

ОСОБЕННОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ КОНТИНУУМА КОССЕРА

И.Н. Шардаков, И.О. Глот

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

Аннотация

Получены аналитические решения задачи о стационарном движении вязкой жидкости в рамках несимметричной теории (типа Коссера). Для этих решений определены макропараметры, которые откликаются на моментные свойства жидкости и конструктивно могут быть измерены экспериментально. Параметрический анализ полученных решений и сравнение их с классическими позволил установить степень отклика экспериментально измеряемых макропараметров на моментные свойства жидкости.

Получены численные решения задач о нестационарном движении вязкой жидкости в рамках несимметричной теории. Для этих решений, как и для стационарных, определены макропараметры, которые откликаются на моментные свойства жидкости. Параметрический анализ этих решений позволил установить, по сравнению со стационарными решениями, более широкий набор макропараметров, откликающихся на моментные свойства жидкости.

SPECIAL FEATURES OF STEADY AND UNSTEADY FLOWS OF THE VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID WITHIN THE FRAMEWORK OF COSSERAT CONTINUUM

The problem of the steady flows of viscous fluid has been solved analytically in the context of the asymmetrical theory (extension of the Cosserat theory). The obtained results allowed us to obtain the macroparameters which are able to respond to the couple-stress properties of fluids can be measured experimentally. The parametric analysis of the solutions and their comparison with the available classic ones made it possible to determine the degree of bias of the macroparameters to be obtained experimentally to the couple-stress properties of fluids.

A number of numerical solutions have been obtained for the unsteady movement of viscous fluids in the framework of the asymmetrical theory. Based on these solutions, it appeared possible to obtain the macroparameters similar to those found for the above solutions. The parametric analysis of these solutions allowed us to reveal wider and more diverse macro parameters responding to the couple-stress properties.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что около твердой поверхности многие жидкости образуют граничные слои толщиной $20\div 50$ нм, в которых возникает специфическое расположение молекул. Это обуславливает особые механические, реологические, термодинамические и оптические свойства тонких граничных слоев жидкости. Опыт показывает [1], что в тонком граничном слое вязкость перестает быть материальной характеристикой жидкости. Она зависит от размера. Классическая гидродинамика не описывает размерный (масштабный) эффект вязкости, и по этой причине он рассматривается как аномальный.

Возросшее за последние время количество публикаций, посвященных различным аспектам гидродинамики, построенной в рамках континуума Коссера, свидетельствует о возрастании интереса к ней. Этот интерес обусловлен расширением области практического применения моментной гидродинамики для описания и понимания явлений, протекающих в граничных слоях и определяющих физическую сущность многих практически важных технологических процессов, таких как флоатация, коагуляция, устойчивость дисперсных и коллоидных систем, тепломассоперенос, трение, биотехнологические процессы и т. д.

Одним из возможных путей корректной теоретической интерпретации таких гидродинамических проявлений вязких жидкостей является использование уравнений гидродинамики, построенных в рамках континуума Коссера – моментная гидродинамика [5], [6]. Очевидно, что экспериментальным исследованиям

должны предшествовать теоретические, в процессе которых должны быть установлены принципиальные схемы возможных экспериментов, макропараметры, которые откликаются на моментные свойства жидкости и могут быть экспериментально измерены. Выбор наиболее информативных принципиальных схем экспериментов и макропараметров базируется на анализе сопоставления решений одной и той же задачи, но полученных соответственно в рамках классической гидродинамики и в рамках континуума Коссера.

Как известно [2–4], упругие тела при наличии больших градиентов деформаций, проявляют деформационные свойства, которые не описываются в рамках классической теории. Точно так же и жидкости [5], [6] при наличии больших градиентов скоростей деформаций проявляют свойства, которые не описываются в рамках классической гидродинамики. Одним из основных отличительных свойств является проявление масштабного эффекта. Этот эффект заключается в том, что, по мере уменьшения характерного линейного масштаба гидродинамической системы, ее поведение все в большей степени не описывается в рамках классической гидродинамики.

Данная работа посвящена построению и анализу решений стационарных и нестационарных течений вязкой жидкости в рамках континуума Коссера.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Кинематика жидкости в рамках континуума Коссера описывается не только вектором скорости \vec{v} , но также вектором скорости поворота $\vec{\omega}$. При таких

предположениях в теле возникают не только силовые напряжения σ_{ij} , но и моментные напряжения μ_{ij} (рис. 1). В этом случае эти тензоры являются несимметричными.

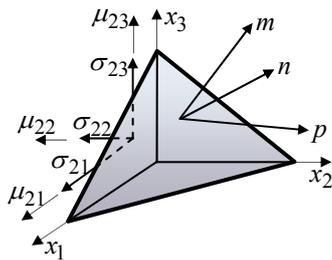


Рис. 1. Напряжения на гранях тетраэдра

Поведение вязкой жидкости в рамках несимметричной теории типа Коссера (континуум Коссера) описывается следующими уравнениями:

- Условие несжимаемости и уравнения движения

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \vec{X} &= \rho \dot{\vec{v}}, \\ \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} + \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\mu}} + \vec{Y} &= \rho J \dot{\vec{\omega}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ – тензор силовых напряжений; $\underline{\underline{\mu}}$ – тензор моментных напряжений; ρ – плотность жидкости; J – плотность момента инерции; \vec{v} и $\vec{\omega}$ – полные производные по времени от вектора скорости и вектора скорости поворота соответственно; \vec{X} и \vec{Y} – плотность распределения массовых сил и моментов. $\underline{\underline{\Sigma}}$ – псевдо-тензор Леви – Чевитта.

- Кинематические и определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\gamma}} &= \vec{\nabla} \vec{v} - \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \vec{\omega}, \\ \underline{\underline{\tau}} &= \vec{\nabla} \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= -p \underline{\underline{E}} + (\lambda + \alpha) \underline{\underline{\gamma}} + (\lambda - \alpha) \underline{\underline{\gamma}}^T, \\ \underline{\underline{\mu}} &= (\gamma + \varepsilon) \underline{\underline{\tau}} + (\gamma - \varepsilon) \underline{\underline{\tau}} + \beta I_1(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{E}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\underline{\underline{\tau}}$, $\underline{\underline{\gamma}}$ – несимметричные тензоры, определяемые через скорости поворота и линейные скорости; λ – коэффициент вязкости ньютоновской жидкости, а α , γ , ε , β – коэффициенты вязкости, появляющиеся при описании жидкости в рамках несимметричной теории; p – гидростатическое давление; $\underline{\underline{E}}$ – единичный тензор, $I_1(\underline{\underline{\tau}})$ – первый инвариант тензора $\underline{\underline{\tau}}$.

Используя соотношения (1)–(3), можно получить уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в рамках теории Коссера через компоненты скоростей \vec{v} и $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= \frac{1}{\rho} \vec{X} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \\ &\quad - \frac{\lambda + \alpha}{\rho} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + \frac{2\alpha}{\rho} \vec{\nabla} \times \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= \frac{1}{\rho J} \vec{Y} + \frac{\beta + 2\gamma}{\rho J} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \\ &\quad - \frac{\gamma + \varepsilon}{\rho J} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\omega} + \frac{2\alpha}{\rho J} \vec{\nabla} \times \vec{v} - \frac{4\alpha}{\rho J} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

3. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В рамках континуума Коссера были получены точные аналитические решения трех задач о стационарном движении вязкой жидкости:

- течение в плоском канале под действием постоянного перепада давления;
- продольное течение между двумя коаксиальными цилиндрами под действием постоянного перепада давления.
- кольцевое течение между двумя коаксиальными цилиндрами, из которых внешний неподвижен, а внутренний вращается с постоянной угловой скоростью.

3.1. Течение в плоском канале

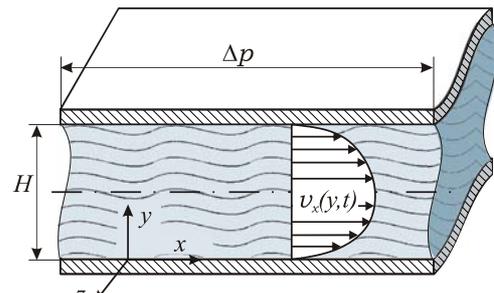


Рис. 2

В рамках континуума Коссера с использованием уравнений (1–5) была решена стационарная задача о течении вязкой жидкости в плоском канале под действием перепада давления Δp .

Полученное решение в безразмерном виде имеет вид

$$\begin{aligned} v_x(y) &= \frac{A_1}{2} [(-y + y^2) + C_1 + \\ &\quad + C_3 \exp(S \cdot y) + C_4 \exp(-S \cdot y)]; \\ \omega_z(y) &= \frac{A_1}{2} [(1 - 2y) - \\ &\quad - S_1 (C_3 \exp(S \cdot y) - C_4 \exp(-S \cdot y))], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{\text{Re}}{2} \cdot \Delta p, \quad S = 2H \sqrt{\frac{\alpha}{(1+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}},$$

$$S_1 = \frac{S}{2} \left[\frac{S^2}{KP} + 1 \right], \quad K = 2 \frac{\alpha}{(1+\alpha)}, \quad P = 2 \frac{\alpha}{(\gamma+\varepsilon)} \cdot H^2.$$

Здесь H – линейный размер, определяющий расстояние между пластинами; Re – число Рейнольдса; Δp – перепад давления, y – координата, перпендикулярная плоскости пластин; $v_x(y)$ – линейная скорость по потоку; $\omega_z(y)$ – компонента скорости поворота, перпендикулярная направлению потока и параллельная плоскости пластин.

На рис. 3 приведено сравнение распределений линейных и угловых скоростей жидкости, соответствующих решениям, полученным для классической ньютоновской жидкости и среды Коссера. Для данной задачи достаточно сложно определить макропараметр, который можно было бы конструктивно экспериментально измерять с целью установления эффектов моментного поведения жидкости и проанализировать его в зависимости от линейного масштаба (ширины зазора H).

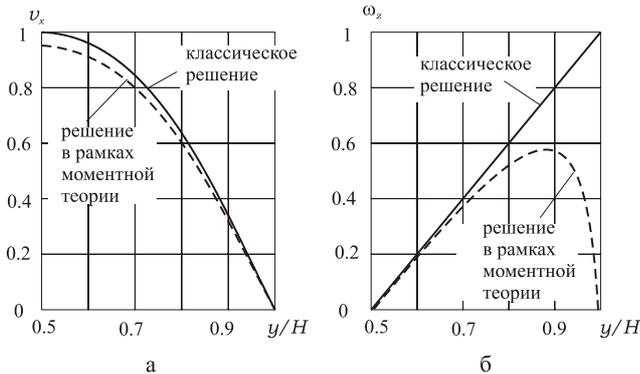


Рис. 3. Распределение продольной скорости (а) и скорости поворота частиц жидкости (б) по сечению канала

3.2. Продольное течение в цилиндрическом канале

В рамках континуума Коссера с использованием уравнений (1–5) была решена стационарная задача о течении вязкой жидкости в цилиндрическом канале под действием перепада давления Δp .

Решение этой задачи осуществлялось в цилиндрической системе координат в предположении осевой симметрии.

Полученное решение для ненулевых компонент скоростей в безразмерном виде имеет вид

$$v_z(r) = A_1 \cdot \left[(1-r^2) - \frac{K}{2} \frac{(1-r^2) + \sum_{N=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \frac{S}{(i+1)^2} \right] \cdot (1-r^{2+2N})}{1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \frac{S}{(i+1)^2} \right] \cdot (N+1)} \right];$$

$$\omega_\phi(r) = A_1 \left[r - \frac{r + \sum_{N=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \frac{S}{(i+1)^2} \right] \cdot (N+1) \cdot r^{2+2N}}{1 + \sum_{N=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \frac{S}{(i+1)^2} \right] \cdot (N+1)} \right];$$

$$A_1 = -\frac{1}{4} \cdot \text{Re} \cdot \Delta p; \quad S = R_0^2 \cdot \frac{\alpha}{(1+\alpha)(\gamma+\varepsilon)}.$$

Здесь R_0 – радиус поперечного сечения цилиндрического канала; r – радиальная координата; $v_z(r)$ – линейная скорость вдоль оси канала; $\omega_\phi(r)$ – тангенциальная компонента скорости поворота.

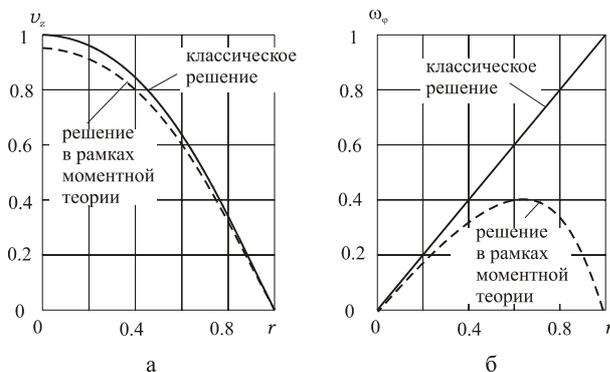


Рис.4. Распределение продольной скорости (а) и скорости поворота частиц жидкости (б) по сечению цилиндрического канала

В отличие от предыдущей задачи, в данной задаче в качестве макропараметра, который проявляет чувствительность к моментным свойствам среды, была выбрана величина расхода жидкости Q . В качестве меры отклика этой величины на моментные свойства среды была принята величина $\delta = |Q - Q^*| / Q^*$, где Q, Q^* – величины расхода для решений, соответствующих моментной и классической ньютоновской жидкости.

На рис. 5 приведена зависимость величины δ от характерного линейного масштаба задачи. Для данной задачи таким является величина радиуса сечения канала R_0 . Степень отклика δ увеличивается по мере уменьшения линейного масштаба.

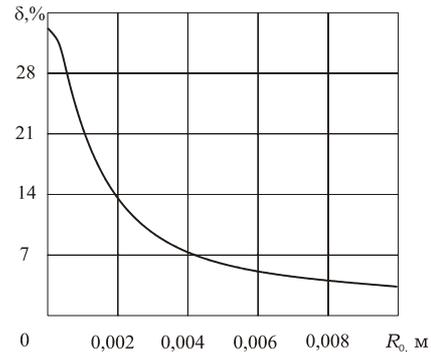


Рис.5.

3.3. Течение между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами

В рамках континуума Коссера с использованием уравнений (1–5) была решена стационарная задача о течении вязкой жидкости в течение вязкой жидкости в зазоре между неподвижным внешним цилиндром радиуса R_1 и вращающимся внутренним цилиндром радиуса R_0 . Угловая скорость внутреннего цилиндра – Ω постоянна (рис. 6). Решение этой задачи осуществлялось в цилиндрической системе координат в предположении осевой симметрии.

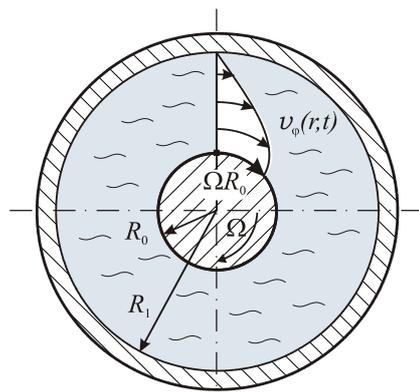


Рис. 6.

Полученное решение для ненулевых компонент скоростей в безразмерном виде имеет вид

$$v(r) = C_1 r + C_2 (1/r) + C_3 v_3(r) + C_4 v_4(r),$$

$$\omega(r) = C_1 + C_3 \omega_3(r) + C_4 \omega_4(r), \quad (8)$$

где

$$v_3(r) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n A^{2n} r^{2n+3},$$

$$v_4(r) = r \ln r + 1/2 A^2 (1 + \ln r) r^3 + \sum_{n=0}^{\infty} 1/12 A^{2n+4} L_n (\ln r + M_n) r^{2n+5}, \quad (9)$$

$$\omega_3(r) = B \left\{ 2(B-1)/(A^2 B) + \sum_{n=0}^{\infty} K_n A^{2n} (n+2) r^{2n+2} \right\},$$

$$\omega_4(r) = -7/4 + B \left\{ (\ln r + 9/4) + A^2 (\ln r + 5/4) r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} 1/24 A^{2n+4} L_n [2(n+3)(\ln r + M_n) + 1] r^{2n+4} \right\}.$$

Здесь $K_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)}$; $L_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$;

$$M_n = 7/12 - \sum_{k=1}^n \frac{2k+5}{2(k+2)(k+3)};$$

$$A = R_0 \sqrt{\frac{\alpha \mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}}, \quad B = \frac{(\alpha + \mu)}{\alpha},$$

константы C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из краевых условий для конкретных значений безразмерных величин A и B .

Полученные аналитические решения являются основой для определения макропараметра, который откликается на моментные свойства жидкости и может быть измерен экспериментально. В качестве такого макропараметра может быть использована интегральная характеристика – реактивный момент на внутреннем цилиндре:

$$M = \int_0^{2\pi} [\sigma_{r\phi}(R_0) R_0^2] d\phi + \int_0^{2\pi} [\mu_{rz}(R_0) R_0] d\phi. \quad (10)$$

Значение данного параметра для классического случая определяется выражением, полученным на основе решения задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами в рамках классической теории:

$$M^* = \int_0^{2\pi} [\sigma_{r\phi}^*(R_0) R_0^2] d\phi.$$

Так же как и в случае продольного течения жидкости в канале, решение демонстрирует зависимость от характерного линейного размера. На рис. 7 показано изменение меры чувствительности $\delta = |(M - M^*)/M^*| \cdot 100\%$ от линейного размера R_1 при соотношениях геометрических размеров канала $R_0 = kR_1$ и $k = 0.1$ и значениях физических констант, $\gamma = 0.01 \lambda$ кг/(м·с), $\varepsilon = 0.01 \lambda$ кг/(м·с), $\beta = 0.01 \lambda$ кг/(м·с).

Из сопоставления зависимостей рис. 5 и 7 следует, что ситуации течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами является наиболее информативной с точки зрения проявления моментных свойств, если в качестве макропараметра выбрать реактивный момент.

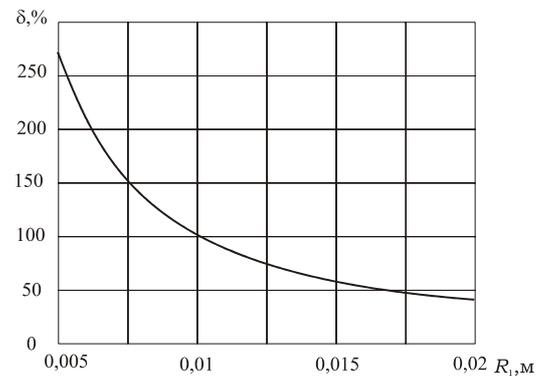


Рис. 7. Мера отклика на моментные свойства в зависимости от линейного масштаба R_1

4. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

В рамках континуума Коссера были получены решения двух задач о нестационарном движении вязкой жидкости:

- течение в плоском канале;
- кольцевое течение между двумя коаксиальными цилиндрами.

Для решения этих задач была использована вариационная постановка на основе принципа Журдена. Для численной реализации вариационного уравнения был использован метод конечных элементов. Для параметрического анализа полученных решений были использованы соответствующие решения, полученные в рамках теории классической ньютоновской жидкости. Эти решения были получены в аналитическом виде путем представления их в виде ряда по полной системе координатных функций.

4.1. Течение в плоском канале

В рамках континуума Коссера с использованием уравнений (1–5) была решена нестационарная задача о течении вязкой жидкости в плоском канале (рис. 8а). В начальный момент времени $t=0$ стенки канала и жидкость имеют постоянную скорость движения в направлении оси x . При $t > 0$ стенки канала начинают осуществлять торможение по заданному закону $V(t)$ (см. график на рис. 8б). В момент времени t_0 стенки останавливаются и остаются неподвижными в последующее время. Полученное решение дает представление об эволюции течения жидкости.

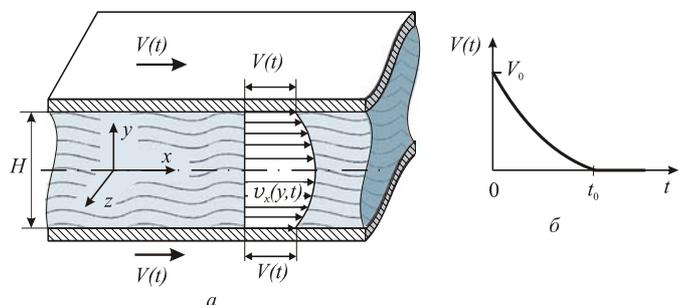


Рис. 8

Для параметрического анализа было получено точное аналитическое решение данной задачи для классической ньютоновской жидкости. Оно имеет вид

$$v_x(y,t) = \left(\frac{V_0}{t_1^2} t^2 - \frac{2 \cdot V_0}{t_1} t + V_0 \right) \chi(t_0 - t) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sin} \left(\frac{\pi n}{H} y \right) \left[C_n \exp(-\lambda_n v t) + \frac{V_0}{t_0 \cdot \lambda_n v} \chi(t_0 - t) \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \right], \quad (11)$$

где

$$C_n = -\frac{2}{\pi n} V_0 [1 - \chi(t_0 - t)] [1 - (-1)^n] - \beta_n / \lambda_n \cdot v + \alpha_n / (\lambda_n \cdot v)^2, \\ \alpha_n = -\frac{2V_0}{t_0^2} \cdot \chi(t_0 - t) \cdot \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n], \\ \beta_n = \frac{2V_0}{t_0} \cdot \chi(t_0 - t) \cdot \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n], \\ \chi(\cdot) - \text{функция Хевисайда.}$$

Анализ этих решений позволил установить, что торможение потока вязкой жидкости для среды Коссера осуществляется быстрее, чем для потока ньютоновской жидкости. Поэтому в качестве параметра, чувствительного к моментным свойствам жидкости, было выбрано характерное время τ , за которое величина скорости на оси симметрии уменьшится в e раз. В качестве меры отклика была принята величина $\delta = |\tau - \tau^*| / \tau^*$, где τ^* – характерное время изменения скорости для классической ньютоновской жидкости.

На рис. 9 приведена зависимость меры отклика δ от характерного линейного масштаба данной задачи – поперечного размера H .

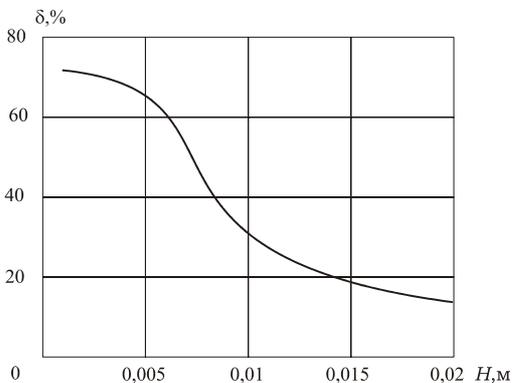


Рис. 9

Следует отметить, что нестационарная задача, в отличие от стационарной, имеет более богатые возможности по выбору макропараметров, которые откликаются на моментные свойства.

4.2. Кольцевое течение между двумя коаксиальными цилиндрами

В рамках континуума Коссера с использованием уравнений (1–5) была решена нестационарная задача о течении вязкой жидкости в коаксиальном зазоре (рис. 10а). В начальный момент времени $t=0$ оба цилиндра и жидкость имеют постоянную угловую скорость движения Ω_0 относительно оси цилиндров. При $t > 0$ стенки канала начинают осуществлять торможение по

заданному закону $\omega(t)$ (см. график на рис. 10б). В момент времени t_0 цилиндры останавливаются. Полученное решение дает представление об эволюции течения жидкости.

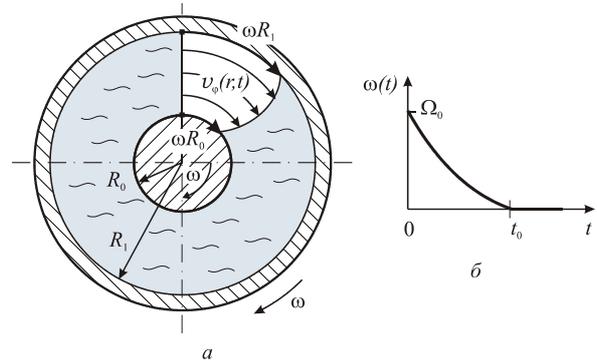


Рис. 10

Для параметрического анализа было получено точное аналитическое решение данной задачи для классической ньютоновской жидкости. Оно имеет вид

$$v_\varphi(r,t) = r \cdot \left(\Omega_0 - \frac{\Omega_0}{t_0} t \right) \cdot \chi(t_0 - t) + \sum_{i=1}^n X_i(r) \left(c_i e^{-\lambda_i^2 t} + \frac{a_i}{\lambda_i^2} \right),$$

где $X_i(p_i) = c_1 J_1(p_i) + c_2 Y_1(p_i)$, $p_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{v}} r$,

$$a_i = \frac{\left\langle X_i(r), \frac{\Omega_0}{t_0} \cdot r \cdot \chi(t_0 - t) \right\rangle}{\|X_i\|^2}, \quad \|X_i\|^2 = \langle X_i(r), X_i(r) \rangle,$$

$$\langle f(r), g(r) \rangle = \int_a^b f(r) \cdot g(r) \cdot r dr,$$

$$c_i + \frac{a_i}{\lambda_i^2} = \frac{\langle X_i(r), r \cdot \Omega_0 \cdot (1 - \chi(t_0 - t)) \rangle}{\|X_i\|^2},$$

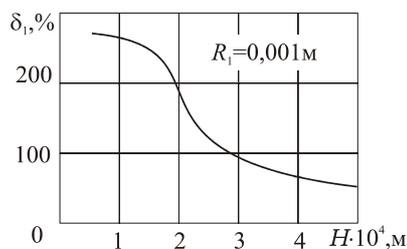
$J_1(p_i)$ – функция Бесселя I рода первого порядка, $Y_1(p_i)$ – функция Бесселя II рода первого порядка.

Как и в случае плоского слоя, было установлено, что торможение потока вязкой жидкости для среды Коссера осуществляется быстрее, чем для ньютоновской жидкости.

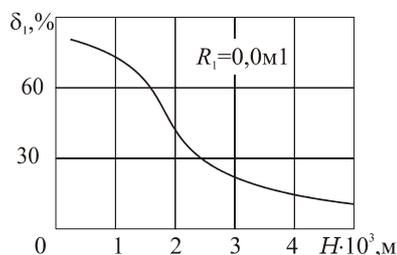
Для этой задачи, в качестве параметра, чувствительного к моментным свойствам жидкости, было выбрано характерное время τ , за которое величина скорости в середине зазора (при $r = (R_1 + R_0)/2$) уменьшится в e раз.

На рис. 11 приведена зависимость меры отклика $\delta_1 = |\tau - \tau^*| / \tau^*$ от характерного линейного масштаба данной задачи – толщины коаксиального зазора $H = R_1 - R_0$ для трех различных значений R_1 .

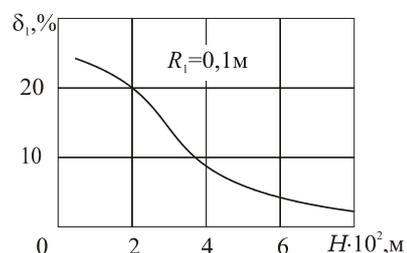
На рис. 12 приведена зависимость меры отклика $\delta_2 = |M - M^*| / M^*$ от характерного линейного масштаба данной задачи – толщины коаксиального зазора $H = R_1 - R_0$ для $R_1 = 0.001$ м. Здесь M, M^* – реактивные моменты соответственно для среды Коссера и классической ньютоновской жидкости в момент времени $t=0$.



a



b



v

Рис.11

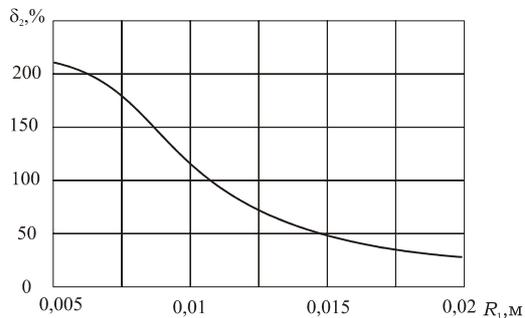


Рис.12

Такое многообразие параметрических зависимостей для этой задачи обусловлено ее нестационарностью и наличием двух линейных масштабов – H и R_1 .

Следует отметить, что нестационарная задача, в отличие от стационарной, имеет более богатые возможности по выбору макропараметров, которые откликаются на моментные свойства.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из анализа полученных решений следует:

1. В нестационарных задачах моментные эффекты проявляют себя более ярко, чем в стационарных.
2. Сочетание нестационарности процесса с высокими градиентами напряжений усиливает эффект проявления моментных свойств материала.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- \vec{v} – вектор скорости
- $\vec{\omega}$ – вектор скорости поворота
- $\underline{\sigma}$ – тензор силовых напряжений
- $\underline{\mu}$ – тензор моментных напряжений
- \vec{J} – плотность момента инерции
- \vec{X}, \vec{Y} – плотность распределения массовых сил и моментов
- $\underline{\tau}, \underline{\gamma}$ – несимметричные тензоры, определяемые через скорости поворота и линейные скорости
- ρ – плотность жидкости,
- λ – коэффициент вязкости ньютоновской жидкости
- $\alpha, \gamma, \varepsilon, \beta$ – коэффициенты вязкости, появляющиеся при описании жидкости в рамках несимметричной теории
- p – гидростатическое давление
- Δp – перепад давления на канале
- H, R_0 – характерный линейный размер (расстояние между пластинами или радиус внешнего цилиндра)
- Re – число Рейнольдса
- Q – расход жидкости
- M – реактивный момент на внутреннем цилиндре
- τ – характерное время изменения скорости
- δ – мера отклика на моментные свойства среды
- Ω – угловая скорость вращения внутреннего цилиндра
- $V(t), \omega(t)$ – скорость торможения пластин (цилиндров)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чураев Н.В. Тонкие слои жидкости. // Коллоидный журнал. 1996. Т.68, №6. С.725–735.
2. Cosserat, E. et F. Theorie des corps deformables / E. Cosserat et F. Cosserat. – Paris, 1909. – vi+226 pp. (Appendix, pp. 953-1173 of Chwolson's Traite de Physique. 2nd ed., Paris).
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 592 с.
4. Тупин Р.А. Теория упругости, учитывающая моментные напряжения. // Сб. переводов “Механика”. 1965. №3. С. 11–140.
5. Грот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Изд-во «Мир», 1964. 456 с.
6. Eringen, A.C. Theory of micropolar fluids / A.C. Eringen // J. Math. Mech. 1966. – Vol. 16.– № 1. – Pp. 1–18.