

Influence of Density Perturbations on Stability of Accelerated Contact Boundary

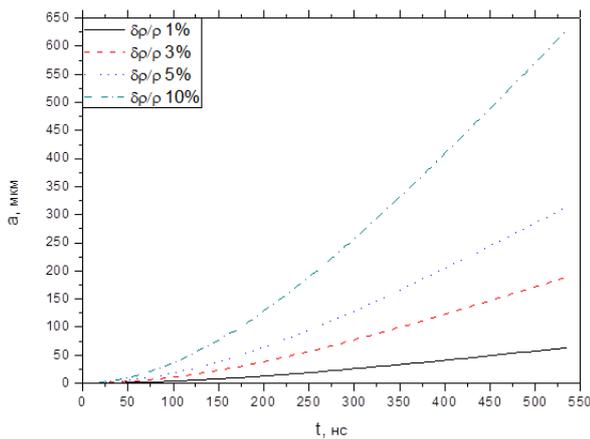
K.E. Gorodnichev, S.E. Kuratov

FSUE All-Russia Research Institute of Automatics, Moscow, 127055, Russia
cyrgo85@gmail.com

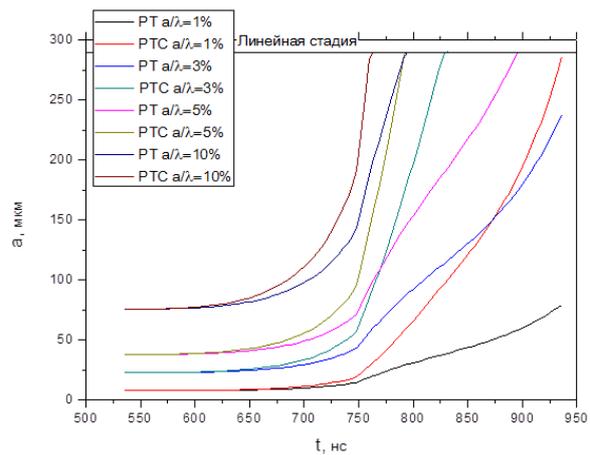
Abstract

In this work instability of inner spherical shell boundary is considered. The shell has initial density perturbations. The analysis of hydrodynamic instabilities is carried out in two-dimensional plane case. In an examined problem unlike classic RTI contact boundary is plane. It is shown that in this case boundary instability grows independently of acceleration direction. The results are used for analysis of spherical shell with density perturbations collapsing.

Keywords: hydrodynamic instability, RTI, Laplace transform, contact boundary instability.



Contact boundary perturbation amplitude at an acceleration stage vs time



Contact boundary perturbation RTI amplitude vs time. Compressed (CRT) and incompressible (RT) cases

Frequency of the perturbations caused by initial density inhomogeneities (compressed case):

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(k_z^2 + k_x^2)c^2 + ik_z \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \pm \sqrt{\left(ik_z \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + (k_z^2 + k_x^2)c^2 \right)^2 - 4c^2 N^2 k_x^2}}{2}$$

УДК 534.222.2

Влияние возмущения плотности на устойчивость контактной границы при наличии ускорения

К.Е. Городничев, С.Е. Куратов

*ФГУП Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Автоматики им. Н.Л. Духова, Россия, Москва, 127055, ул. Суцневская, 22
cyrgo85@gmail.com*

Аннотация

В работе анализируется неустойчивость границы ускоренно движущейся среды, содержащей начальное возмущение плотности. Проведен анализ развития гидродинамической неустойчивости в двумерной плоской постановке. В рассматриваемой задаче в отличие от случая классической неустойчивости Рэлея – Тейлора начальные возмущения задаются не искривлением контактной границы, а неоднородностью плотности среды. Показано, что в этом случае возмущения границы растут независимо от направления ускорения. Полученные результаты используются при анализе задачи о схождении сферической оболочки, в которой задано начальное возмущение плотности, к центру.

Ключевые слова: гидродинамическая неустойчивость, неустойчивость Рэлея – Тейлора, преобразование Лапласа, неустойчивость границы раздела

1. Введение

В работе рассматриваются две задачи о росте возмущения границы среды: исследование неустойчивости свободной поверхности ускоренно движущейся среды, обладающей начальным возмущением плотности, и неустойчивость контактной границы двух сред, одна из которых обладает возмущением плотности, при наличии ускорения. Данная ситуация реализуется, например, при схождении неоднородной сферической оболочки, заполненной газом, к центру. Рассматриваемая задача имеет отношение к проблеме инерциального термоядерного синтеза (ИТС), в котором происходит обжатие мишени, наполненной газом, с помощью энергии лазера, тяжелых ионов и т.п. В данном процессе на первой стадии происходит ускорение оболочки, после, на второй стадии, она тормозится о сжатый газ. В данном исследовании рассмотрен вопрос об устойчивости границы как на стадии разгона, так и на стадии торможения.

Часто в системах ИТС первичный разгон внутренней оболочки осуществляется за счет прохождения по ней УВ. Как показано в работе [1] за фронтом УВ могут присутствовать возмущения, обусловленные присутствием неоднородностей на более ранних стадиях. После падения этой УВ на границу среды, происходит распад разрыва и от границы в оболочку будет распространяться волна разгрузки, а в газ – УВ. Следовательно, возмущения плотности в оболочке и газе, получаемые в результате всех этих процессов являются начальными в рассматриваемой нами задаче.

Исследования устойчивости границы среды, движущейся с ускорением, широко представлены в литературе. Чаще всего данная задача рассматривается с целью изучения неустойчивости Рэлея – Тейлора [2], [3], гравитационных поверхностных волн [4] и т.п. В качестве начальной неоднородности рассматривается возмущение границы раздела сред и далее исследуется ее эволюция. В данной работе вместо начального возмущения границы задается начальное возмущение плотности.

Рассматриваются начальные значения давления достаточные для того, чтобы можно было ограничиться рассмотрением гидродинамического приближения и не учитывать упруго-пластические свойства вещества. Наличием поверхностного натяжения также пренебрегаем.

В результате анализа были получены аналитические зависимости роста амплитуды от времени для случая двумерной плоской постановки с использованием линейного приближения.

Для проведения количественных оценок была рассмотрена задача о схождении железной оболочки, заполненной полиэтиленом, к центру. Такое наполнение было выбрано для возможности использования уравнения состояния (УРС) Ми – Грюнайзена, которое более адекватно описывает поведение системы в рассматриваемом случае, чем УРС идеального газа.

Экстраполяция теоретических результатов для плоской двумерной постановки на сферический случай осуществляется путем разбиения задачи о схождении оболочки на малые временные интервалы, в каждом из которых значения гидродинамических величин считались постоянными. Для каждого интервала задача решалась в плоской двумерной постановке.

Неустойчивость Рэлея – Тэйлора (РТН) проявляется на границе сред с различной плотностью, имеющей начальное искривление. При этом среда с большим значением плотности должна иметь ускорение, направленное в сторону вещества с ее меньшим значением. Разделяют три стадии роста возмущений: линейную, нелинейную и турбулентное перемешивание. Для каждой них существуют аналитические оценки роста амплитуды возмущений от времени (см. например, [5], [6], [7]).

Отметим, что данные оценки получены при предположении о несжимаемости рассматриваемых веществ. В работах [8], [9], [10], [11] приведены поправки к инкременту роста, связанные с наличием сжимаемости, при получении которых используется ряд предположений, накладывающих ограничения на свойства рассматриваемых веществ (например, делается утверждение об одинаковости скорости звука). Основные сложности при учете сжимаемости возникают при выводе зависимостей значений гидродинамических величин от расстояния от границы. В данной работе при рассмотрении РТН для сжимаемых сред распределение плотности, а, соответственно, и распределение всех гидродинамических величин, определялось из одномерных численных расчетов.

В итоге, показано, что наличие начального возмущения плотности приводит к росту возмущения границы независимо от направления ускорения.

2. Неустойчивость свободной поверхности ускоренно движущейся среды, обладающей начальным возмущением плотности

Рассмотрим полупространство, занятое сжимаемой средой, содержащей возмущения плотности, находящейся в поле силы «тяжести». Введем систему координат таким образом, что ось z направлена перпендикулярно поверхности раздела по направлению внешней нормали, ось x – параллельна поверхности раздела. Из-за наличия силы тяжести и сжимаемости будет присутствовать стратификация и, следовательно, начальное распределение плотности будет зависеть от z – $\rho(z)$. Схематично начальная постановка задачи приведена на рис. 1.

На данную систему при $t = 0$ наложено возмущение

$$\rho' = \rho_1 e^{ik_x x} \cos(k_z z) \exp\left\{-\frac{g}{c^2} z\right\}, \quad (1)$$

где $\rho_1 = a\rho$ – амплитуда начального возмущения плотности. Наличие экспоненты в (1), обусловлено видом начального распределения невозмущенного значения плотности (5).

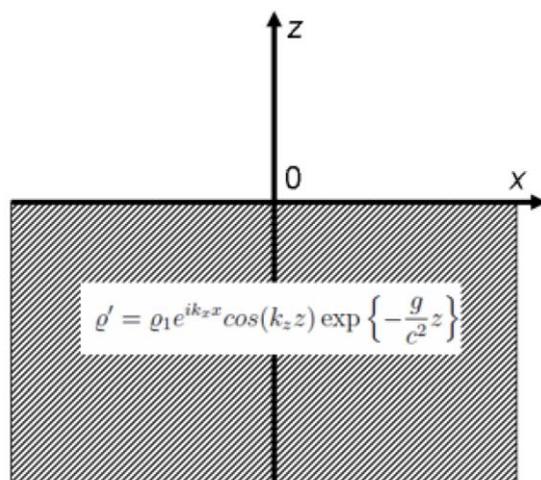


Рис. 1. Начальная геометрия задачи

Необходимо определить дальнейшее поведение данной системы. Для начала рассмотрим систему гидродинамических уравнений, учитывающую наличие силы «тяжести»

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) &= 0 \\ \rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla) v \right\} &= -\nabla P - \rho g \\ \frac{\partial P}{\partial t} + (v \nabla) P &= c^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (v \nabla) \rho \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Для большей наглядности вычислений будем использовать линейное уравнение состояния (УРС)

$$P = c_0^2 (\rho - \rho_0), \quad (3)$$

где ρ_0 – плотность несжатого вещества, c_0 – скорость звука.

Скорость звука $c = (\partial P / \partial \rho)_S$, с учетом (3) получим, что c в условиях данной задачи константа, поэтому индекс «0» при c можно в дальнейшем опустить.

Обозначим компоненты скорости $v_x \equiv u$, $v_z \equiv w$, тогда с учетом возмущения можно записать $\rho = \rho + \delta\rho$, $P = P + \delta P$. Из второго уравнения системы (2) получим, что при $t = 0$

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (4)$$

Воспользуемся УРС (3) для связи давления и плотности, тогда из уравнения (4) следует

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{g}{c^2} z\right) \quad (5)$$

Здесь использовано предположение, что на границе раздела давление равно нулю, следовательно плотность равна ρ_0 .

В первом порядке теории возмущений уравнения (2) запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + w \frac{d\rho}{dz} = 0,$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial z} + \delta \rho g &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \delta P}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= 0\end{aligned}\quad (6)$$

Первое граничное условие следует из постоянства давления на границе раздела сред $\left[\frac{\partial}{\partial t} + (v \nabla) \right] (P + \delta P) = 0$, следовательно

$$\left(\frac{\partial \delta P}{\partial t} - \rho g w \right)_{z=0} = 0 \quad (7)$$

Второе условие следует из ограниченности решения при $z \rightarrow -\infty$. Для решения поставленной задачи воспользуемся преобразованием Лапласа L по времени [12]:

$$\begin{aligned}F(s) = L\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \\ f(t) = L^{-1}\{F(s)\} &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - iY}^{\alpha + iY} e^{ts} F(s) ds,\end{aligned}$$

где α – абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа $L\{f(t)\}$.

Учтем, что $L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(+0)$, где $F(s)$ – изображение функции $f(t)$. Применим это преобразование системе уравнений (6)

$$\begin{aligned}s\delta\hat{\rho} - \rho(+0) + \rho\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial z} + ik_x\hat{u}\right) + \hat{w}\frac{d\rho}{dz} &= 0, \\ \rho s\hat{w} + \frac{\partial\delta\hat{P}}{\partial z} + \delta\hat{\rho}g &= 0, \\ \rho s\hat{u} + ik_x\delta\hat{P} &= 0, \\ \delta\hat{P} - c^2\delta\hat{\rho} &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

где $\delta\hat{P}$, $\delta\hat{\rho}$, \hat{w} , \hat{u} – Лаплас-образы давления, плотности, скорости, соответственно. Здесь также учтено, что зависимость величин от координаты x представима в виде $e^{ik_x x}$, поэтому из (1) получаем, что

$$\rho(+0) = \rho_1 \cos(k_z z) \exp\left\{-\frac{g}{c^2} z\right\} \quad (9)$$

В итоге, данная система уравнений сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, например, относительно $\hat{\rho}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{\rho}}{\partial z^2} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} - \left(\frac{s^2}{c^2} + k_x^2 \right) \hat{\rho} + \frac{s}{c^2} \rho_1 \cos(k_z z) \exp\left\{-\frac{g}{c^2} z\right\} = 0 \quad (10)$$

Граничное условие (7) переходит в

$$c^2 [s\delta\hat{\rho} - \rho(+0)] - \rho g \hat{w} = 0 \quad (11)$$

Общее решение уравнения (10) выглядит следующим образом:

$$\delta\hat{\rho} = (C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z}) \exp\left\{-\frac{g}{2c^2} z\right\} + s\rho_1 \frac{\left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)c^2 + s^2\right] \cos(k_z z) + \sin(k_z z) k_z g}{\left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)c^2 + s^2\right]^2 + g^2 k_z^2} \exp\left\{-\frac{g}{c^2} z\right\}, \quad (12)$$

где $\kappa = \frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4c^4 k_x^2}$, а C_1 и C_2 – константы.

Для поиска констант воспользуемся граничным (11) и начальным (9) условиями. Рассмотрим начальное условие. Воспользуемся теоремой, связывающей Лаплас-образ и оригинал в начальный момент времени [12]

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (13)$$

Соответственно, из (9), (12) и (13) получим, что $C_2 = 0$. Константу C_1 будем искать из условия (9) и второго уравнения в системе (6). В итоге получим

$$C_1 = \frac{2s\rho_1 c^4 \left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 c^2 + s^2 \left(k_x^2 + k_z^2\right) \right]}{\left[\left(\left(k_x^2 + k_z^2\right)c^2 + s^2 \right)^2 + k_z^2 g^2 \right] \left[g^2 + 2c^2 s^2 + g\sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} \right]} \quad (14)$$

Рассмотрим выражение для z -компоненты скорости колебаний с использованием второго уравнения в системе (6). Общее решение выглядит следующим образом:

$$\hat{w}(z, s) = \hat{w}_{\text{оо}}(z, s) + \hat{w}_{\text{чн}}(z, s) \quad (15)$$

Общее однородное решение $\hat{w}_{\text{оо}}$

$$\hat{w}_{\text{оо}}(z, s) = -\frac{c^4 \rho_1}{\rho_0} e^{st} \exp\left\{\frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} z\right\} \exp\left\{-\frac{gz}{2c^2}\right\} \times \frac{\left[c^2 \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 + s^2 \left(k_x^2 + k_z^2\right) \right] \left(\sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} + g \right)}{\left(g^2 + 2c^2 s^2 + g\sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} \right) \left[s^2 + c^2 \left(k_x^2 + k_z^2\right)^2 + k_z^2 g \right]} \quad (16)$$

Частное неоднородное решение $\hat{w}_{\text{чн}}(z, s)$

$$\hat{w}_{\text{чн}}(z, s) = -\frac{\rho_1 k_z c^2 k_z g \cos(k_z z) - \left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)c^2 + s^2 \right] \sin(k_z z)}{\rho_0 \left[\left(k_x^2 + k_z^2\right)c^2 + s^2 \right]^2 + g^2 k_z^2} \exp\left\{-\frac{gz}{c^2}\right\}$$

Для оригинала можно записать

$$w(x, z, t) = L^{-1} \{ \hat{w}(x, z, s) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st} \hat{w}(x, z, s) ds$$

Оригинал общего однородного решения

$$w_{\infty}(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} ds \left\{ \frac{\rho_1 c^4 (k_x^2 + k_z^2)^2 c^2 + s^2 (k_x^2 + k_z^2)}{\rho_0 \left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right]^2 + k_z^2 g^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(g + \sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} \right) e^{st} e^{Kz}}{g^2 + 2c^2 s^2 + g \sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4}} \exp \left\{ -\frac{g}{2c^2} z \right\} e^{ik_x x} \right\} \quad (17)$$

Оригинал частного неоднородного решения:

$$\hat{w}_{\text{чн}}(z, s) = -\frac{\rho_1 k_z c^2 k_z g \cos(k_z z) - \left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right] \sin(k_z z)}{\rho_0 \left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right]^2 + g^2 k_z^2} \exp \left\{ -\frac{gz}{c^2} \right\}$$

Обозначим подынтегральную функцию в (17) за $K(x, z, s)$. Из вида функции $K(x, z, s)$ можно заключить, что она имеет и точки ветвления, и полюса. Соответствующие точки ветвления $a = i/2c\sqrt{g^2 + 4k_x^2 c^4}$, $b = -i/2c\sqrt{g^2 + 4k_x^2 c^4}$. Полюса функции находятся из условия равенства нулю знаменателя

$$\left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right]^2 + k_z^2 g^2 = 0, \\ g^2 + 2c^2 s^2 + g \sqrt{g^2 + 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} = 0$$

Соответствующие полюса:

$$s_1 = \sqrt{-c^2(k_x^2 + k_z^2) + ik_z g}, \quad s_2 = \sqrt{-c^2(k_x^2 + k_z^2) - ik_z g}, \quad s_3 = -\sqrt{-c^2(k_x^2 + k_z^2) + ik_z g}, \\ s_4 = -\sqrt{-c^2(k_x^2 + k_z^2) - ik_z g}, \quad s_5 = i\sqrt{k_x g}, \quad s_6 = -i\sqrt{k_x g}, \quad s_7 = \sqrt{k_x g}, \quad s_8 = -\sqrt{k_x g}.$$

Выделим область, в которой функция $K(x, z, s)$ аналитична. Рассмотрим контур интегрирования, приведенный на рис. 2.

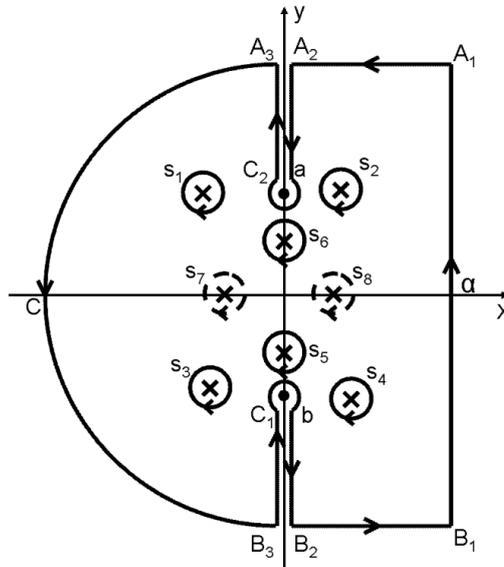


Рис. 2. Контур интегрирования

Пунктирной линией обозначены вычеты, лежащие на втором листе Римана. В представленный контур они не попадают, и на итоговый результат не влияют. Правый берег разреза соответствует аргументу $\varphi = 2\pi - \delta$, где $\delta \rightarrow 0$. Соответственно, интеграл I по этому контуру представим в виде

$$I = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} + \int_{A_1A_2} + \int_{A_2a} + \int_{C_2} + \int_{aA_3} + \int_{A_3CB_3} + \int_{B_3b} + \int_{C_1} + \int_{bB_2} + \int_{B_2B_1} = 2\pi i \sum_{k=1}^n Res_k$$

Исследуем каждый из этих интегралов в отдельности и будем считать, что $z \rightarrow 0$. При рассмотрении интеграла по контуру A_3CB_3 удобно сделать замену переменных $s = re^{i\varphi}$. Соответственно, по Лемме Жордана интеграл по A_3CB_3 стремится к нулю ($K(x, z, r, \varphi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$).

Интеграл по контурам A_1A_2 и B_1B_2 также стремится к нулю (следует из вида предэкспоненциального полинома), поэтому

$$\int_{A_1A_2} dsK(x, z, s) + \int_{B_2B_1} dsK(x, z, s) \rightarrow 0$$

При рассмотрении интегралов по контурам C_1 и C_2 аналогично сказанному выше сделаем замену $s \rightarrow re^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$, $r = |s| \rightarrow 0$. Соответственно, интегрирование по ds переходит в интегрирование по $d\varphi$ и справедливо $K(x, z, s)ds \sim sds \sim r^2 \rightarrow 0$, поэтому $\int_{C_1} dsK(x, z, s) \rightarrow 0$, $\int_{C_2} dsK(x, z, s) \rightarrow 0$.

Рассмотрим интегралы по отрезкам $[a, A_2]$, $[a, A_3]$, $[b, B_2]$ и $[b, B_3]$. На отрезке $[A_2, a]$, $[b, B_2]$ аргумент числа s равен 0, а на отрезке $[a, A_3]$, $[B_3, b]$ — $2\pi - \delta$ при $\delta \rightarrow 0$. При обходе точки a переменную интегрирования удобно представить в виде $s = a + re^{i\varphi}$, поэтому при обходе a знак перед корнем в $K(x, z, s)$ поменяется. Соответственно, на отрезках $[A_2, a]$ и $[b, B_2]$

$$K_+(x, z, s) = \left\{ \frac{2s\rho_1c^4 \left(g + \sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4} \right) \left[(k_x^2 + k_z^2)^2 c^2 + s^2 (k_x^2 + k_z^2) \right]}{\left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right]^2 + k_z^2 g^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{st} \exp \left\{ \frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4} z \right\}}{g^2 + 2c^2s^2 + g\sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4}} \exp \left\{ \frac{g}{2c^2} z \right\} e^{ik_x x} \right\},$$

на отрезках $[a, A_3]$, $[B_3, b]$

$$K_+(x, z, s) = \left\{ \frac{2s\rho_1c^4 \left(g - \sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4} \right) \left[(k_x^2 + k_z^2)^2 c^2 + s^2 (k_x^2 + k_z^2) \right]}{\left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 + s^2 \right]^2 + k_z^2 g^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{st} \exp \left\{ -\frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4} z \right\}}{g^2 + 2c^2s^2 - g\sqrt{g^2 + 4c^2s^2 + 4k_x^2c^4}} \exp \left\{ \frac{g}{2c^2} z \right\} e^{ik_x x} \right\},$$

Для удобства также можно сделать замену $s \rightarrow is$, что переводит интегрирование по области действительных чисел. В итоге мы получим:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{A_2 a} ds K_+(x, z, s) + \int_{a A_3} ds K_-(x, z, s) + \int_{B_3 b} ds K_-(x, z, s) + \int_{b B_2} ds K_+(x, z, s) = \\
 &= i \int_{\frac{1}{2c} \sqrt{g^2 + 4k_x^2 c^4}}^{\infty} ds \left[(K_+(x, z, -is) - K_-(x, z, -is)) - (K_+(x, z, is) - K_-(x, z, is)) \right] = \\
 &= 2 \frac{\rho_1 c^4}{\rho_0} \int_{\frac{1}{2c} \sqrt{g^2 + 4k_x^2 c^4}}^{\infty} ds \sin(st) \frac{(k_x^2 + k_z^2)^2 c^2 - s^2 (k_x^2 + k_z^2)}{\left[(k_x^2 + k_z^2) c^2 - s^2 \right]^2 + k_z^2 g^2} \times \\
 &\times \left\{ \frac{\exp \left\{ \frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 - 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} z \right\}}{g^2 - 2c^2 s^2 + g \sqrt{g^2 - 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4}} - \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2c^2} \sqrt{g^2 - 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4} z \right\}}{g^2 - 2c^2 s^2 - g \sqrt{g^2 - 4c^2 s^2 + 4k_x^2 c^4}} \right\} \times \exp \left\{ \frac{g}{2c^2} z \right\} e^{ik_x x}
 \end{aligned}$$

Интеграл I_1 необходимо вычислять численно. В итоге, получим следующее выражение для Лаплас оригинала z -проекции скорости $w(x, z, t)$:

$$w(x, z, t) = 2\pi i \sum_{k=1}^6 \text{Res}_k - \frac{I_1}{2\pi i} + w_{\text{чн}}(x, z, t)$$

По известной зависимости скорости легко определить величину искривления границы $d\xi(x, t)/dt = w(x, z=0, t)$. В разделе 4 приведены соответствующие численные оценки.

3. Неустойчивость контактной границы раздела двух сред при наличии ускорения

Начальная постановка задачи отличается от приведенной на рис. 1, вместо условия постоянства давления на контактной границе используется условие сшивки, которое следует из равенства давления и нормальной составляющей скорости. В общем случае давление является функцией от плотности и удельной полной внутренней энергии $P = f(\rho, \varepsilon)$. Из (4) следует, что давление P – функция от координаты z , следовательно, ρ и ε также функции от z .

Для удобства вычислений начальное возмущение плотности запишем в следующем виде:

$$\delta\rho_{t=0} = \alpha\rho \exp(ik_z z + ik_x x), \quad (19)$$

где α – константа, ρ – невозмущенное значение плотности. В отличие от предыдущего случая действительная часть в (19) изначально не выделялась. Линеаризованные уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0, \\
 \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial z} + \delta\rho g &= 0, \\
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \delta P}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial t} + w \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\delta P - \frac{\partial f}{\partial \rho} \delta \rho - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon = 0 \quad (20)$$

Из первых трех уравнений системы (20) следует

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \delta P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \delta P}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \delta \rho}{\partial z} g = 0 \quad (21)$$

Учитывая, что для скорости звука справедливо выражение [13]

$$c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon}}$$

Из четвертого и пятого уравнений в (20) следует

$$\frac{\partial^2 \delta P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - \frac{c^2}{g} \left(\frac{\partial \delta P}{\partial z} + \delta \rho g \right) N^2 = 0, \quad (22)$$

где
$$N^2 = -g \left(\frac{g}{c^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)$$

– частота Брента–Вяйсяля, являющаяся основной характеристикой внутренних гравитационных волн [14].

Основываясь на начальном распределении плотности (19), будем искать решение в виде пропорциональном $\exp\{ik_z z + ik_x x - i\omega t\}$, тогда из (21) следует

$$\delta P = \frac{ik_z g + \omega^2}{k_z^2 + k_x^2} \delta \rho \quad (23)$$

Используя (22) и (23), получим

$$\omega^4 - \left[ik_z \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + (k_z^2 + k_x^2) c^2 \right] \omega^2 + c^2 N^2 k_x^2 = 0 \quad (24)$$

Данное уравнение имеет решение

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(k_z^2 + k_x^2) c^2 + ik_z \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \pm \sqrt{\left(ik_z \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + (k_z^2 + k_x^2) c^2 \right)^2 - 4c^2 N^2 k_x^2}}{2} \quad (25)$$

Для возмущения скорости можно записать:

$$\delta \rho = C_1 \exp\{ik_z z + ik_x x - i\omega_{1,2} t\} + C_2 \exp\{ik_z z + ik_x x + i\omega_{1,2} t\}.$$

Используя начальное условие (19), получим, что

$$\delta \rho = \alpha \rho \exp\{ik_z z + ik_x x\} \cos \omega t \quad (26)$$

Из второго уравнения системы (20) с использованием (23) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{ik_z \omega^2 + k_x^2 g}{k_z^2 + k_x^2} \frac{\delta \rho}{\rho}$$

Подставляя $\delta\rho$ в виде (26) и проводя интегрирование, найдем выражение для возмущения скорости по оси z :

$$u = -\alpha \frac{ik_z \omega^2 + gk_x^2}{\omega(k_z^2 + k_x^2)} \exp\{ik_z z + ik_x x\} \sin \omega t \quad (27)$$

Константа интегрирования взята равной нулю, т.к. в начальный момент времени возмущение скорости отсутствует.

Из выражения (25) для частоты возмущений при подстановке $g = 0$ одно из решений будет соответствовать дисперсионному соотношению для звуковой волны, а второе $\omega = 0$ – энтропийно-вихревой в среде с нулевой массовой скоростью.

Отметим, что нас интересует возмущение границы раздела, поэтому все величины, найденные выше, необходимо рассматривать при $z = 0$. Следовательно, нам необходимо знать значение производной $(\partial\rho/\partial z)|_{z=0}$, которое можно определить из решения (4) или из численного расчета.

Из (25) следует, что в выражении для частоты возмущений независимо от знака проекции ускорения будет присутствовать мнимое слагаемое.

РТН с учетом сжимаемости

Аналитическое рассмотрение задачи о РТН обычно разбивают на три этапа: линейный, нелинейный и стадия турбулентного перемешивания (см., например, [6], [7]). В данной работе приведены оценки для линейной стадии.

Используя выводы, полученные в предыдущем разделе, можно рассмотреть задачу о РТН с учетом сжимаемости. Величины, соответствующие «тяжелому» веществу будем обозначать индексом «т», легкому – «л». Из условия сшивки давления и скорости на границе раздела получим

$$i \left(k_{zm} - \frac{\rho_m}{\rho_l} k_{zl} \right) \omega^4 + g \left(k_x^2 - k_{zm} k_{zl} \right) \omega^2 + i g^2 k_y^2 \left(k_{zl} - \frac{\rho_m}{\rho_l} k_{zm} \right) = 0 \quad (28)$$

Здесь учтено, что фазы возмущений с обеих сторон разрыва должны быть равны, следовательно, $\omega_l = \omega_m$. Для обеих сред также можно записать дисперсионное соотношение, аналогичное (24)

$$\omega^4 - \left[ik_{zm} \frac{c_m^2}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial z} + (k_{zm}^2 + k_x^2) c_m^2 \right] \omega^2 + c_m^2 N_m^2 k_x^2 = 0, \quad (29)$$

$$\omega^4 - \left[ik_{zl} \frac{c_l^2}{\rho_l} \frac{\partial \rho_l}{\partial z} + (k_{zl}^2 + k_x^2) c_l^2 \right] \omega^2 + c_l^2 N_l^2 k_x^2 = 0 \quad (30)$$

Уравнения (28)–(30) образуют систему, из решения которой определяются значения волновых векторов и частоты возмущений в «легкой» и «тяжелой» средах.

Отметим, что в несжимаемом случае для оценки величины амплитуды возмущения, вызванного РТН, справедлива формула [5]

$$\eta = \eta_0 ch(nt), \quad n = \sqrt{gk_x A}, \quad (31)$$

где η_0 – начальная амплитуда возмущений, A – число Атвуда. Оценки линейной стадии применимы вплоть до значений амплитуд порядка $0.4 \lambda_x$.

4. Сжатие сферической оболочки

При описании свойств веществ будем использовать УРС Ми – Грюнайзена [15]

$$P = \frac{\rho_0 c_0^2}{n} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] + \Gamma \rho \zeta, \quad (32)$$

где ρ_0 – плотность несжатого холодного вещества, c_0 – скорость звука несжатого холодного вещества, ζ – удельная тепловая энергия.

Рассмотрим задачу о сжатии железной сферической оболочки к центру, обладающей начальным возмущением плотности. В качестве наполнения оболочки был рассмотрен полиэтилен, для которого у нас имеются константы для УРС Ми – Грюнайзена. Используя обозначения данной работы, ось сонаправленную с радиус-вектором обозначим z , сонаправленную с касательной к поверхности – x . Внутри оболочки располагается малоплотное вещество, например, полиэтилен. Оболочка имеет начальную радиальную скорость, направленную к центру и по величине равную 5 км/с. Начальная амплитуда возмущений плотности α – 1%, длину волны, соответствующая проекции волнового вектора на ось x , возьмем равной 1 мм, на ось z – 2 мм. Константы для УРС брались из [16]: $c_{\text{OFe}} = 3.837$ км/с, $\rho_{\text{OFe}} = 7855$ кг/м³, $n_{\text{Fe}} = 4.3$, $\Gamma_{\text{Fe}} = 1.6$; $c_{\text{Ope}} = 3$ км/с, $\rho_{\text{Ope}} = 920$ кг/м³, $n_{\text{pe}} = 4.6$, $\Gamma_{\text{pe}} = 1$.

Разделим процесс сжатия на малые промежутки времени, для каждого из которых задачу будем рассматривать в плоском приближении с значениями гидродинамических величин (давление, плотность и т.п.), соответствующих сферическому случаю. Будем также учитывать изменение величин проекции волнового вектора, связанное с уменьшением внутренней поверхности оболочки и ее одновременным растяжением. Отметим, что в процессе движения амплитуда возмущения плотности и ее невозмущенное значение меняются, следовательно, величина α также может претерпевать изменения. Разгон длится до момента времени 0.536 мкс, торможение до 0.936 мкс.

Приведем оценки роста амплитуды, полученные с использованием зависимостей для гравитационных волн с учетом сжимаемости (рис. 3). При этом будем пользоваться средними значениями величин проекций волнового вектора, скорости звука, ускорения, амплитуды возмущения, получаемых при рассмотрении сжатия оболочки.

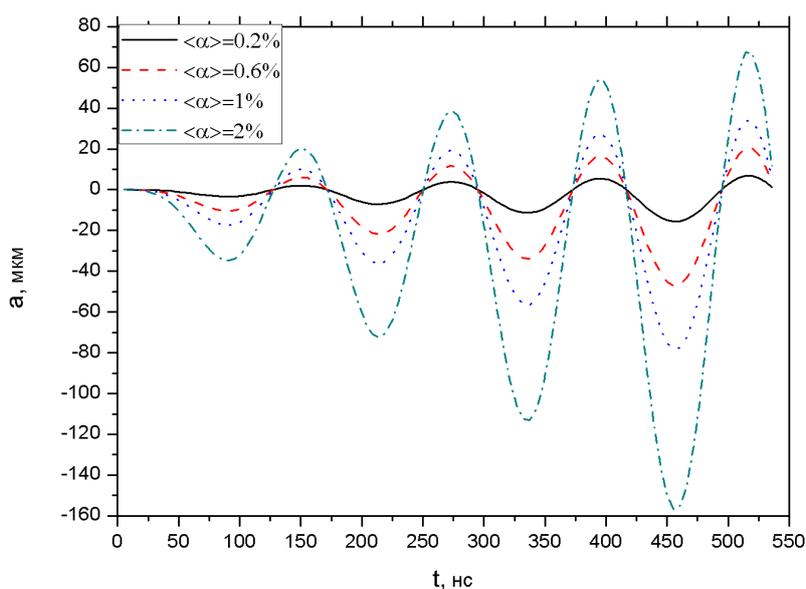


Рис. 3. Зависимость амплитуды возмущения границы раздела от времени на стадии разгона при рассмотрении случая постоянства давления на границе

Соответствующие величины равны $\langle k_x \rangle = 3.1 \text{ мм}^{-1}$, $\langle k_y \rangle = 7.2 \text{ мм}^{-1}$, $\langle g \rangle = 1.5 \times 10^9 \text{ м/с}^2$, $\langle c \rangle = 6.6 \text{ км/с}$. При значении начальной амплитуды возмущения плотности $\delta\rho/\rho = 1\%$ ее среднее значение за время ускорения $\langle \alpha \rangle = 0.002$, при $\delta\rho/\rho = 3\%$ – $\langle \alpha \rangle = 0.006$, при $\delta\rho/\rho = 5\%$ – $\langle \alpha \rangle = 0.01$, при $\delta\rho/\rho = 10\%$ – $\langle \alpha \rangle = 0.02$. За время разгона амплитуда возмущения соответственно вырастет до значений 16 мкм, 47 мкм, 78 мкм, 157 мкм. Отметим, что максимальная амплитуда возмущения прямо пропорциональна значению начального возмущения.

Далее приведем результаты, соответствующие рассмотрению задачи без использования граничного условия постоянства давления на границе. В этом случае на стадии разгона амплитуда вырастает до 64 мкм, при торможении доходит до 130 мкм. Данные оценки связаны только с учетом наличия возмущения плотности. На рис. 4 и 5 приведены графики зависимости мнимой части частоты возмущений от длины волны, соответствующей x -проекции волнового вектора начального возмущения, для случая рассмотрения процессов разгона и торможения оболочки. Из рисунков видно, что уменьшение длины волны приводит к увеличению значения $\text{Im}(\omega)$ и, соответственно, к увеличению роста возмущений. На рис. 6 и 7 приведены графики зависимости амплитуды от времени на стадии разгона и торможения для различных уровней начального возмущения.

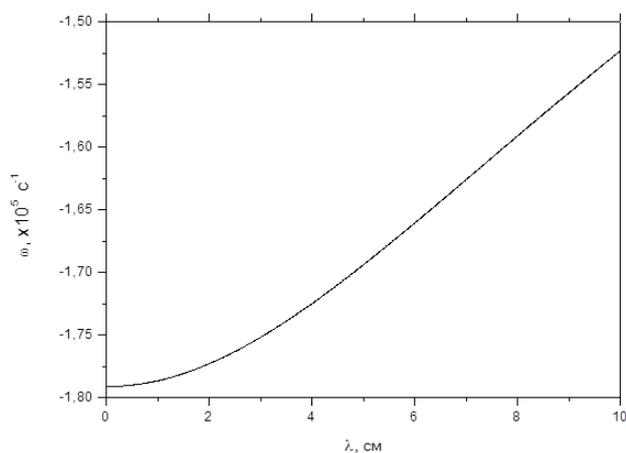


Рис. 4. Зависимость мнимой части частоты возмущения границы на стадии разгона от длины волны начального возмущения плотности

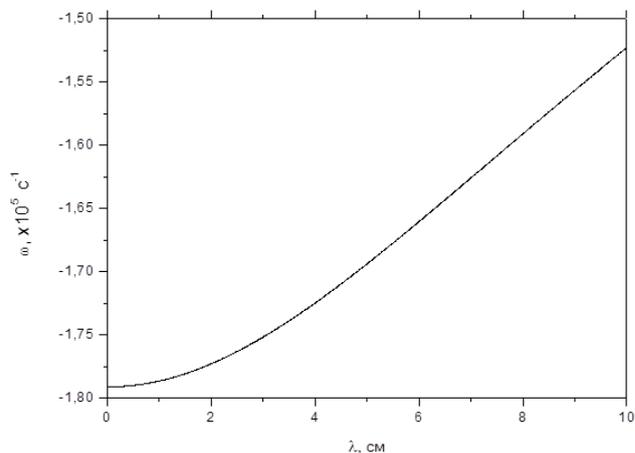


Рис. 5. Зависимость мнимой части частоты возмущения границы на стадии торможения от длины волны начального возмущения плотности

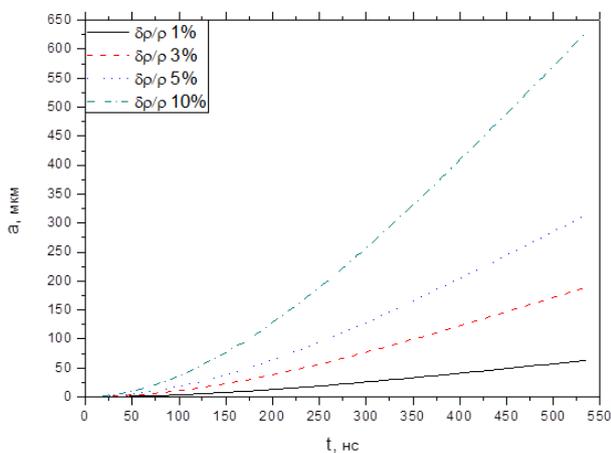


Рис. 6. Зависимость амплитуды возмущения от времени на стадии разгона

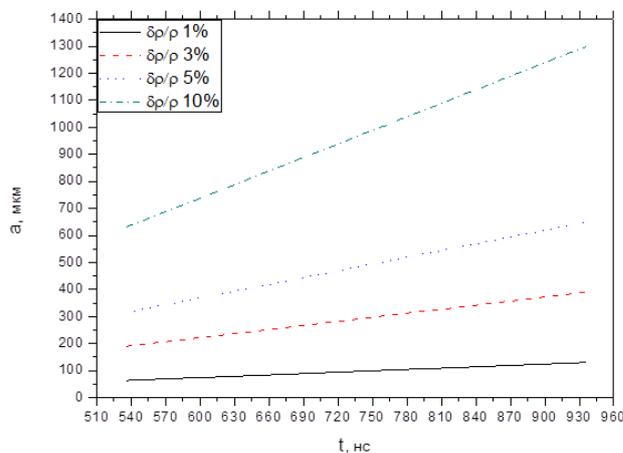


Рис. 7. Зависимость амплитуды возмущения от времени на стадии торможения

Получаемые значения амплитуды превосходят, получаемые в случае постоянства давления на границе. Далее рассмотрим развитие РТН на стадии торможения.

За время торможения РТН развивается вплоть до нелинейной стадии. В данной работе рассмотрим только линейную стадию РТН. За время линейной стадии амплитуда вырастает до своего максимального значения равного 290 мкм для случая рассмотрения сжимаемой и несжимаемой среды. Отметим, что время, за которое достигается максимальное значение амплитуды, для случая сжимаемой среды ($t_{PTC} = 232$ нс) меньше, чем при использовании приближения несжимаемости ($t_{PT} = 280$ нс). Это указывает на то, что учет сжимаемости привел к ускорению роста возмущения границы, подобный результат приведен в работе [11]. На рис. 8 приведены графики зависимости амплитуды от времени для случаев рассмотрения РТН с и без учета сжимаемости для различных значений отношения амплитуды начального возмущения к длине волны.

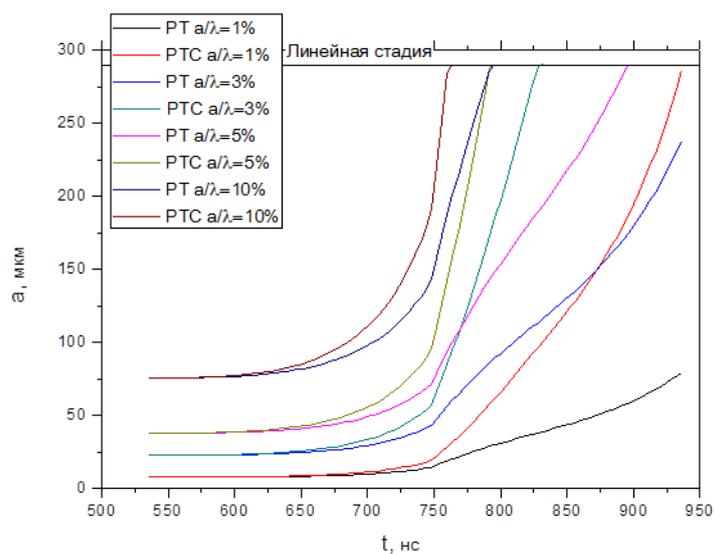


Рис. 8. Зависимость амплитуды возмущения, обусловленной наличием РТН, от времени на стадии торможения. Рассмотрены несжимаемый и сжимаемый случаи

5. Заключение

В работе проведен анализ устойчивости границы раздела ускоренно движущихся сред, в одной из которых присутствуют неоднородности плотности. Получены аналитические зависимости для линейной стадии развития возмущений в двумерном плоском случае. Показано, что наличие начального возмущения плотности приводит к росту возмущения границы независимо от направления ускорения, в отличие от РТН. Полученные результаты применены для рассмотрения задачи о сжатии сферической оболочки к центру. Данная задача имеет отношение к ИТС, в котором также происходит сжатие газонаполненных оболочек. При условиях, соответствующих развитию РТН, в результате сравнения амплитуд роста возмущений, обусловленных наличием возмущения плотности, с амплитудами, получаемыми при РТН, получено, что основной вклад в возмущение границы приходится на РТН, вклад в итоговую амплитуду от наличия возмущений плотности заметно меньше. Проведена оценка влияния эффектов сжимаемости на развитие РТН, показано, что при рассмотрении сжимаемой среды амплитуда возмущения растет быстрее.

В результате показано, что в физических процессах, в которых рассматривается схождение оболочки к центру, наличие возмущений плотности обуславливает величину начальной амплитуды возмущений контактной границы перед стадией торможения и приводит к более сильному развитию РТН.

Литература

1. Городничев, К.Е., Куратов, С.Е. Развитие возмущений в системе сталкивающихся пластин. ВАНТ сер. Мат. моделирование физ. процессов. 2013. Т. 2. С. 37–47.
2. Rayleigh L. Investigations of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density // Proc. Lond. Math. Soc. 1883. 14. Pp. 170–177.
3. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. // I. Proc. R. Soc. Lond A. 1950. 201, Pp. 192–196.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. том VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic stability. Oxford, 1961.
6. Разин А.Н. Моделирование неустойчивости и турбулентного перемешивания в слоистых системах. Саров, 2010.
7. Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Е.Е. Гидродинамика перемешивания. М.: МФТИ, 1999.
8. Shivamoggi B.K. Rayleigh-Taylor Instability in a Compressible Fluid// arXiv:0805.0581v1. 5 may 2008
9. Gauthier S., Le Creurer B. Compressibility effects in Rayleigh–Taylor instability-induced flows.// Phil. Trans. R. Soc. A. 2010. 368, pp. 1681–1704.
10. Livescu D. Compressibility effects on the Rayleigh–Taylor instability growth between immiscible fluids.// Phys. of Fluids. 2004. 16. №1. Pp. 118–126.
11. Анучина Н.Н., Анучин М.Г. Развитие Рэлей–Тейлоровской неустойчивости в системах с различной сжимаемостью среды.// Мат. Мод., 1990. Т. 2, № 4, С. 1–16.
12. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z – преобразования. М.: Наука, 1971.
13. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. Chapman&Hall, 2001.
14. Кляцкин В.И. Методы погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986.
15. Забабахин Е.И. Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск, 1997.
16. Код ЭГИДА-2D для моделирования двумерных задач. Том 1, под ред. д.ф.-м.н. Янилкина Ю.В. Саров, 2008.

Статья поступила в редакцию 20 ноября 2015 г.