

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ ПОТОКОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

М.С.Французов<sup>1</sup>, В.В. Кузенов<sup>2</sup><sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Москва<sup>2</sup>Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

## Аннотация

В настоящей работе предложено использование двухшаговой конечно-разностной схемы Лакса – Вендрофа с модифицированным методом коррекции потоков для решения задач газовой динамики. В результате удалось получить однородный монотонный метод решения сложных газодинамических задач. Произведен подбор параметров в схеме Лакса – Вендрофа с методом коррекции потоков, регулирующих качество численного решения.

## MODIFICATION OF THE FLUX-CORRECTED TRANSPORT METHOD FOR SOLVING THE PROBLEMS OF DYNAMICS OF GASES

In the present work the usage of the Lax – Wendroff two-step finite-difference scheme with a modified flux corrected transport method is suggested for solving problems of dynamics of gases. As a result, the like-steady method for solving complicated problems of dynamics of gases was deduced. A selection of the parameters of the Lax-Wendroff scheme with a modified flux corrected transport method, which regulate the quality of the numerical solution, was carried out.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для решения сложных научно-технических задач можно использовать различные численные методы: методы характеристик, спектральные методы, методы конечных элементов, сплайны и конечно – разностные методы. В данной работе для поиска решения такого рода задач газовой динамики используются явные конечно-разностные методы, обладающие простотой в реализации и экономичностью. Такими схемами являются схема Лакса – Вендрофа и схема Лакса – Вендрофа с методом коррекцией потоков. При этом выбор явной конечно-разностной схемы обусловлен тем, что она наиболее эффективно распараллеливается при расчетах на многопроцессорных кластерах.

Лакс и Вендроф разработали целый ряд конечно-разностных схем [1]. Эти схемы позволили добиться значительного прогресса в теоретическом изучении разностных методов, и привели к разработке двухшаговых конечно-разностных схем, являющихся достаточно применяемыми для расчета течений сжимаемой жидкости. Схема Лакса – Вендрофа обладает важными положительными качествами: вторым порядком аппроксимации, как по времени, так и по пространству. Однако, несмотря на свою простоту и другие положительные качества, имеет некоторые недостатки. Среди которых отметим следующие: нефизичные высокочастотные колебания, возникающие в области больших градиентов численного решения (например: ударная волна, контактный разрыв и т.д.).

## 2. СХЕМА ЛАКСА – ВЕНДРОФА В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

## 2.1. Схема Лакса – Вендрофа в задачах газовой динамики

Дивергентная форма одномерных уравнений газовой динамики может быть представлена в векторном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0.$$

Для совершенного газа вектора  $\vec{U}$  и  $\vec{F}$  будут иметь вид

$$\begin{cases} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{cases} = \begin{cases} \rho \\ \rho u \\ \rho \left[ \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2} u^2 \right] \end{cases},$$

$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{cases} = \begin{cases} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u \left[ \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right] \end{cases}.$$

Для векторной формы уравнений газовой динамики схема Лакса – Вендрофа будет иметь вид

$$\vec{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\vec{U}_{i+1}^n + \vec{U}_{i-1}^n) - \Delta t \frac{\vec{F}_{i+1}^n - \vec{F}_{i-1}^n}{2\Delta x},$$

$$\vec{U}_i^{n+2} = \vec{U}_i^n - 2\Delta t \frac{\vec{F}_{i+1}^{n+1} - \vec{F}_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}.$$

Здесь первый шаг проводится по схеме Лакса, а на втором шаге применяется схема «чехарда» [1]. Значения  $F_{i\pm 1}^{n+1}$  на втором шаге вычисляются по значениям  $U_{i\pm 1}^{n+1}$ , вычисленным на первом шаге. Первый шаг можно рассматривать как предварительный, а смысл имеют только результаты второго шага.

## 2.2. Обезразмеривание системы уравнений газовой динамики

Один вопросов, возникающих при численном решении какой-либо практически интересной задачи, необходимость охватить целый класс физических явлений, решая конкретно поставленную задачу. Кроме того, при вычислениях необходимо следить за тем, чтобы значение физической величины не выходило за

пределы, допустимые для вычислительной машины. Также важным вопросом является выбор системы единиц, в которой будут измеряться все физические величины. Обойти все вышеперечисленные трудности позволяет так называемое обезразмеривание задачи, т.е. приведение системы уравнений, граничных условий и т.д. к безразмерному виду. Для этого каждую функцию, фигурирующую в формулировке задачи, представляют следующим образом:

$$f = f_0 f',$$

где  $f'$  – безразмерная функция, а  $f_0$  – некоторый постоянный размерный множитель, представляющий характерный масштаб для измерения величины  $f$ .

Часто в качестве масштабных множителей выбирают параметры, непосредственно входящие в условия задачи. При этом в системе уравнений, приведенных к безразмерному виду, появляется ряд безразмерных постоянных коэффициентов, таких, как число Рейнольдса, число Эйлера и т.п. Обычно каждый класс физических задач характеризуется своим набором безразмерных параметров.

Пусть все функции, входящие в нашу систему уравнений газодинамики, обезразмерены согласно формуле

$$t = t_0 t', \quad s = s_0 s', \quad x = x_0 x', \quad u = u_0 u', \\ p = p_0 p', \quad \rho = \rho_0 \rho', \quad T = T_0 T'.$$

Из общей теории размерности известно, что среди всех размерных постоянных величин  $t_0, s_0, x_0, u_0, p_0, \rho_0, T_0$  и т.д. только четыре имеют независимую размерность. Например, в качестве таких независимых постоянных величин выберем:

$$t_0, \quad s_0, \quad \rho_0, \quad p_0.$$

Размерности всех остальных величин выражаются через них.

Итак, уравнение неразрывности, т.е. первое уравнение системы (1) будет иметь вид

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_0 u_0}{s_0} \frac{\partial \rho' u'}{\partial x'} = 0,$$

выберем масштаб скорости  $u_0$  следующим образом:  $u_0 = s_0/t_0$ , тогда выражение с учетом несложных математических преобразований примет вид

$$\frac{\rho_0}{t_0} \left[ \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'}{\partial x'} \right] = 0.$$

В итоге нам удалось произвести преобразование при этом, не изменив вид уравнений. Проведем аналогичные преобразования с другими уравнениями системы. Получим

$$\frac{\rho_0 u_0}{t_0} \frac{\partial \rho' u'}{\partial t'} + \frac{1}{s_0} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ p_0 p' + \rho_0 u_0^2 \rho' u'^2 \right] = 0,$$

с учетом несложных преобразований получим:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{\rho' u'}{Eu} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ p' + \frac{\rho' u'^2}{Eu} \right] = 0,$$

где  $Eu = p_0/\rho_0 u_0^2$  – число Эйлера. Масштаб скорости для этого уравнения выберем из следующего соотношения:  $p_0 = \rho_0 u_0^2$ . Тогда выражение примет вид

$$\frac{\partial \rho' u'}{\partial t'} + \frac{\partial \left[ p' + \rho' u'^2 \right]}{\partial x'} = 0.$$

Для третьего уравнения системы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left[ \frac{p'}{\gamma-1} + \frac{\rho' u'^2}{2Eu} \right] + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{p' u'}{\gamma-1} + \frac{\rho' u'^3}{2Eu} + p' u' \right] = 0.$$

Масштаб скорости выбираем, так же как и в предыдущем случае, таким образом, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t'} \left[ \rho' \left( \frac{p'}{\rho'(\gamma-1)} + \frac{u'^2}{2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \rho' u' \left( \frac{p'}{\rho'(\gamma-1)} + \frac{u'^2}{2} + \frac{p'}{\rho'} \right) \right] = 0.$$

В результате удалось произвести обезразмеривание системы уравнений газовой динамики, при этом, не изменив самого вида уравнений. Это позволяет, говорить об универсальности программы, составленной для расчета, так что с ее помощью становится возможным численное исследование задач различных классов.

### 3. МЕТОД КОРРЕКЦИИ ПОТОКА

Известным методом борьбы с не монотонностью численного решения является введение метода коррекции потоков. Этот метод используется как дополнительный шаг к схеме Лакса – Вендрофа. Это не приводит к снижению порядка аппроксимации. Рассмотрим более подробно основные положения и идеи предлагаемого метода монотонизации профилей решения.

Например, пусть  $f_i^T$  – любая из сеточных функций, вычисленная для нового  $n + 1$  момента времени. В полученное решение вводится некоторая численная диффузия, с постоянным регулируемым коэффициентом  $Q$ :

$$f_i^{TD} = f_i^T + Q(f_{i+1}^T - 2f_i^T + f_{i-1}^T).$$

Введение диффузии может привести к появлению новых, по сравнению с  $f_i^T$ , экстремумов или усилению уже имеющихся. Поэтому с помощью внедрения в расчет антидиффузионных потоков уменьшают степень вводимой диффузии. Антидиффузионные потоки вычисляются по формуле:

$$\Phi_{i+1/2} = Q(f_{i+1}^T - f_i^T).$$

Их ограничивают следующим образом:

$$\Phi_{i+1/2}^0 = s \max \left\{ 0, \min \left[ s \Delta_{i-1/2}, |\Phi_{i+1/2}|, s \Delta_{i+1/2} \right] \right\},$$

где  $s = \text{sign} \Phi_{i+1/2}$ ,  $\Delta_{i+1/2} = f_{i+1}^{TD} + f_i^{TD}$ .

В качестве коэффициента, регулирующего степень вводимой антидиффузии, примем коэффициент  $\alpha$ . Тогда в качестве окончательного решения на  $n + 1$  слое по времени применяется

$$f_i^{n+1} = f_i^{TD} - \alpha (\Phi_{i+1/2}^0 - \Phi_{i-1/2}^0).$$

Описанная процедура, сглаживания осуществляется последовательно: по каждой из переменных и по каждой координате.

Степень вводимой монотонизации функции регулируется двумя параметрами  $Q$  – коэффициент диф-

фузии и  $\alpha$  – коэффициент антидиффузии. Это позволяет существенно расширить класс решаемых задач с помощью методов Лакса–Вендрофа с использованием метода коррекции потоков. Использование этого метода позволяют получить монотонные профили решения, которые существенно отличаются от сильно осциллирующих результатов полученных с помощью первоначальной конечно-разностной схемы Лакса–Вендрофа.

Для решения сложных газодинамических задач, необходимо будет подобрать соответствующие параметры предложенного метода, которые можно получить при решении простых одномерных газодинамических задач, имеющих точное решение. Затем, изменяя эти незначительно эти параметры, можно получить точное монотонное решение более сложных газодинамических задач.

### 3. РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

#### 3.1. Движение ударной волны в неподвижной газовой среде

Рассмотрим задачу о движении ударной волны в невозмущенной газовой среде. Пусть ударная волна движется с постоянной скоростью  $D$  по газу с известными параметрами  $p_0, \rho_0, u_0$  – «фону», который простирается в положительном направлении оси от  $s$  до  $+\infty$ . Естественно будем считать этот газ покоящимся:  $u_0 = 0$ . Пусть также состояние газа, возникающее за фронтом ударной волны простирается по  $s$  до  $-\infty$ . Будем считать, что на краях расчетной зоны газодинамические параметры установились. Для того, чтобы по «фону» распространялась ударная волна необходимо, чтобы скорость  $D$ , распространения ударной волны была больше скорости распространения малых возмущений в этом газе. Таким образом, должно выполняться неравенство  $D > c_0$ , где  $c_0$  – скорость звука в невозмущенной газовой среде. Параметры потока перед фронтом ударной волны будем обозначать индексом «0», а за фронтом индексом «1». Тогда, следуя соотношениям Гюгоню, можно получить параметры потока за фронтом ударной волны.

$$\eta_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \eta_0 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0 \eta_0^2}{D^2}, \quad \rho_1 = \frac{1}{\eta_1},$$

$$p_1 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{D^2}{\eta_0} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_0,$$

$$u_1 = \frac{2}{\gamma+1} D - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0 \eta_0}{D}, \quad T_1 = \frac{p_1}{\rho_1 R}.$$

Таким образом, мы однозначно определим параметры вдуваемого потока.

Решение численной задачи начнем с построения сетки. Будем решать задачи на сетке равномерной по пространству с количеством точек  $j = 400$ . В качестве условия устойчивости конечно-разностной схемы используем «гиперболический» критерий Куранта, который ограничивает величину временного шага  $\tau$ .

Рассмотрим результаты полученного численного решения, сравним его с точным решением поставленной задачи.

На следующем рис.2. приведено решение по схеме Лакса–Вендрофа с методом коррекции потоков. Как можно заметить при таких же параметрах расчетной

сетке мы получили более качественно решение данной задачи.

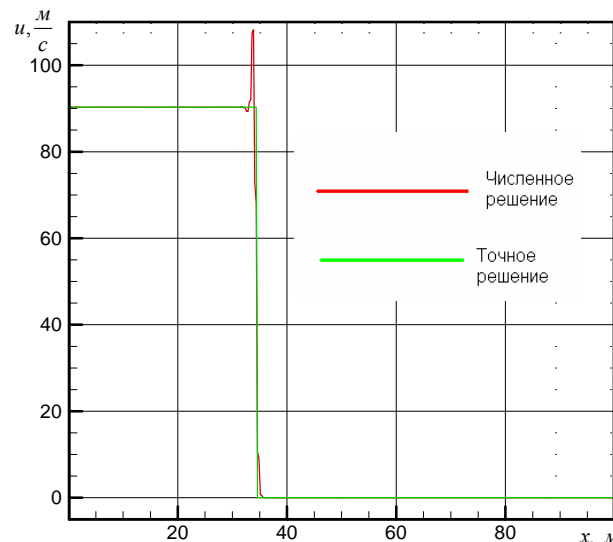


Рис. 1. Распределение скорости, полученное по схеме Лакса–Вендрофа.  $h = 0.25, \tau = 5.5 \times 10^{-4}$

Как видно из рис. 1 использование схемы Лакса–Вендрофа, без метода коррекции потоков приводит к забросу значений в области разрыва первого рода для всех газодинамических параметров, что недопустимо при решении сложных задач газовой динамики.

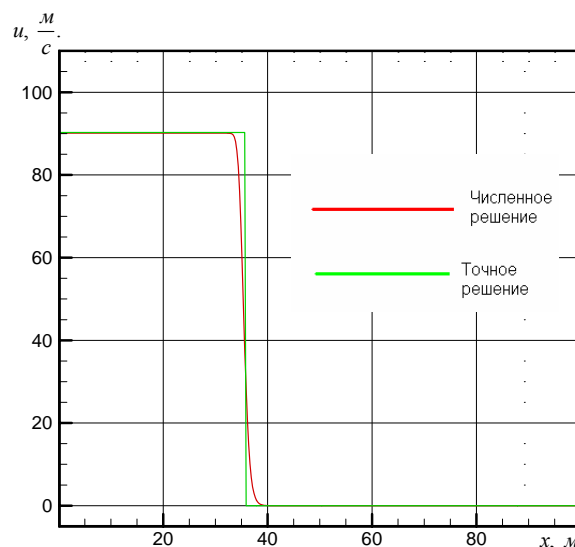


Рис. 2. Распределение скорости, полученное по схеме Лакса–Вендрофа с методом коррекции потоков.

$$h = 0.25, \tau = 5 \times 10^{-4}, Q = 0.6, \alpha = 0.2$$

#### 3.2. Отражение ударной волны от твердой преграды

Следующая решаемая в данной работе задача – задача об отражении ударной волны от твердой преграды. Актуальность апробации предложенной конечно разностной схемы на данной задаче, обусловлена несколько иной природой данного физического явления. В этой задаче отраженная ударная волна распространяется уже по газу, имеющему скорость и параметры спутного за ударной волной газового потока.

Найдем точное решение данной задачи, используя основные соотношения газовой динамики. Обозначим индексом «2», параметры газа позади отраженной

ударной волны. Тогда соотношение давлений перед и за отраженной ударной волной будет иметь вид:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(3\gamma - 1)p_1 - (\gamma - 1)p_0}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_0}$$

Далее воспользуемся уравнением ударной адиабаты:

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}{(\gamma - 1)p_1 + (\gamma + 1)p_2}$$

Далее, используя соотношения Гюгонио, приведенные выше, получим все интересующие нас газодинамические параметры.

Здесь приведем полученное численное решение только с использованием схемы Лакса-Вендрофа с модифицированным методом коррекции потока.

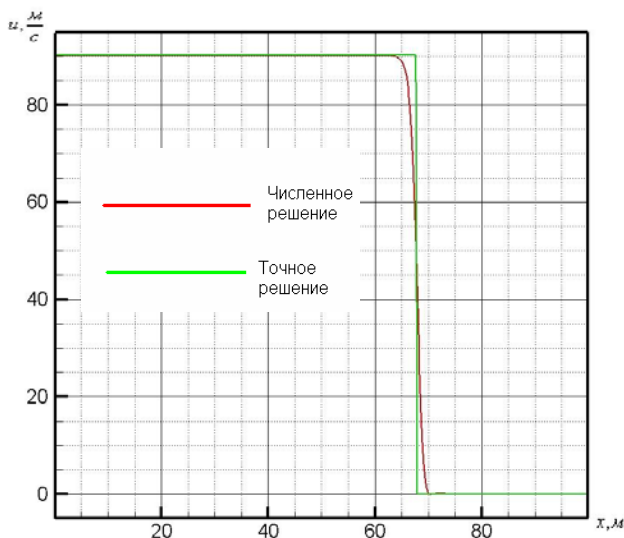


Рис. 3. Распределение скорости, полученное по схеме Лакса-Вендрофа с методом коррекции потоков.  $h = 0.25$ ,  $\tau = 5 \times 10^{-4}$ ,  $Q = 0.6$ ,  $\alpha = 0.2$

Как видно на рис.3. полученное решение является качественным и монотонным. Что говорит о применимости этого метода к решению задач такого типа. При этом, не изменяя параметры, регулирующие качество полученного решения, такие как параметры расчетной сетки, шаг по пространству  $h$  и шаг по времени  $\tau$ , параметры модифицированного метода коррекции потоков коэффициент диффузии  $Q$  и антидиффузии  $\alpha$ .

### 3.3. Частный случай задачи Римана – задача Сода

В этой части работы мы рассмотрим результаты решения с помощью предложенной методики частного случая задачи Римана – задачи Сода. В этой задаче присутствуют все известные газодинамические структуры: ударная волна, волна разряжения и контактный разрыв. Совокупность этих явлений накладывает определенные сложности на точное решение нелинейных уравнений газовой динамики. Для численного метода решения эта задача является хорошим тестом позволяющим апробировать, предложенную схему решения.

Точное решение задачи Сода связано решением нелинейных газодинамических зависимостей, в связи с чем в данной работе они не приводятся. Результаты показанного точного решения были взяты из литературы.

Для численного решения в данной задаче использовалась та же расчетная сетка, как и в двух предыдущих примерах. Для удобства предоставления результатов в графическом виде газодинамические параметры решаемой системы представлены в безразмерном виде. Масштабы обезразмеривания такие же, как и в пункте 2.2.

Приведем результаты полученного решения:

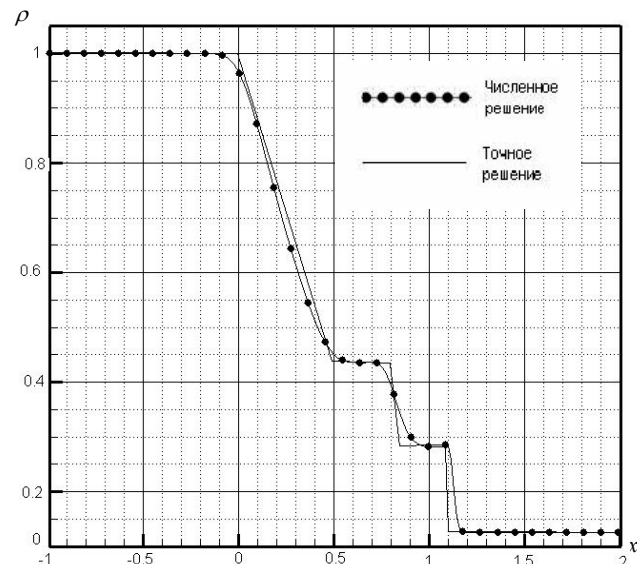


Рис.4. Распределение плотности, полученное по схеме Лакса-Вендрофа с методом коррекции потоков.  $h = 0.25$

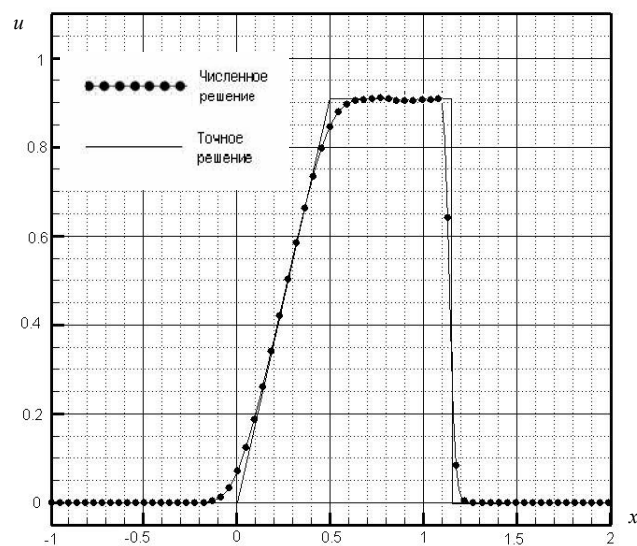


Рис. 5. Распределение скорости, полученное по схеме Лакса-Вендрофа с методом коррекции потоков.  $h = 0.25$

Как видно из приведенных результатов, полученное решение носит монотонный характер. Причем не изменились параметры расчетной сетки, однако, для снижения погрешности численного решения параметры методы коррекции потоков были изменены. Изменение этих параметров привело к хорошему совпадению результатов численного и точного решения. Важно отметить, тот факт, что наибольшая ошибка численного решения наблюдается в области контактного разрыва.

Из приведенных выше результатов расчетов следует возможность использования двухшаговой конечно-

разностной схемы Лакса–Вендрофа с модифицированным методом коррекции потоков для решения сложных задач газовой динамики.

#### 4. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 07-01-00133 и программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (в части разработки программ для параллельных вычислений).

#### СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$p$  – давление в газовой среде, Па

$\rho$  – плотность газовой среды, кг/м<sup>3</sup>

$u$  – скорость газового потока, м/с

$h$  – шаг по пространству, м

$\tau$  – шаг по времени, с

$D$  – скорость распространения ударной волны, м/с

Индексы:

$i$  — порядковый номер значения функции в узле расчетной сетки;

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1976.
2. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1973.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1976
4. Boris J. P., Book D. L., Flux corrected transport. – J. Comput. Phys., 1976.