

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГОНКИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

А.С. Дикалюк, С.Т. Суржиков

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Аннотация

Представлен метод интегрирования пятиточечных конечно-разностных уравнений, основанный на прогонке И.В.Петухова четвертого порядка точности.

С использованием разработанного метода выполнены вычислительные эксперименты по решению двумерного уравнения Пуассона. Приведены расчетные данные, характеризующие вычислительную эффективность разработанного метода.

THE FORTH ORDER DECOMPOSITION METHOD FOR TWO DIMENSIONAL POISSON EQUATION

Numerical simulation method for integration of two dimensional Poisson equation of the forth order of accuracy is presented. Numerical simulation results demonstrate high efficiency of the method.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поиск путей повышения эффективности расчётных алгоритмов интегрирования двух- и трёхмерных уравнений эллиптического и параболического типов является одним из актуальных направлений современной вычислительной математики. Пяти- и девятиточечные коды являются составными элементами большого числа компьютерных кодов, используемых в практике вычислительной физики и механике сплошных сред. Это является главной причиной значительных усилий по совершенствованию указанных вычислительных алгоритмов и расчетных программ.

Основы теории таких методов изложены, например, в книгах [1–3]. Сравнительный анализ расчётных алгоритмов выполнен в работе [4]. Особое значение приобретают параллельные вычисления.

В данной работе представлен численный метод интегрирования системы пятиточечных конечно-разностных уравнений, в основу которого положен алгоритм, предложенный И.В.Петуховым в 1964 г. [5]. В работе [6] показана высокая эффективность данного метода при решении задач электродинамики тлеющих разрядов.

2. ПРОГОНКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Следуя [5], рассмотрим сначала реализацию скалярной прогонки для уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\eta} &= K; \\ M &= m_1 U_1 + m_2 U_2 + m_3 U_3 + m_0; \\ K &= k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_0; \\ U_3 &= U, \quad U_2 = \frac{dU}{d\eta}, \quad U_1 = \frac{d^2 U}{d\eta^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) рассматривается на отрезке $0 \leq \eta \leq \eta_\delta$. Конечно-разностная сетка вдоль этого направления может быть неоднородной. Граничные ус-

ловия для данного уравнения формулируются следующим образом:

при $\eta = 0$

$$\gamma_{11} U_1 + \gamma_{12} U_2 + \gamma_{13} U_3 + \gamma_{10} = 0, \tag{2.2}$$

$$\gamma_{21} U_1 + \gamma_{22} U_2 + \gamma_{23} U_3 + \gamma_{20} = 0; \tag{2.3}$$

при $\eta = \eta_\delta$

$$\gamma_{31} U_1 + \gamma_{32} U_2 + \gamma_{33} U_3 + \gamma_{30} = 0. \tag{2.4}$$

Заметим, что уравнения (2.2) и (2.3) должны быть линейно-независимыми.

Рассмотрим общий алгоритм данного метода. Сначала с помощью разложения функции U в ряд Тейлора в окрестности точки $\eta^0 = \eta^- + \Delta\eta$, и применения формулы Симпсона, установим уравнения связи для любых двух соседних точек расчетного отрезка. Затем, используя эти уравнения, перенесём граничные условия с левого конца расчетного отрезка на правый конец. Одновременно с этим переносом будем вычислять прогоночные коэффициенты, с помощью которых можно рассчитать значение функции на всём отрезке. После переноса граничных условий получим на правом конце отрезка систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными (U_1, U_2, U_3). Решая полученную систему уравнений, например, методом Крамера, определяем значения неизвестных величин на правом конце расчетного отрезка и с помощью прогоночных коэффициентов, определённых ранее, считаем значения искоемых функций во всех точках отрезка.

Теперь приступим непосредственно к выводу расчётных соотношений. Постулируем связь между значениями функций U_1, U_2, U_3 на левом (η^- – соответствующий индекс «-») и правом (η^+ – соответствующий индекс «+») концах элементарного отрезка длиной $2\Delta\eta$ (данная величина также является шагом сетки). Эта связь имеет следующий вид:

$$a_{i0}^- + \sum_{j=1}^3 a_{ij}^- U_j^- = a_{i0}^+ + \sum_{j=1}^3 a_{ij}^+ U_j^+, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Для определения коэффициентов a_{ij}^+ , $i=1,3, j=0,3$, воспользуемся следующими условиями. Одна связь будет устанавливаться непосредственно из уравнения

$$M'_\eta = K \Rightarrow \int_{\eta^-}^{\eta^+} M'_\eta d\eta = \int_{2\Delta\eta} K d\eta. \text{ Вторая связь между}$$

ними устанавливается из интеграла $\int_{2\Delta\eta} M d\eta$. А третья

из интеграла $\int_{2\Delta\eta} U_2 d\eta$.

Вычисление указанных интегралов производится с помощью формулы Симпсона:

$$\int_{2\Delta\eta} \varphi d\eta = \frac{\Delta\eta}{3} (\varphi^+ + \varphi^- + 4\varphi^0), \quad (2.6)$$

где φ^0 – значение функции φ в точке η^0 , средней точке элементарного отрезка (вообще верхний индекс 0 соответствует значению данной функции в центре элементарного отрезка). Использование формул Симпсона обеспечивает второй порядок точности интерполяции функций, однако теперь появилась проблема определения значения φ^0 , через значения функции φ на концах элементарного отрезка, а также значения её первой производной, вычисленных в тех же точках. Стоит отметить, что под φ в данном случае понимается любая из функций U_1, U_2, U_3 . Как уже указывалось выше, воспользуемся разложением функции φ в окрестности точки η^0 в ряд Тейлора и выразим значение φ^+ и φ^- . Получим

$$\varphi^+ = \varphi^0 + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^0 \Delta\eta + \left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right)^0 \frac{\Delta\eta^2}{2}, \quad (2.7)$$

$$\varphi^- = \varphi^0 - \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^0 \Delta\eta + \left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right)^0 \frac{\Delta\eta^2}{2}. \quad (2.8)$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем выражения для φ^0 и $\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^0$. Они имеют вид

$$\varphi^0 = \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}\right)^0 \Delta\eta^2, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^0 = \frac{3}{4\Delta\eta} (\varphi^+ - \varphi^-) - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^+ + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^- \right]. \quad (2.10)$$

Аппроксимируя в равенстве (2.9) вторую производную центральным конечно-разностным соотношением, выраженным через значения первой производной на концах элементарного отрезка, получаем окончательно формулы для значения функции φ и её производной в середине отрезка (формула для производной (2.12) полностью эквивалентна формуле (2.10)):

$$\varphi^0 = \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2} - \frac{\Delta\eta}{4} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^+ - \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^- \right], \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^0 = \frac{3}{4\Delta\eta} (\varphi^+ - \varphi^-) - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^+ + \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^- \right]. \quad (2.12)$$

Интеграл Симпсона так же можно преобразовать с использованием равенства (2.11)

$$\int_{2\Delta\eta} \varphi d\eta = \frac{\Delta\eta}{3} (\varphi^+ + \varphi^- + 4\varphi^0) = (\varphi^+ + \varphi^-) \Delta\eta - \frac{\Delta\eta^2}{3} \left[\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^+ - \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^- \right]. \quad (2.13)$$

Таким образом, получены соотношения, связывающие значение, а так же первые две производные функции U в центре элементарного отрезка с её значениями на его краях. Перепишем формулы (2.11), (2.12) применительно к нашей задаче через значения U_1, U_2, U_3 :

$$U_3^0 = \frac{U_3^+ + U_3^-}{2} - \frac{\Delta\eta}{4} (U_2^+ - U_2^-), \quad (2.14)$$

$$U_2^0 = \frac{3}{4\Delta\eta} (U_3^+ - U_3^-) - \frac{1}{4} (U_2^+ + U_2^-), \quad (2.15)$$

$$U_1^0 = \frac{3}{4\Delta\eta} (U_2^+ - U_2^-) - \frac{1}{4} (U_1^+ + U_1^-). \quad (2.16)$$

Приступим к вычислению коэффициентов связи. Воспользуемся первым условием:

$$\int_{\eta^-}^{\eta^+} M'_\eta d\eta = \int_{2\Delta\eta} K d\eta. \quad (2.17)$$

Применяя к левой части равенства формулу Ньютона – Лейбница, а к правой – формулой Симпсона получим

$$M^+ - M^- = \frac{\Delta\eta}{3} (K^+ + K^- + 4K^0). \quad (2.18)$$

Подставляя в это выражение значения функций M, K , вычисленные в указанных точках, а так же пользуясь соотношениями (2.14)–(2.16), сгруппируем полученные слагаемые согласно виду формулы (2.5). Тогда получим выражения для первого набора коэффициентов связи:

$$\begin{aligned} a_{11}^+ &= m_1^+ - \frac{k_1^+ \Delta\eta}{3} + \frac{k_1^0 \Delta\eta}{3}, \\ a_{12}^+ &= m_2^+ - \frac{k_2^+ \Delta\eta}{3} + \frac{k_3^0 \Delta\eta^2}{3} + \frac{k_2^0 \Delta\eta}{3} - k_1^0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$a_{13}^+ = m_3^+ - \frac{k_3^+ \Delta\eta}{3} - \frac{2k_3^0 \Delta\eta}{3} - k_2^0,$$

$$a_{10}^+ = m_0^+ - \frac{k_0^+ \Delta\eta}{3} - \frac{2k_0^0 \Delta\eta}{3};$$

и

$$\begin{aligned} a_{11}^- &= m_1^- + \frac{k_1^- \Delta\eta}{3} - \frac{k_1^0 \Delta\eta}{3}, \\ a_{12}^- &= m_2^- + \frac{k_2^- \Delta\eta}{3} + \frac{k_3^0 \Delta\eta^2}{3} - \frac{k_2^0 \Delta\eta}{3} - k_1^0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$a_{13}^- = m_3^- + \frac{k_3^- \Delta\eta}{3} + \frac{2k_3^0 \Delta\eta}{3} - k_2^0,$$

$$a_{10}^- = m_0^- + \frac{k_0^- \Delta\eta}{3} + \frac{2k_0^0 \Delta\eta}{3}.$$

Теперь воспользуемся вторым условием $\int_{2\Delta\eta} M d\eta$.

Этот интеграл можно вычислить двумя способами. По формуле (2.6) и по формуле (2.13). Тогда получим равенство

$$(M^+ + M^-)\Delta\eta - (M_\eta^+ - M_\eta^-)\frac{\Delta\eta^2}{3} = \frac{\Delta\eta}{3}(M^+ + M^- + 4M^0). \quad (2.21)$$

Пользуясь условиями $M_\eta^+ = K^+$ и $M_\eta^- = K^-$, получаем второй набор коэффициентов связи:

$$\begin{aligned} a_{21}^+ &= \frac{2m_1^+\Delta\eta}{3} - \frac{k_1^+\Delta\eta^2}{3} + \frac{m_1^0\Delta\eta}{3}, \\ a_{22}^+ &= \frac{2m_2^+\Delta\eta}{3} - \frac{k_2^+\Delta\eta^2}{3} + \frac{m_3^0\Delta\eta^2}{3} + \frac{m_2^0\Delta\eta}{3} - m_1^0, \\ a_{23}^+ &= \frac{2m_3^+\Delta\eta}{3} - \frac{k_3^+\Delta\eta^2}{3} - \frac{2m_3^0\Delta\eta}{3} - m_2^0, \\ a_{20}^+ &= \frac{2m_0^+\Delta\eta}{3} - \frac{k_0^+\Delta\eta^2}{3} - \frac{2m_0^0\Delta\eta}{3}; \end{aligned} \quad (2.22)$$

и

$$\begin{aligned} a_{21}^- &= -\frac{2m_1^-\Delta\eta}{3} - \frac{k_1^-\Delta\eta^2}{3} - \frac{m_1^0\Delta\eta}{3}, \\ a_{22}^- &= -\frac{2m_2^-\Delta\eta}{3} - \frac{k_2^-\Delta\eta^2}{3} + \frac{m_3^0\Delta\eta^2}{3} - \frac{m_2^0\Delta\eta}{3} - m_1^0, \\ a_{23}^- &= -\frac{2m_3^-\Delta\eta}{3} - \frac{k_3^-\Delta\eta^2}{3} + \frac{2m_3^0\Delta\eta}{3} - m_2^0, \\ a_{20}^- &= -\frac{2m_0^-\Delta\eta}{3} - \frac{k_0^-\Delta\eta^2}{3} + \frac{2m_0^0\Delta\eta}{3}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Применяя третье условие $\int_{2\Delta\eta} U_2 d\eta$, и поступая

аналогично предыдущему случаю, получаем последний набор коэффициентов связи:

$$a_{31}^+ = \frac{\Delta\eta^2}{3}, \quad a_{32}^+ = -\Delta\eta, \quad a_{33}^+ = 1, \quad a_{30}^+ = 0, \quad (2.24)$$

$$a_{31}^- = \frac{\Delta\eta^2}{3}, \quad a_{32}^- = \Delta\eta, \quad a_{33}^- = 1, \quad a_{30}^- = 0. \quad (2.25)$$

Таким образом, все коэффициенты связи определены по формулам (2.19), (2.20), (2.22)–(2.25).

Теперь необходимо связать полученные коэффициенты с коэффициентами γ_{ij} , $i=1,3$, $j=0,4$ для граничных условий (2.2) – (2.4) и получить формулы для прогоночных коэффициентов. Перепишем граничные условия в виде

$$\gamma_{10} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{1j} U_j^- = 0, \quad \gamma_{20} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{2j} U_j^- = 0 \quad (2.26)$$

на границе $\eta=0$ и

$$\gamma_{30} + \sum_{j=1}^3 \gamma_{3j} U_j^+ = 0 \quad (2.27)$$

на границе $\eta=\eta_\delta$.

Предположим, что в каждом фиксированном узле конечно-разностной сетки функции U_j^- удовлетворяют двум уравнениям

$$\lambda_{10}^- + \sum_{j=1}^3 \lambda_{1j}^- U_j^- = 0, \quad \lambda_{20}^- + \sum_{j=1}^3 \lambda_{2j}^- U_j^- = 0, \quad (2.28)$$

где коэффициенты λ_{1j}^- и λ_{2j}^- ($j=0,3$) совпадают с γ_{1j} и γ_{2j} при $\eta=0$ и подлежат определению внутри расчетного отрезка. К этим уравнениям добавим третье уравнение связи (коэффициенты (2.24), (2.25)) между U_i^+ и U_i^- . Запишем эту связь в следующем виде:

$$a_{30}^- + a_{31}^- U_1^- + a_{32}^- U_2^- + a_{33}^- U_3^- = A_3^+. \quad (2.29)$$

С учётом $a_{33}^- = 1$ и $a_{30}^- = 0$ имеем

$$U_3^- = A_3^+ - a_{31}^- U_1^- - a_{32}^- U_2^-.$$

Подставляя полученное выражение в условия (2.28) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \lambda_{i0}^- + (\lambda_{i1}^- - \lambda_{i3}^- a_{31}^-) U_1^- + \\ + (\lambda_{i2}^- - \lambda_{i3}^- a_{32}^-) U_2^- + \lambda_{i3}^- A_3^+ = 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение данной системы представим в виде (далее введены новые обозначения: $\widetilde{\lambda}_{i1}^- = \lambda_{i1}^- - \lambda_{i3}^- a_{31}^-$, $\widetilde{\lambda}_{i2}^- = \lambda_{i2}^- - \lambda_{i3}^- a_{32}^-$):

$$U_i^- = \mu_{i0} + \mu_{i3} A_3^+, \quad i=1,2, \quad (2.31)$$

μ_{ij} – коэффициенты обратных связей. Они определяются по формулам

$$\mu_{ij} = \frac{\widetilde{D}_{ij}^-}{\widetilde{D}}, \quad i=1,2, \quad j=0,3. \quad (2.32)$$

здесь

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{1j}^- &= \lambda_{2j}^- \widetilde{\lambda}_{12}^- - \lambda_{1j}^- \widetilde{\lambda}_{22}^- \\ \widetilde{D}_{2j}^- &= \lambda_{1j}^- \widetilde{\lambda}_{21}^- - \lambda_{2j}^- \widetilde{\lambda}_{11}^-, \quad j=0,3 \\ \widetilde{D} &= \widetilde{\lambda}_{11}^- \widetilde{\lambda}_{22}^- - \widetilde{\lambda}_{21}^- \widetilde{\lambda}_{12}^- \end{aligned} \quad (2.33)$$

С другой стороны из третьей связи

$$A_3^+ = a_{31}^+ U_1^+ + a_{32}^+ U_2^+ + U_3^+. \quad (2.34)$$

Таким образом, если известны значения U_i^+ , $i=1,3$, то с помощью формул (2.34) и (2.31) определяют значения U_i^- , $i=1,3$. Поэтому рекомендуется запоминать μ_{ij} , $i=1,2$, $j=0,3$ в процессе счёта для каждой пары узлов (точнее узла, соответствующего индексу « \leftarrow »).

Теперь представим значение U_3^- в виде, аналогичном (2.31). Для этого воспользуемся формулой (2.29), где заранее учтено, что $a_{33}^- = 1$ и $a_{30}^- = 0$. Подставим в неё формулы (2.31). Тогда для U_3^- получим

$$U_3^- = \mu_{30} + \mu_{33} A_3^+, \quad (2.35)$$

где

$$\mu_{30} = 1 - a_{31}^- \mu_{13} - a_{32}^- \mu_{23} \quad (2.36)$$

и

$$\mu_{33} = -a_{31}^- \mu_{10} - a_{32}^- \mu_{20}. \quad (2.37)$$

Воспользуемся двумя оставшимися уравнениями связи, коэффициенты которых зависят от вида уравне-

ния. Эти связи накладывают ограничения на U_i^+ , $i=1,3$ вида

$$\lambda_{i0}^+ + \lambda_{i1}^+ U_1^+ + \lambda_{i2}^+ U_2^+ + \lambda_{i3}^+ U_3^+ = 0, \quad i=1,2. \quad (2.38)$$

Определим λ_{ij}^+ , $i=1,2, j=0,3$. Подставим U_i^+ , $i=1,3$ в виде (2.31), (2.35) в первые две связи и представим полученные уравнение следующим образом:

$$A_1^+ = A_3^+ \widetilde{\lambda}_{13}^- + \widetilde{\lambda}_{10}^- + a_{10}^- \quad (2.39)$$

$$A_2^+ = A_3^+ \widetilde{\lambda}_{23}^- + \widetilde{\lambda}_{20}^- + a_{20}^-,$$

где $\widetilde{\lambda}_{i3}^- = a_{i1}^- \mu_{13} + a_{i2}^- \mu_{23} + a_{i3}^- \mu_{33}$, (2.40)

а $\widetilde{\lambda}_{i0}^- = a_{i1}^- \mu_{10} + a_{i2}^- \mu_{20} + a_{i3}^- \mu_{30}$, $i=1,2$, (2.41)

а $A_i^+ = a_{i1}^+ U_1^+ + a_{i2}^+ U_2^+ + a_{i3}^+ U_3^+ + a_{i0}^+$. (2.42)

Осталось перенести A_1^+ и A_2^+ в правую часть в равенствах (2.39) и записать A_i^+ , $i=1,3$ в явном виде. В результате всех преобразований получим выражения для коэффициентов λ_{ij}^+ , $i=1,2, j=0,3$.

$$\lambda_{ij}^+ = a_{ij}^+ - \widetilde{\lambda}_{i3}^- a_{3j}^+, \quad i=1,2, j=1,3, \quad (2.43)$$

$$\lambda_{i0}^+ = a_{i0}^+ - a_{i0}^- - \widetilde{\lambda}_{i0}^-, \quad i=1,2. \quad (2.44)$$

Таким образом, «граничные условия» (2.26) переносятся с левого узла на правый. Для следующей пары соседних узлов роль (2.26) условий будут играть условия (2.38) и описанный процесс определения коэффициентов μ_{ij} и λ_{ij} можно повторить.

Итак, весь процесс решения системы связей (2.5) с граничными условиями (2.2)–(2.4) разбивается на два этапа:

а) Прямая прогонка. Для очередной пары соседних узлов по формулам (2.19), (2.20), (2.22) – (2.25) вычисляются коэффициенты связей a_{ij}^+ . Эти величины вместе со значениями прогоночных коэффициентов λ_{ij} в левом узле используются для вычисления шести коэффициентов обратных связей μ_{ij} из (2.32), (2.33), (2.36), (2.37), соответствующих данной паре узлов, а также для вычисления значений прогоночных коэффициентов λ_{ij} из (2.43), (2.44) в левом узле. В самом левом узле числа λ_{ij} являются заданными коэффициентами в граничных условиях (2.2), (2.3). Когда верхний узел становится последним, прямая прогонка завершается. К двум уравнениям (2.38) присоединяется граничное условие (2.4) и определяются значения U_i^+ в самом правом узле. В дальнейшем коэффициенты λ_{ij} не используются. Что касается шести коэффициентов μ_{ij} , то их значения запоминаются для каждой пары соседних узлов.

б) Обратная прогонка. По заданным значениям U_i^+ в верхнем узле определяется из (2.34) значение A_3^+ . Затем по соответствующим ранее вычисленным значениям шести коэффициентов μ_{ij} определяются из (2.31), (2.35) значения U_i^- . Значения U_i запоминаются для каждого узла.

3. СПОСОБ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Рассматривается следующее уравнение:

$$\Delta U = f(x, y) \quad (3.1)$$

или более подробно:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (3.2)$$

Для того чтобы применить метод, описанный выше к решению данного уравнения, численно представим вторую производную функции U по координате y следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{hy^2}. \quad (3.3)$$

Здесь U_{ij} – искомое значение функции U в узле расчетной сетки с координатами i, j , а hy – шаг расчетной сетки в направлении оси Oy (в рассматриваемом случае сетка предполагалась однородной). После такого представления перепишем уравнение (3.2) в следующем виде, пригодном для использования метода Петухова:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{2}{hy^2} U = f(x, y) - \left(\frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1}}{hy^2} \right). \quad (3.4)$$

Здесь значения $U_{i,j+1}$ определяются из предыдущей итерации, а $U_{i,j-1}$ из только что рассчитанного нижнего слоя (или же из граничных условий). В дальнейшем находится максимальная относительная ошибка между только что рассчитанными значениями функции U и соответствующими её значениями, найденными на предыдущей итерации. Счёт ведётся до тех пор, пока максимальная ошибка по сетке не будет меньше заданной величины.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ДАННОЙ ПРОГОНКИ К РЕШЕНИЮ КОНКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Для исследования предложенного метода к решению уравнения Пуассона была выбрана следующая правая часть:

$$f(x, y) = \sin(k\pi x) * \sin(m\pi y). \quad (4.1)$$

Если добавить сюда граничные условия

$$U_{x=0} = U_{x=1} = U_{y=0} = U_{y=1} = 0, \quad (4.2)$$

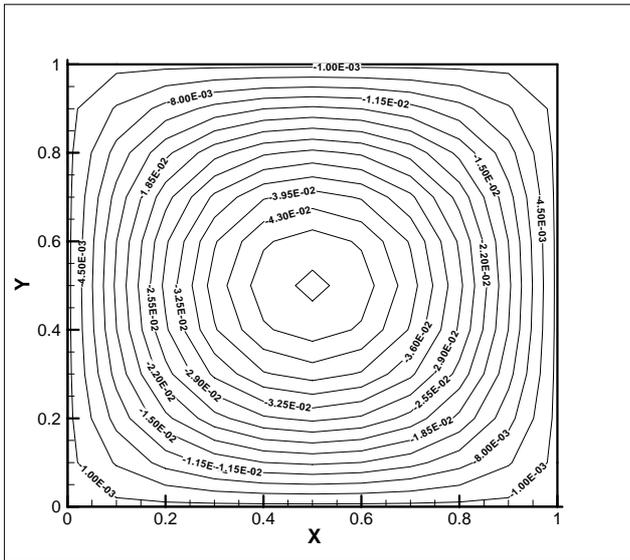
то мы получим классическое уравнение Пуассона.

Этот выбор не случаен. С данной правой частью и граничными условиями решение уравнения (3.1), (4.1), (4.2) может быть найдено точно. Это решение имеет вид

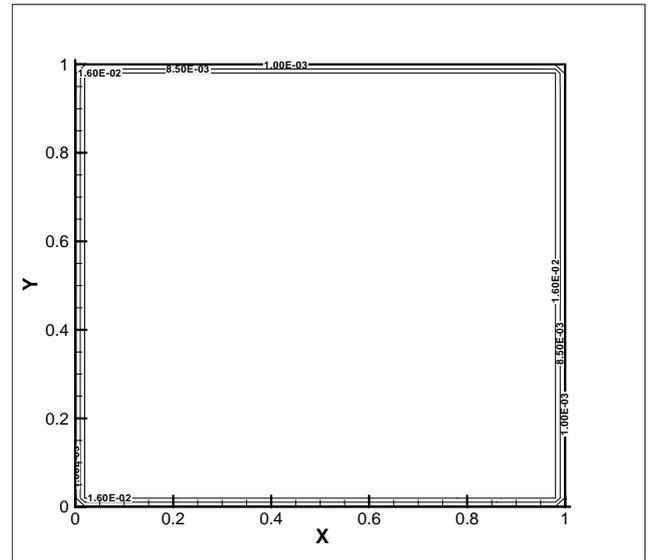
$$U = -\frac{1}{(m^2 + k^2) \cdot \pi^2} \cdot \sin(k\pi x) \cdot \sin(m\pi y). \quad (4.3)$$

Поэтому можно сравнивать точное решение с тем, что получится в процессе счёта. Приведём некоторые результаты расчётов.

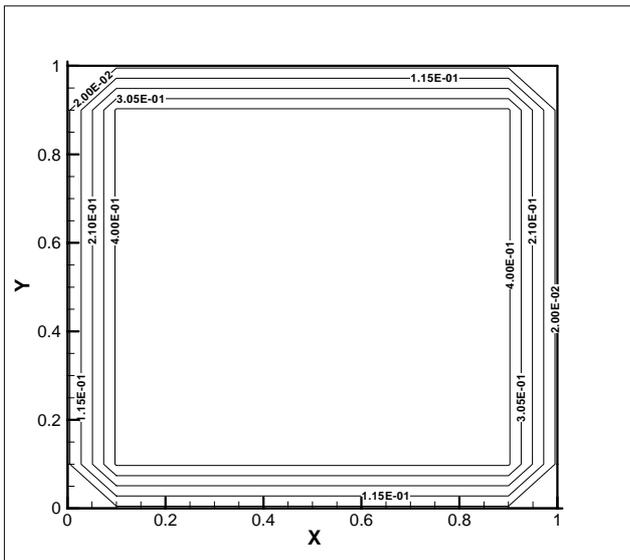
При $m=1, k=1$ на сетке 10×10 (шаг по оси x и по оси $y - 0.1$) расчёт производился за время $\sim 6 \times 10^{-2}$ сек, при этом среднее относительное отклонение от точного решения в процентах (в дальнейшем просто ошибка) составляет $\sim 0.5\%$. На рисунке ниже указано решение, найденное численно и относительное отклонение численного решения от точного в процентах, вычисленное для каждой точки.



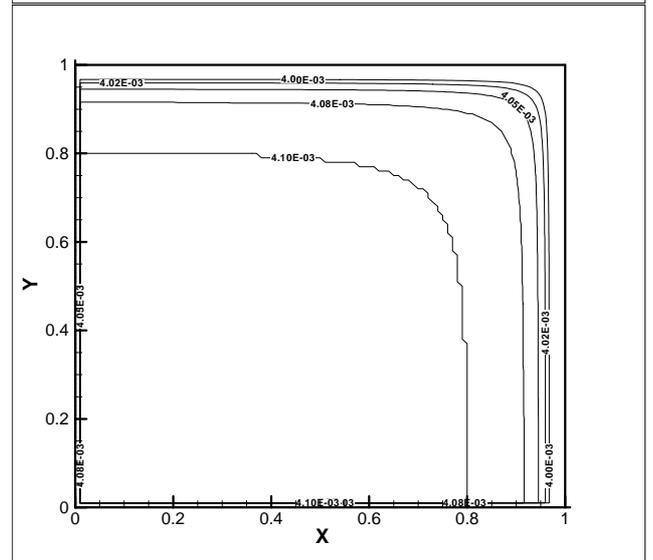
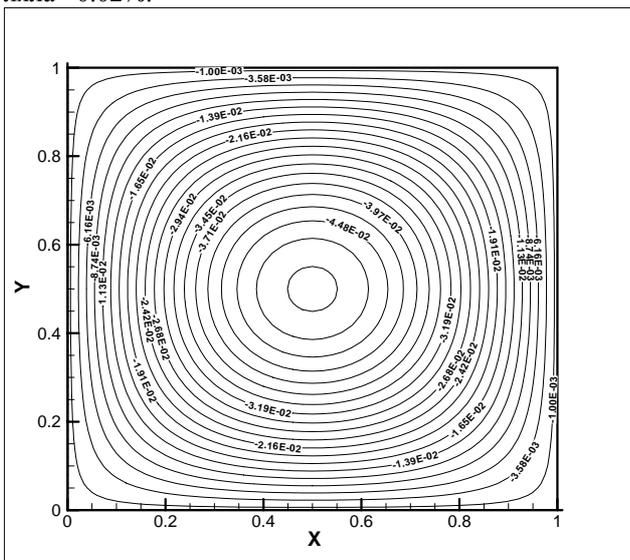
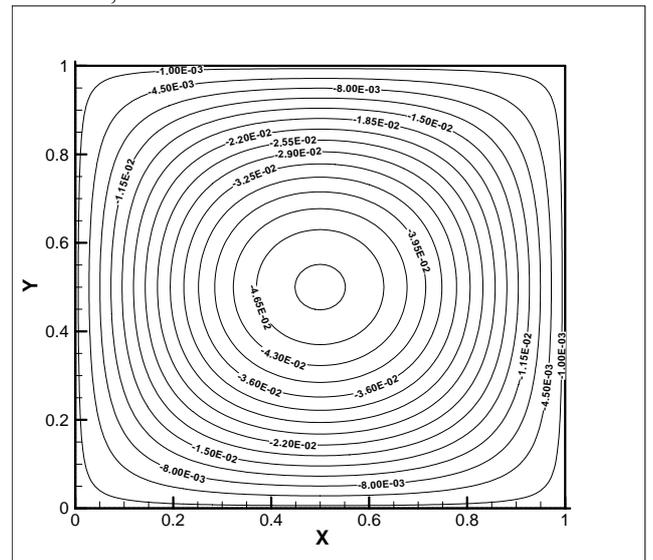
Заметим, что численное решение визуально не отличается от точного.



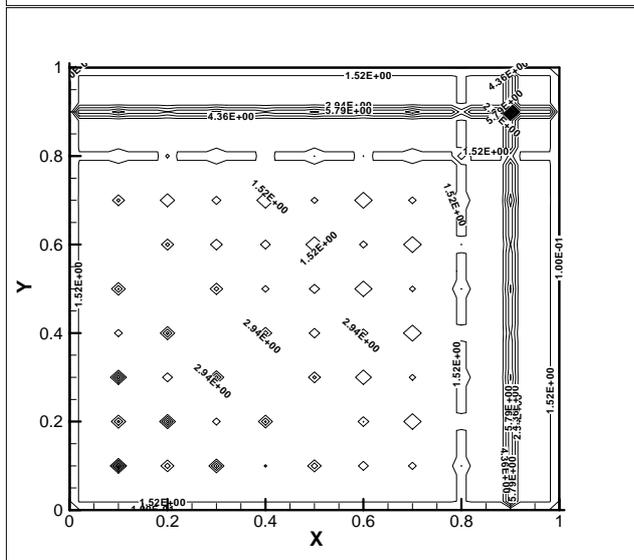
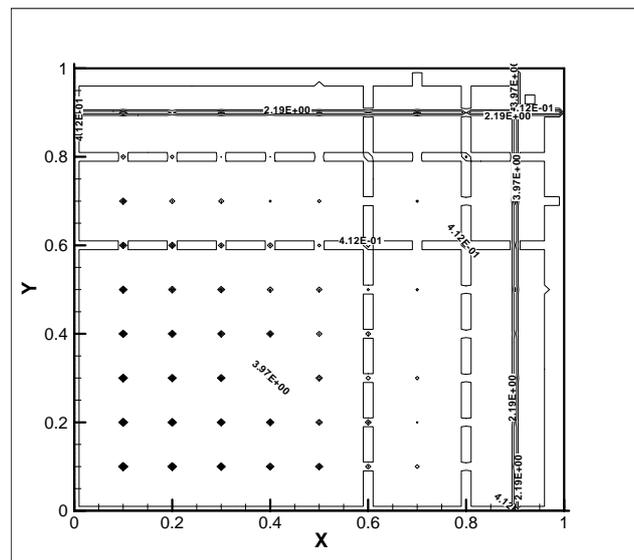
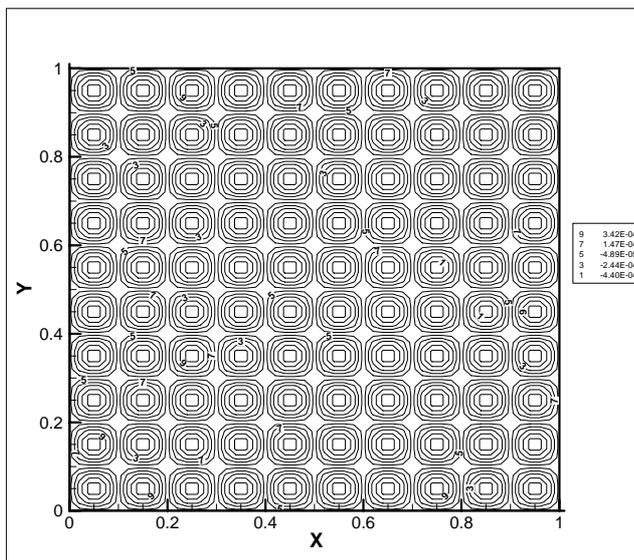
На сетке 100x100 расчёт производился за время ~405 сек, ошибка была ~0.004%.



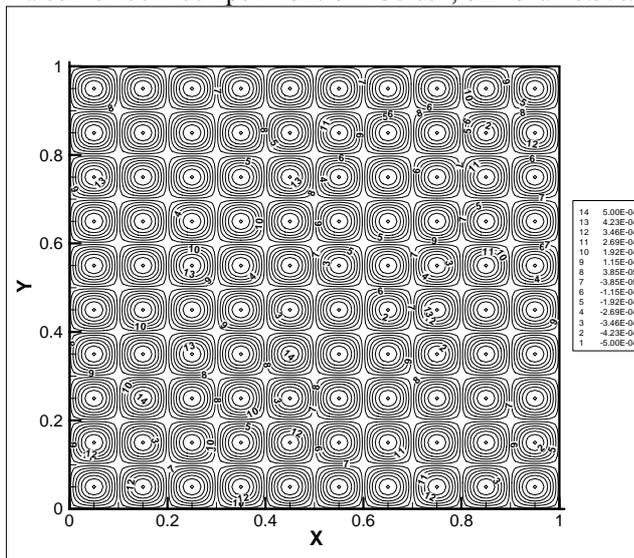
При тех же параметрах на сетке 50x50 расчёт производился за время ~25 сек, при этом ошибка составляла ~0.02%.



Интересно было исследовать схему на быстро осциллирующих решениях ($m = 10, k = 10$). При этом были получены следующие результаты: на сетке 50x50 время счёта составило ~10 сек, ошибка ~2%.



На сетке 100×100 время было ~130 сек, ошибка ~0.5%.



5. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ДАННОГО ТИПА ПРОГОНКИ

Из расчётов, проведённых на данном «модельном» уравнении можно сделать ряд наблюдений:

- величина ошибки падает с измельчением сетки, однако возрастает не только трудоёмкость вычислений (больше расчетных точек), но и количество итераций;
- в некоторых случаях существует следующий эффект, например на сетке 10×10 после 28 итераций ошибка достигает минимума на уровне ~0.05%.

6. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 07-01-00133 и программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейгман Л., Янг Д. «Прикладные итерационные методы», изд. «Мир», Москва, 1986 г.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. «Методы решения сеточных уравнений», изд. «Москва», Москва, 1978 г.
3. Голуб Дж., Ч. Ван Лоун «Матричные вычисления», изд. «Мир», Москва, 1999 г.
4. Ильин В.П. «Численные методы решения задач электрофизики», изд. «Наука», Москва, 1985 г.
5. Петухов И.В. «Численный расчёт двумерных течений в пограничном слое». В кн. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений». М.: ВЦ АН СССР. 1964. С.304-324.
6. Суржигов С.Т. Физическая механика газовых разрядов. М.: ИПмех РАН – МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2006. 640 с.