

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ПРЕГРАДЫ

К.В. Моисеев¹, В.В. Кузенов²

¹Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

²Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Аннотация

Ниже представлен полный процесс анализа одномерной задачи Стефана при воздействии лазера на металлические преграды. Доказана целесообразность рассмотрения задачи в одномерном случае. Осуществлён переход к подвижной системе координат. Разработана численная схема решения задачи. Проведены оценка и анализ полученных результатов.

NUMERICAL ANALYSIS OF STEFAN'S CHALLENGE WITH METALL OBSTACLE IMPACTED BY LASER

The complete process of analysing Stefan's challenge is given below. The desirability of considering the challenge in one-dimensional case is proved. The equation is presented in moving coordinate system type. The numerical scheme of equating is developed. Evaluation and analysis of results are carried out.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория переноса энергии и массы вещества является одним из важнейших разделов современной науки. Изучение процессов тепло- и массообмена имеет большое значение для энергетической, металлургической, химической, строительной и других отраслей промышленности.

Для исследования взаимосвязанных процессов тепло- и массопереноса применяется на практике несколько подходов. Классическим в теории тепло- и массопереноса является аналитический метод, заключающийся в получении явной формулы, выражающей решение через элементарные или некоторые специальные функции. Однако не для всех уравнений в частных производных решение может быть выражено через элементарные или известные специальные функции. Тем не менее, аналитический метод остается достаточно мощным средством для качественного анализа решений и исследования относительно простых модельных задач.

В последние годы в связи с быстрым развитием вычислительной техники все более широкое распространение находят численные методы решения задач тепло- и массообмена. Из численных методов наиболее популярным является конечно-разностный метод.

Основными показателями качества разностного уравнения, аппроксимирующего дифференциального уравнение являются: устойчивость, порядок погрешности аппроксимации, экономичность. Очевидно, что применение неустойчивых разностных уравнений не несёт практического смысла. Решение задачи конечно-разностным методом обычно включает следующие этапы: а) формулировку физической модели и математическую постановку задачи; б) работку разностной схемы и ее теоретическое обоснование; в) программирование; г) отладку программы и проверку на контрольных задачах; д) решение конкретных практических задач.

При оценке эффективности применения той или иной разностной схемы для решения практических

задач необходимо учитывать затраты труда и машинного времени на три последних этапах численного решения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Постановка задачи

В данной работе выполнено численное моделирование процесса распространения тепловых потоков q в твердых металлических преградах, находящихся в сильно разреженной газовой среде неограниченного объема. Эти потоки могут быть созданы в металле в результате действия на него лазерного излучения. Известные экспериментальные результаты показывают, что характерный размер пятна воздействия, как правило, не превышает величину порядка 1 мм, что значительно больше характерного расстояния $l \approx 10^{-2}$ мм, которое может пройти тепловая волна в металлической преграде за рассматриваемые в расчёте промежуток времени ($\Delta t \approx 2 \times 10^{-2}$ с). В проведённых расчётах плотность теплового потока лазерного излучения изменялась в диапазоне от 10^5 до 10^9 Вт/см². Такой уровень тепловых потоков q может приводить не только к нагреву металлической преграды, но и к появлению в ней жидкой фазы. Известно, что процессы распространения тепловых потоков в сплошных средах, сопровождающиеся фазовым переходом, рассматриваются на основе решения задачи Стефана. Отмеченные выше особенности рассматриваемой задачи позволяют использовать для математического моделирования процесса распространения тепла в металлических преградах одномерный вариант задачи Стефана.

При выполнении одномерных численных расчетов было принято, расчетная область составляла величину $L \approx 0.025$ мм, что позволяет свести задачу Стефана к одномерному варианту.

2.2. Решаемые задачи

1. Определение распределения температур по толщине преграды.
2. Определение границы фазового перехода в произвольный момент времени.

3. Определение распределения тепловых потоков по толщине преграды.

Все задачи решались на сетке равномерной по пространству сетке $h=L/J$ ($J=1000$).

В качестве условия устойчивости конечно-разностной схемы использован критерий Куранта, который ограничивает величину временного шага τ .

Основная трудность при решении задачи Стефана возникает из-за присутствия движущегося с переменной скоростью фазового фронта, который в общем случае представляет собой некоторую поверхность. При этом тепловой поток терпит разрыв первого рода на этой поверхности, поэтому уравнение теплопроводности здесь заменяется условием, которое связывает скорость движения фазового фронта и величину изменения теплового потока при переходе через фронт. Таким образом, рассматриваемый вариант задачи Стефана формулируется следующим образом:

$$\rho c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ при } 0 \leq x < Y(t);$$

$$\rho c_\ell \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_\ell \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ при } Y(t) \leq x < L,$$

где $Y(t)$ – положение фазового фронта. Индексы s и ℓ обозначают твёрдую и жидкую фазы; λ – соответствующие коэффициенты теплопроводности. Эти уравнения дополняются начальными и граничными условиями и условием Стефана на фазовом фронте:

$$\lambda_s \frac{\partial T}{\partial x}(Y-0) - \lambda_\ell \frac{\partial T}{\partial x}(Y+0) = \rho L_* \frac{\partial Y}{\partial t},$$

где L_* – скрытая теплота плавления (затвердевания). Это условие следует из условия баланса энергии при движении фазового фронта.

Для численного поиска решения наиболее удобной представляется энтальпийная формулировка задачи Стефана, которая позволяет избежать необходимости явно учитывать движение фазового фронта.

$$H(T) = \begin{cases} c_s T, & T < T_p \\ c_\ell T - (c_\ell - c_s) T_p + L_*, & T \geq T_p, \end{cases}$$

где T_p – температура плавления металла.

Тогда вместо выше приведённых уравнений, описывающих задачу Стефана, можно использовать следующую форму записи:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x,t) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0.$$

2.3. Переход к подвижной системе координат

При больших значениях плотности потока ($q > 10^6$ Вт/см²) лазерного излучения может возникать процесс испарения металла с поверхности. При этом эта поверхность будет изменять свое пространственное положение с течением времени со скоростью v . Для учета факта испарения процесс распространения тепла в металле может рассматриваться в подвижной системе координат. При этом далее считается, что скорость испарения металла в вакуум максимальна и равна местной скорости звука. Перейдём к подвижной системе координат в энтальпийной формулировке задачи Стефана.

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x,t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \rho v \frac{\partial H}{\partial x}.$$

2.4. Обезразмеривание

Аналитическое решение задачи Стефана не всегда возможно, поэтому встаёт вопрос о её численном моделировании. При численном моделировании какой-либо практической задачи её приводят к безразмерному виду, что позволяет сразу охватить большой объём подобных по определённым условиям задач. Для этого каждую функцию, фигурирующую в формулировке задачи, представляют следующим образом:

$$f = f_0 f',$$

где f' – безразмерная функция, а f_0 – постоянный размерный множитель, представляющий характерный масштаб для измерения величины f . Часто в качестве масштабов выбирают параметры, входящие в краевые и начальные условия задачи. При этом в системе уравнений, приведенных к безразмерному виду, появляется ряд безразмерных постоянных коэффициентов, таких как число Рейнольдса, число Эйлера, число Фурье и т.п. Введем следующую систему характерных величин:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x,t) \frac{\partial T}{\partial x} \right] Fo + \rho v \frac{\partial H}{\partial x}, \quad Fo = \frac{\alpha^* t^*}{L^2},$$

где α^* – коэффициент температуропроводности.

В данной задаче после обезразмеривания в качестве безразмерного постоянного коэффициента выступает число Фурье Fo . Для проведения численного моделирования в работе был использован явный численный метод. Недостатком этого метода является то, что в конечно-разностной схеме возникает “жёсткое” условие на шаг по времени τ , т.е. задача становится условно устойчивой.

2.5. Конечно-разностная схема

В конечно-разностном виде уравнение задачи Стефана принимает вид

$$\rho \frac{H_n^{k+1} - H_n^k}{\tau} = \left[\lambda_{n+1/2} \frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{h^2} - \lambda_{n-1/2} \frac{T_n^k - T_{n-1}^k}{h^2} \right] Fo + \rho v \frac{4H_{n+1}^k - H_{n+2}^k - 3H_n^k}{2h}.$$

В качестве условия на шаг по времени τ использовался критерий устойчивости Куранта.

3. ТЕСТИРОВАНИЕ

Для проверки правильности работы программы использованы два теста:

1. Задача с фиксированными температурами на границах металла, при решении которой температура должна получиться линейной функцией от координаты.

2. Полубесконечная задача без начальных условий. Рассмотрим подробнее второй тест. Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удалённый от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдений. В этом случае ставится задача об отыскании решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям.

Так как задача полубесконечна (на бесконечности ставится условие ограниченности решения), то задаётся только одно граничное условие первого рода: $T(0,t) = \mu(t)$, где $\mu(t)$ – заданная функция.

Возьмём наиболее часто встречающийся случай граничного условия $\mu(t) = A \cos(\omega t)$. Решение поставленной задачи может быть представлено в виде

$$T(x,t) = A \exp\left(-x \left[\frac{\omega}{2a^2}\right]^{0.5}\right) \cos\left(-x \left[\frac{\omega}{2a^2}\right]^{0.5} + \omega t\right).$$

Это аналитическое решение сравнивается с численным решением при том же граничном условии. График распределения температуры, полученный в результате, имеет тот же вид, что и аналитическое решение. Результаты расчетов для условий первого теста также совпадают с аналитическим решением.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

4.1. Результаты

Проведённые расчёты показали, что в одинаковых условиях наиболее высокая температура поверхности ($T \approx 1700$ К) достигалась для металлической преграды, выполненной из железа (рис.3). Волна прогрева наиболее глубоко продвинулась в металлической преграде, состоящей из меди (рис.2, рис.5) (на величину $\ell = 0.001$ м за время $t = 4 \cdot 10^{-4}$ с). Наиболее быстро достигла температуры плавления преграда, выполненная из алюминия (рис.1, рис.4).

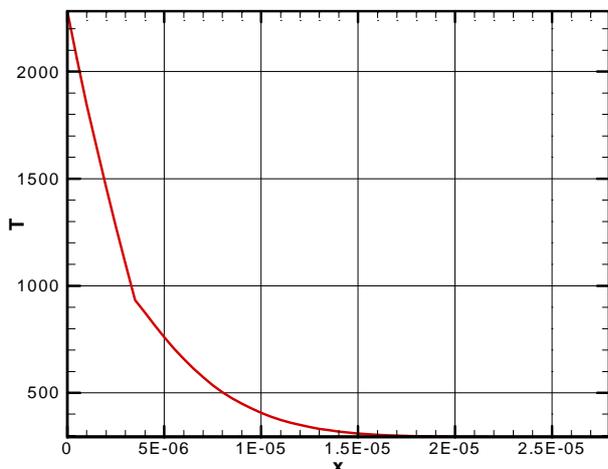


Рис.1. Распределение температур T в преграде из Al

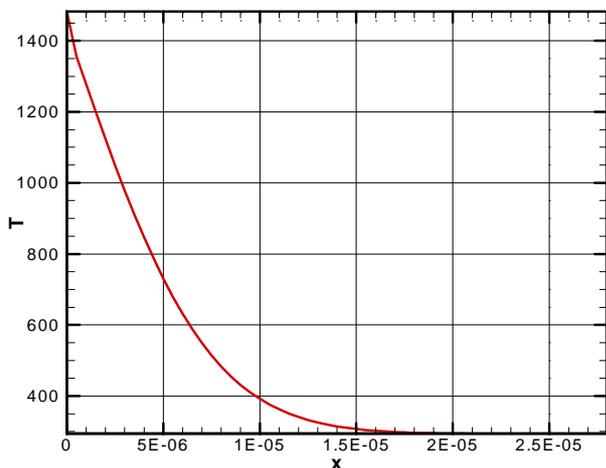


Рис.2. Распределение температур T в преграде из Cu

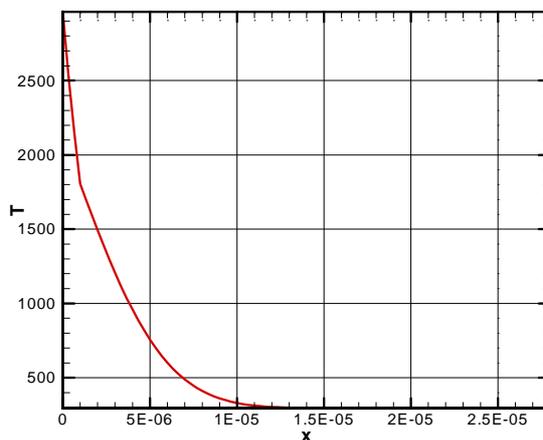


Рис.3. Распределение температур T в преграде из Fe

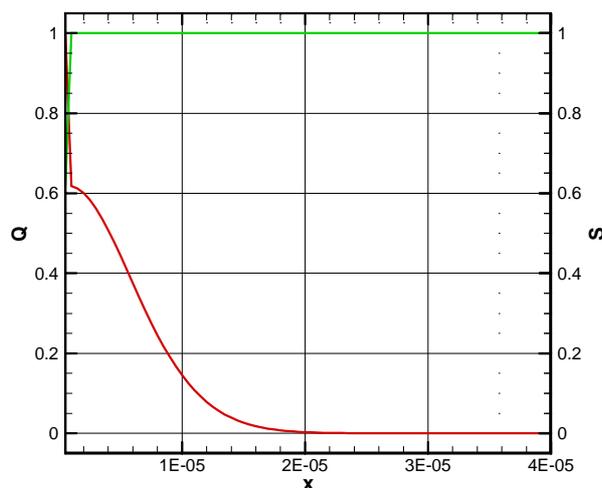


Рис.4. Распределение тепловых потоков Q по пространству, фазовый переход в преграде из Al

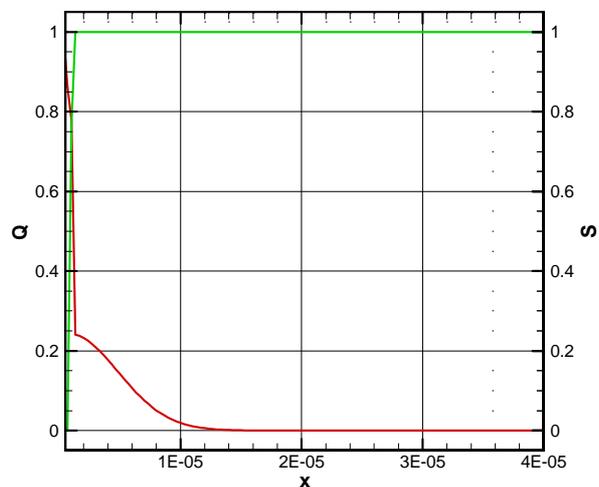


Рис.5. Распределение тепловых потоков по пространству, фазовый переход в преграде из Cu

4.2. Выводы

Построена и реализована явная конечно разностная схема второго порядка точности по пространству для задачи Стефана в подвижной системе координат

Для произвольного времени t рассчитаны распределения температур T , тепловых потоков Q и количества твёрдой фазы S для преград, выполненных из Al, Fe, Cu.

5. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 07-01-00133 и программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (в части разработки программ для параллельных вычислений).

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

q — плотность теплового потока на стенке; Вт/м²
 v — составляющая скорости вдоль оси Ox , м/с
 ρ — плотность среды, кг/м³
 λ — коэффициент теплопроводности, Вт/м·К
 c — теплоёмкость, Дж/кг·К
 T — температура, К
 L — скрытая теплота фазового перехода, Дж/кг

Индексы:

n — порядковый номер пространственной ячейки
 k — порядковый номер временного слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики – М.: Наука, 1977.
2. А.А. Самарский Теория разностных схем – М.: Наука, 1977.