k_1 является плоской, имеющей волновое число $k_0 = 0$.

Формально крупномасштабный фронт k_1 можно получить осреднением истинного фронта, каковым является мелкомасштабный фронт k_2 , по масштабам l , удовлетворяющим условиям

$$\frac{2\pi}{k_2} \ll l \ll \frac{2\pi}{k_1} \quad (17)$$

Осредняя истинный фронт (или же крупномасштабный фронт k_1) по масштабам

$$l_1 \gg \frac{2\pi}{k_1}, \quad (18)$$

получим плоский средний фронт $k_0 = 0$.

Таким образом, фронт k_1 можно рассматривать, как частично осредненный истинный фронт (или, что в данном случае то же самое, частично осредненный мелкомасштабный фронт k_2), а фронт $k_0 = 0$ можно рассматривать, как частично осредненный крупномасштабный фронт k_1 , или что в данном случае то же самое, полностью осредненный истинный фронт.

Каждый из частично осредненных фронтов имеет свою площадь поверхности. Выберем некоторый участок истинного фронта k_2 , имеющего площадь A_2 . Ему будет соответствовать частично осредненный фронт k_1 , имеющий площадь A_1 и полностью осредненный фронт k_0 , имеющий площадь A_0 .

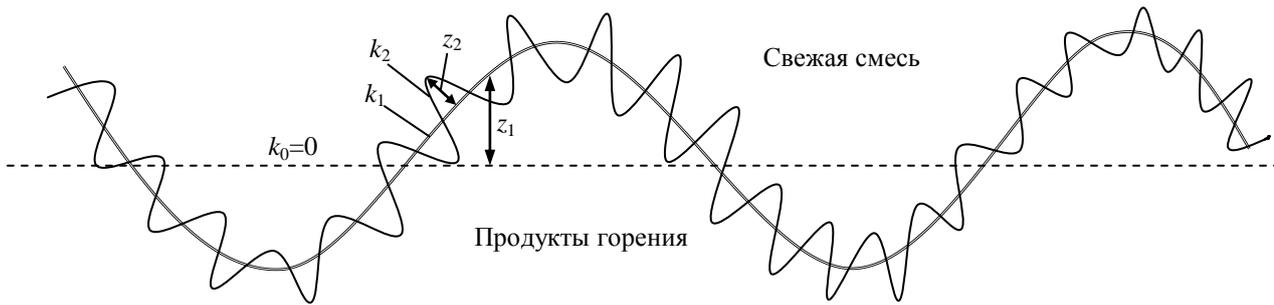


Рис. 1. Схема двухмасштабного фронта пламени

Объем исходной горючей смеси, сгорающий на этом участке фронта пламени за единицу времени (протекающий через его поверхность за единицу времени), очевидно, равен

$$G = u_n^0 A_2 \quad (19)$$

Если отвлечься от внутренней структуры частично осредненного фронта k_1 (которую формируют неоднородности масштаба k_2), то его так же, как и истинный фронт, можно условно рассматривать, как искривленную поверхность, через которую протекает исходная горючая смесь.

По аналогии с (19) можно записать

$$G = u_n(k_1) A_1, \quad (20)$$

где $u_n(k_1)$ имеет смысл скорости нормального распространения частично осредненного фронта k_1 по исходной смеси.

Аналогично для полностью осредненного фронта k_0 получим

$$G = u_n(k_0) A_0, \quad (21)$$

где $u_n(k_0)$ имеет смысл скорости нормального распространения полностью осредненного фронта k_0 по исходной смеси.

Обозначая

$$u_n(k_2) = u_n^0, \quad (22)$$

запишем соотношения (19)–(21) в виде

$$u_n(k_0)A_0 = u_n(k_1)A_1 = u_n(k_2)A_2 \quad (23)$$

При этом согласно (22) $u_n(k_2)$ равно скорости нормального распространения плоского ламинарного пламени, а $u_n(k_0)$ равно скорости искривленного пламени, т.е. скорости «турбулентного горения»

$$u_t = u_n(k_0) \quad (24)$$

Частично осредненный фронт k_1 можно описать уравнением [11]

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} - \alpha_1 z_1 = \beta u_n(k_1) \left(|\nabla z_1|^2 - \lambda_1 \right), \quad (25)$$

где z_1 – отклонение частично осредненного фронта k_1 от средней плоскости k_0 ;

$$\beta = 0.5 + \psi(\mu), \quad \alpha_1 = \psi(\mu) u_n(k_1) k_1$$

$$\psi(\mu) = \frac{\mu}{1+\mu} \left(\sqrt{1 + \mu - \frac{1}{\mu}} - 1 \right), \quad \mu = \frac{\rho_0}{\rho_B} \quad (26)$$

ρ_0, ρ_B – плотности горючей смеси и продуктов сгорания соответственно. Используя решение уравнения (25) [11], скорость «турбулентного горения»

$$u_t = u_n(k_1) (1 + \beta \lambda_1), \quad (27)$$

где собственная функция λ_1 определяется согласно [11] соотношением

$$\lambda_1(t) = \left\langle |\nabla z_1|^2 \right\rangle \quad (28)$$

При заданной скорости $u_n(k_1)$ для частично осредненного фронта k_1 справедливы все результаты [11], в которых нужно формально заменить u_n^0, α, k, z и λ на $u_n(k_1), \alpha_1, k_1, z_1$ и λ_1 , соответственно.

Входящая в эти результаты скорость $u_n(k_1)$, отличается от скорости нормального распространения плоского ламинарного пламени u_n^0 и определяется «внутренней структурой» частично осредненного фронта k_1 , т.е. мелкомасштабными неоднородностями фронта, имеющими масштаб k_2 .

Развитие мелкомасштабных неоднородностей k_2 на фоне крупномасштабных неоднородностей k_1 можно описать, рассматривая их, как результат неустойчивости Дарье – Ландау частично осредненного фронта k_1 . В этом случае скорость «нормального распространения» фронта пламени будет равна $u_n(k_2)$, а скорость $u_n(k_1)$ нормального распространения частично осредненного пламени k_1 будет представлять собой скорость распространения искривленного пламени. Введем отклонение z_2 истинного фронта k_2 (мелкомасштабных неоднородностей истинного фронта) от частично осредненного фронта k_1 в направлении нормали к последнему (см. рис. 1).

Тогда, согласно [11], получим

$$u_n(k_1) = u_n(k_2) (1 + \beta \lambda_2), \quad (29)$$

где

$$\lambda_2(t) = \left\langle |\nabla z_2|^2 \right\rangle \quad (30)$$

Учитывая (22), (27) и (29) для скорости «турбулентного горения» рассматриваемого двухмасштабного фронта пламени получим

$$u_t = u_n^0 (1 + \beta\lambda_1)(1 + \beta\lambda_2) \quad (31)$$

В системе, связанной с частично осредненным фронтом k_1 , истинный фронт k_2 описывается уравнением, аналогичным уравнению (25)

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - V_{n2} + (\mathbf{V}_{\tau 2} \nabla) z_2 = u_n(k_2) \left(1 + \frac{1}{2} |\nabla z_2|^2 \right) - u_n(k_1), \quad (32)$$

где V_{n2} и $\mathbf{V}_{\tau 2}$ – нормальная и касательная к частично осредненному фронту k_1 составляющие скорости газа перед фронтом в системе, связанной с фронтом k_1 , генерируемые пламенем. Очевидно, эволюция неоднородностей k_2 будет происходить, как за счет скорости газа, генерируемой крупномасштабными неоднородностями k_1 , так и за счет скорости газа, генерируемой самими мелкомасштабными неоднородностями k_2 .

Течение, генерируемое крупномасштабными неоднородностями переносит мелкомасштабные неоднородности практически без изменения. Поэтому скорости V_{n2} и $\mathbf{V}_{\tau 2}$ являются относительными скоростями, которые генерируют мелкомасштабные неоднородности на фоне крупномасштабных.

Тогда получим [11] (рис. 2)

$$V_{n2} = [\alpha(k_2) - \alpha(k_1) \cos \theta_1] z_2, \quad (33)$$

$$\mathbf{V}_{\tau 2} = -\psi(\mu) u_n(k_2) \nabla z_2 + \psi(\mu) u_n(k_1) \nabla z_1, \quad (34)$$

где
$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla z_1|^2}}, \quad (35)$$

$$\alpha(k) = \psi(\mu) u_n(k) k \quad (36)$$

Тогда уравнение (32) принимает вид

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - [\alpha(k_2) - \alpha(k_1) \cos \theta_1] z_2 + \psi(\mu) u_n(k_1) (\nabla z_1 \nabla) z_2 = \beta u_n(k_2) (|\nabla z_2|^2 - \lambda_2) \quad (37)$$

Здесь член $\psi(\mu) u_n(k_1) (\nabla z_1 \nabla) z_2$ описывает снос мелкомасштабных неоднородностей фронта k_2 вдоль поверхности частично осредненного фронта k_1 под действием течения, генерируемого частично осредненным фронтом. Как показано выше, это течение является неравномерным и приводит к растяжению материальных линий на поверхности частично осредненного фронта.

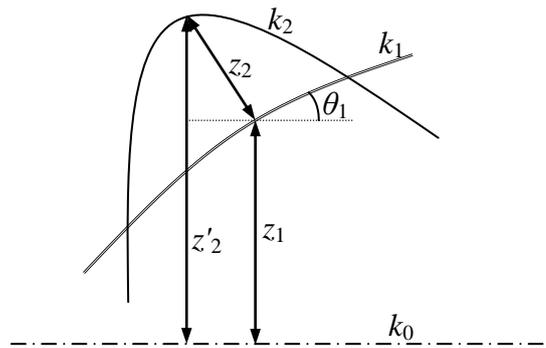


Рис. 2. Схема элемента двухмасштабного фронта

Принимая приближенно

$$\cos \theta_1 \approx 1, \quad (38)$$

запишем уравнение (32) в виде

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} - [\alpha(k_2) - \alpha(k_1)]z_2 + \psi(\mu)u_n(k_1)(\nabla_{z_1}\nabla)z_2 = \beta u_n(k_2)\left(|\nabla_{z_2}|^2 - \lambda_2\right) \quad (39)$$

Используя решение уравнения (25) [11], легко установить закон растяжения поверхности пламени за счет генерируемого им поля течения. Для двух близких лагранжевых частиц фронта это уравнение можно записать в виде [11]

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{d\Delta x}{dt} = -2\beta u_n^0 K, \quad (40)$$

где $K \approx \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ – мгновенная кривизна фронта пламени в точке нахождения лагранжевой частицы. Дифференциальный закон изменения масштаба k неоднородностей, развивающихся на фоне искривленного фронта, может быть получен из (40), если учесть, что $\frac{dk}{k} = -\frac{d\Delta x}{\Delta x}$. В результате получим

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dt} = 2\beta u_n^0 K \quad (41)$$

Это уравнение имеет смысл только для «выпуклых» участков фронта, для которых $K < 0$. Именно на этих участках происходит растяжение поверхности фронта и всего, что на ней находится (например, мелкомасштабных неоднородностей). На «вогнутых» в сторону исходной смеси участках фронта уравнение (41) не применимо, т.к. имеет место необратимость расширения любой материальной линии в турбулентном потоке.

Применяя соотношение (41) к двухмасштабному фронту, получим

$$\frac{1}{k_2} \frac{dk_2}{dt} = 2\beta u_n(k_1) K(k_1) \quad (42)$$

Рассмотрим квазиравновесный фронт, у которого неравномерность каждого масштаба имеет свою равновесную форму, соответствующую мгновенному значению ее волнового числа. При этом для частично осредненного фронта волновое число k_1 не меняется, а для мелкомасштабных неоднородностей волновое число k_2 уменьшается согласно уравнению (42).

Используя результаты [11], получим

$$\Delta z_{F1}^\infty = \frac{\alpha(k_1)\pi^2}{4\beta u_n(k_1)k_1^2}, \quad (43)$$

$$\lambda_{1\infty} = \frac{1}{12} \left[\frac{\alpha(k_1)\pi}{\beta u_n(k_1)k_1} \right]^2, \quad (44)$$

$$\Delta z_{F2}^\infty = \frac{[\alpha(k_2) - \alpha(k_1)]\pi^2}{4\beta u_n(k_1)k_1^2} \quad (45)$$

$$\lambda_{2\infty} = \frac{1}{12} \left[\frac{\alpha(k_2) - \alpha(k_1)\pi}{\beta u_n(k_1)k_1} \right]^2 \quad (46)$$

где Δz_{F2}^∞ – равновесная амплитуда соответствующего частично осредненного фронта [11].

При этом волновое число k_2 изменяется согласно уравнению (42).

Учитывая (22), (29), (36), получим

$$u_n(k_1) = u_n^0 \left\{ 1 + \frac{1}{12\beta} \left[\frac{\psi(\mu) [u_n^0 k_2 - u_n(k_1)k_1] \pi}{u_n(k_1)k_1} \right]^2 \right\} \quad (47)$$

Получаем уравнение относительно $u_n(k_1)$, как функции k_2 :

Обозначим
$$w = \frac{u_n(k_1)}{u_n^0} \quad (48)$$

Тогда уравнение (47) приведем к виду

$$w = 1 + \frac{1}{12\beta} \left[\frac{\pi\psi(\mu)(1 - wk_1/k_2)}{(k_1/k_2)w} \right]^2 \quad (49)$$

Решение уравнения (49) приведено на рис. 3.

Согласно [11] кривизна стационарных одномерных ячеек $K_\infty \approx z'' = -\frac{\alpha}{2\beta u_n^0}$. С учетом соотношений (36) получим

$$K_\infty \approx -\frac{\psi(\mu)}{1 + 2\psi(\mu)} k \quad (50)$$

Таким образом, уравнение (42) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{1}{k_2} \frac{dk_2}{dt} = -\psi(\mu) u_n(k_1) k_1 \quad (51)$$

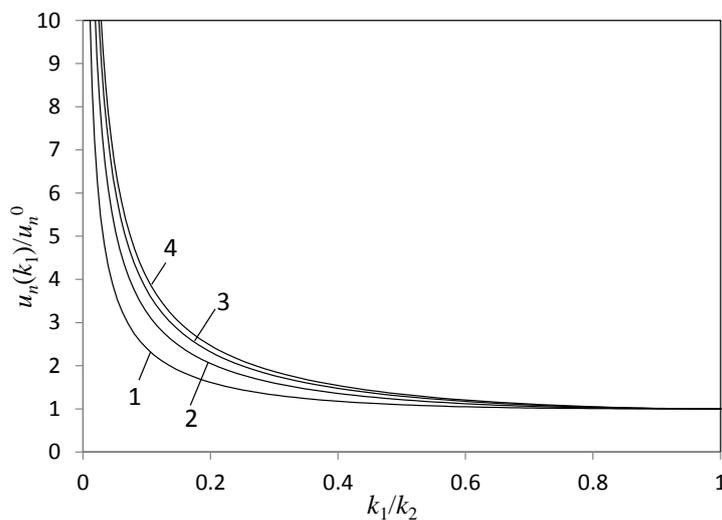


Рис. 3. Решение уравнения (49): 1 – $\mu=2$; 2 – $\mu=4$; 3 – $\mu=7$; 4 – $\mu=10$

Введем параметры

$$\kappa = \frac{k_1}{k_2}, \quad \tau = u_n^0 k_1 t \quad (52)$$

Тогда уравнение (51) примет вид

$$\frac{1}{\kappa} \frac{d\kappa}{d\tau} = \psi w(\kappa) \quad (53)$$

где согласно (49) функция $w(\kappa)$ находится решением алгебраического уравнения

$$w = 1 + \frac{\pi^2 \psi^2}{12\beta} \left(\frac{1}{\kappa w} - 1 \right)^2 \quad (54)$$

Из уравнения (54) найдем

$$\kappa = \frac{1}{w \left(1 + \frac{\sqrt{12\beta}}{\pi\psi} \sqrt{w-1} \right)} \quad (55)$$

Подставляя это в уравнение (53), после простых преобразований получим

$$\frac{dw}{d\tau} = - \frac{\psi w^2}{1 + \frac{\sqrt{3\beta}}{\pi\psi} \frac{w}{\sqrt{w-1}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\sqrt{12\beta}}{\pi\psi} \sqrt{w-1} \right)}} \quad (56)$$

Решая это уравнение с начальным условием

$$w(\tau = 0) = w_0 > 1 \quad (57)$$

найдем $w(\tau)$, после чего из (55) найдем $\kappa(\tau)$.

Учитывая, что согласно [11] $\beta \lambda_\infty = \frac{\pi^2}{6} \frac{\psi^2(\mu)}{[1+2\psi(\mu)]}$, получим

$$u_t = u_n(k_1) \left[1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{\psi^2(\mu)}{(1+2\psi(\mu))} \right] \quad (58)$$

На рис. 4 приведены зависимости $w(\tau)$, $\kappa(\tau)$ и $u_t(\tau)/u_n^0$ для $\mu = 3$ и $w_0 = 3$.

4. Заключение

В работе на основе идеи перенормировки предложена иерархическая модель турбулентного горения предварительно перемешанной газовой смеси и выводится уравнение описывающее распространение искривленного фронта пламени в турбулентном потоке. Показано, что в пространстве волновых чисел неоднородностей фронта пламени можно сформулировать задачу Коши, позволяющую рассчитать статистическую структуру турбулентного пламени и скорость его распространения. Рассмотрено решение этой задачи для двухмасштабного фронта турбулентного горения.

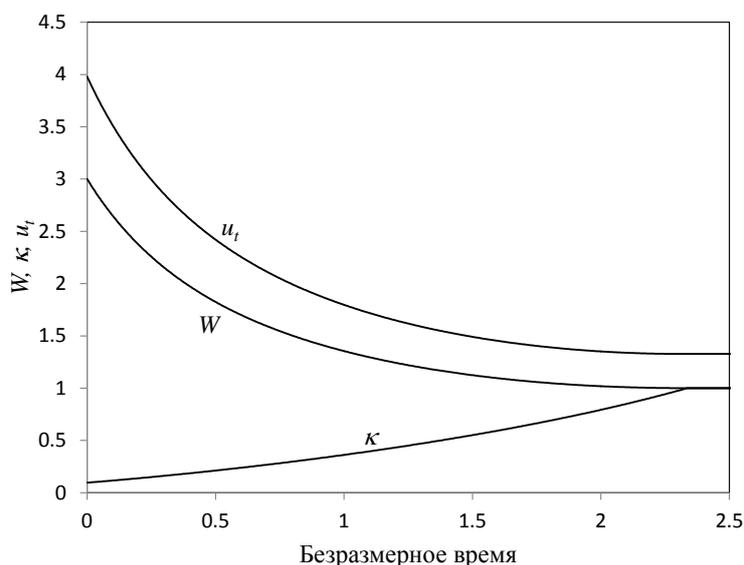


Рис. 4. Зависимости $w(\tau)$, $\kappa(\tau)$ и $u_t(\tau)/u_n^0$, полученные решением уравнения (56) для $\mu=3$ и $w_0=3$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ 13-01-12058-офи_м.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Мир, 1986, 528 с.
2. Nonsteady flame propagation / ed. George N. Markstein. - London: Pergamon Press, 1964, 437 p.
3. Гусак Л.А., Спринцина Е.Н., Щелкин К.И. Исследование устойчивости фронта нормального горения //ФГВ. Т.4, N 3, 1968. С.378–366.
4. Groff E.G. The Cellular Nature of Confined Spherical Propane-Air Flames /Combustion and Flame. 1982. Vol.48, N1. Pp. 71–72.
5. Sung C.J., Sun C.J., Law C.K. Analytic Description of the Evolution of Two-Dimensional Flame Surface. Combustion and Flame/ 1996. Vol.107, N 1/2. Pp. 114–124.
6. Aldredge R.C. Premixed Flame Propagation in a High-Intensity, Large-Scale Vortical Flow. Combustion and Flame. 1996. Vol.106, N 1/2, Pp. 29–40.
7. Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames-I. Derivation of basic equations // Acta Astronautica. Vol.4. 1977. Pp. 1177–1206.
8. Michelson D.M., Sivashinsky G.I. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames- II. Numerical experiments // Acta Astronautica. Vol.4. 1977. Pp. 1207–1221.
9. Минаев С.С. Набор стационарных решений, описывающих ячеистое пламя в случае гидродинамической неустойчивости // ФГВ. № 1. 1992. С. 37–39.
10. Kuznetsov E.A., Minaev S.S. Velocity of Coherent Structure Propagation on the Flame Surface. In Advanced Computation and Analysis of Combustion /[Edited by G.D. Roy, S.M. Frolov, P. Givi].- Moscow: ENAS Publisher, 1997. Pp. 397–403.
11. Рашковский С.А. Структура фронта искривленного пламени в однородной горючей смеси //Аэромеханика и газовая динамика, 2002, № 1, С. 60–72.
12. Рашковский С.А. Спектральная теория распространения турбулентного пламени в однородной горючей смеси // В сб. Горение. Химическая физика процессов горения и взрыва, Черноголовка, 1992, С. 42–44.
13. Рашковский С.А. О статистической структуре фронта турбулентного горения однородной газовой смеси // В сб. Горение гетерогенных и газовых систем. Химическая физика процессов горения и взрыва, Черноголовка, 1989, С. 17–21.

Статья поступила 23 ноября 2015 г.