

# ТЕОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СРЕД С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ И СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ В МАТЕРИАЛАХ

А.А. Роговой

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения РАН,  
Пермь, 614013, ул. Академика Королева, 1*

## Аннотация

Излагаются основные положения построения удовлетворяющих принципам термодинамики и объективности соотношений, описывающих кинематику конечных деформаций сложных сред, определяющих уравнений и уравнения теплопроводности с учетом структурных изменений в материале. Совокупность этих положений составляет теорию построения моделей сложных сред с конечными деформациями и структурными изменениями в материале.

## THE THEORY OF MODEL CONSTRUCTION FOR COMPLEX MEDIA WITH FINITE DEFORMATIONS AND STRUCTURAL CHANGES IN MATERIALS

A.A. Rogovoy

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Russia, Perm, 614013*

The basic statements for construction of the relations, satisfying the thermodynamic and objective principles, have been formulated. These relations involve the kinematic equations for finite strains of the complex media, the constitutive equations and the heat conduction equation allowing for the structural changes in materials. A set of these statements constitutes the model construction theory for complex media with the finite deformations and structural changes in materials.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Определяющие соотношения для сложных сред при малых деформациях могут быть построены, используя простой, но эффективный подход, основанный на возможности представить полную деформацию  $\mathbf{e}$  суммой упругих  $\mathbf{e}_E$ , неупругих  $\mathbf{e}_{IN}$  и температурных  $\mathbf{e}_\theta$  деформаций:  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\theta$ . Тогда, например, соотношение Гука для упругого изотропного материала  $\mathbf{T} = \Lambda I_1(\mathbf{e}_E)\mathbf{g} + 2G\mathbf{e}_E$ , где  $\Lambda$  и  $G$  – параметр Ламе и модуль сдвига;  $I_1$  – первый инвариант соответствующего тензора;  $\mathbf{g}$  – единичный тензор, представится через полную деформацию в виде

$$\mathbf{T} = \Lambda I_1(\mathbf{e})\mathbf{g} + 2G\mathbf{e} - [\Lambda I_1(\mathbf{e}_{IN})\mathbf{g} + 2G\mathbf{e}_{IN}] - [\Lambda I_1(\mathbf{e}_\theta)\mathbf{g} + 2G\mathbf{e}_\theta]. \quad (1.1)$$

Используя теперь соответствующие соотношения для неупругих и температурных деформаций, строятся определяющие уравнения для термо-упруго-неупругого процесса. Например, если  $\mathbf{e}_{IN} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{e}_\theta = \beta\theta\mathbf{g}$ , где  $\beta$  – коэффициент линейного температурного расширения, а  $\theta$  – малое отклонение температуры от комнатной, имеем из (1.1) известное соотношение Дюгамеля – Неймана

$$\mathbf{T} = \Lambda I_1(\mathbf{e})\mathbf{g} + 2G\mathbf{e} - 3K\beta\theta\mathbf{g},$$

где  $K = \Lambda + 2G/3$  – объемный модуль. Если  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$ , а  $d\mathbf{e}_{IN} \equiv d\mathbf{e}_P = [3d\Lambda_P/(2\sigma_i)]\mathbf{S}$ , где  $d\Lambda_P$  – интенсивность приращения пластических деформаций,  $d\Lambda_P = \sqrt{(2/3)d\mathbf{e}_P \cdot d\mathbf{e}_P}$ ,  $\sigma_i = \sqrt{(3/2)\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}$  – интенсив-

ность напряжений и  $\mathbf{S}$  – девиатор тензора напряжений  $\mathbf{T}$ , соотношение (1.1) в инкрементальной форме сводится к выражению

$$d\mathbf{T} = \Lambda I_1(d\mathbf{e})\mathbf{g} + 2Gd\mathbf{e} - G \frac{3d\Lambda_P}{\sigma_i} \mathbf{S}.$$

Это хорошо известное соотношение, которое описывает упругопластический процесс и основано на ассоциированном законе пластического течения с поверхностью текучести Мизеса. Аналогичным образом строится и уравнение состояния вязкоупругого материала, определяя  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$  и  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} \equiv \dot{\mathbf{e}}_V = \mathbf{T}/\mu$ , где  $\mu$  – коэффициент вязкости.

Аналогичный подход может быть положен в основу построения определяющих соотношений термоупруго-неупругих процессов при конечных деформациях. Но для того, чтобы иметь возможность суммировать деформации, необходимо ввести, помимо начальной и текущей конфигураций, еще и промежуточную конфигурацию, близкую к текущей, и использовать деформации, возникающие при переходе из промежуточной конфигурации в эту близкую текущую.

### 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Придерживаясь подхода, изложенного в работах [1-3] и основанного на наложении малых деформаций на конечные, представим градиент места в виде мультипликации малых и конечных термоупруго-неупругих деформаций:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}_*. \quad (2.1)$$

Здесь термо-упруго-неупругие градиенты места  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{F}_*$  переводят начальную конфигурацию  $\kappa_0$  в текущую  $\kappa$ , промежуточную  $\kappa_*$  в  $\kappa$  и начальную  $\kappa_0$  в  $\kappa_*$ , соответственно. В свою очередь

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_\theta, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{f}_E$ ,  $\mathbf{f}_{IN}$  и  $\mathbf{f}_\theta$  – упругий, неупругий и температурный градиенты места, которые при условии близости промежуточной и текущей конфигураций определяются соотношением

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}_i, \quad (2.3)$$

где  $i = E$ , или  $i = IN$ , или  $i = \theta$ , и  $\varepsilon \mathbf{h}_i$  – градиент (относительно промежуточной конфигурации) вектора  $\varepsilon \mathbf{u}_i$  ( $\varepsilon$  – положительный малый параметр) малых упругих, неупругих, или температурных перемещений

из конфигурации  $\kappa_*$  в  $\kappa$ :  $\mathbf{h}_i = \left( \nabla^* \mathbf{u}_i \right)^T$  ( $\nabla^*$  – оператор

Гамильтона относительно промежуточной конфигурации  $\kappa_*$ ). Представление (2.3) допускает произвольную коммутацию тензоров  $\mathbf{f}_i$  в (2.2) (с точностью до линейных членов относительно  $\varepsilon$ ) и позволяет представить (2.2) в виде  $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}$ , где  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_E + \mathbf{h}_{IN} + \mathbf{h}_\theta$ . В результате соотношение (2.1) принимает вид

$$\mathbf{F} = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{h}_E + \mathbf{h}_{IN} + \mathbf{h}_\theta)] \cdot \mathbf{F}_*. \quad (2.4)$$

На рис. 1 показана кинематика процесса из конфигурации  $\kappa_0$  в конфигурацию  $\kappa$  через две промежуточные конфигурации  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , близкие к текущей (путь 1,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_E \cdot \mathbf{f}_{IN}$ ; на рис. для простоты полагалось, что  $\mathbf{h}_\theta = \mathbf{0}$ , и поэтому  $\mathbf{f}_\theta = \mathbf{g}$ ). В соответствии с отмеченной выше коммутативностью путь 1 эквивалентен пути 2:  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{IN} \cdot \mathbf{f}_E$  и поэтому с точностью до линейного представления по  $\varepsilon$  конфигурации  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  неразличимы.

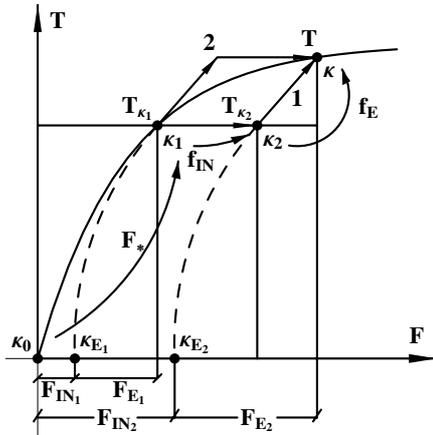


Рис. 1. Кинематика и соответствующие ей напряжения

Приближенное соотношение (2.4) (при его получении сохранялись только линейные относительно  $\varepsilon$  слагаемые) предельным переходом при стремлении промежуточной конфигурации к текущей легко сводится к точному эволюционному:

$$\dot{\mathbf{F}} = (\dot{\mathbf{h}}_E + \dot{\mathbf{h}}_{IN} + \dot{\mathbf{h}}_\theta) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{F} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{F} + \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{F}. \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – любые достаточно гладкие тензорные функции, удовлетворяющие условию  $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \dot{\mathbf{h}}_E + \dot{\mathbf{h}}_{IN} + \dot{\mathbf{h}}_\theta$ . В работах [2,3] показано, что, полагая  $\mathbf{P}_1 = \dot{\mathbf{h}}_E$ ,  $\mathbf{P}_2 = \dot{\mathbf{h}}_{IN}$ ,  $\mathbf{P}_3 = \dot{\mathbf{h}}_\theta$ , решением уравнения (2.5) будет тензор

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta, \quad (2.6)$$

где

$$\mathbf{F}_E = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}_E) \cdot \mathbf{F}_{E*}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{F}_{IN} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*}) \cdot \mathbf{F}_{IN*}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{F}_\theta = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*}) \cdot \mathbf{F}_{\theta*}. \quad (2.9)$$

и градиенты места, помеченные «звездочкой», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$  (см. рис. 1). Из соотношений (2.7)–(2.9) следует, что  $\mathbf{F}_E$ ,  $\mathbf{F}_{IN}$  и  $\mathbf{F}_\theta$  изменяются, если и только если  $\mathbf{h}_E$ ,  $\mathbf{h}_{IN}$  и  $\mathbf{h}_\theta$  ненулевые тензоры, соответственно. Выражение же (2.6) есть хорошо известное разложение Ли, но свободное от недостатков последнего. В частности, как это показано в [2], полная деформация скорости перемещений  $\mathbf{D}$  (симметричная часть тензора  $\dot{\mathbf{h}}$ ) есть сумма упругих  $\mathbf{D}_E$  (симметричная часть тензора  $\dot{\mathbf{h}}_E$ ), неупругих  $\mathbf{D}_{IN}$  (симметричная часть тензора  $\dot{\mathbf{h}}_{IN}$ ) и температурных  $\mathbf{D}_\theta$  (симметричная часть тензора  $\dot{\mathbf{h}}_\theta$ ) тензоров деформации скоростей перемещений.

В соответствии с (2.6), мера деформаций Коши – Грина  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_\theta^T \cdot \mathbf{F}_{IN}^T \cdot \mathbf{C}_E \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta$ , где  $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$ . Эту меру, с учетом (2.7)–(2.9), можно представить как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2 \varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot (\mathbf{e}_E + \mathbf{e}_{IN} + \mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{F}_*, \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*} \cdot \mathbf{F}_{\theta*}$ ,  $\mathbf{C}_* = \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{F}_*$ ,

или как

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_\circ + 2 \varepsilon \mathbf{F}_\circ^T \cdot \mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}_\circ, \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{F}_\circ = \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta$ ,  $\mathbf{C}_\circ = \mathbf{F}_\circ^T \cdot \mathbf{F}_\circ$ . Здесь, величины, помеченные «\*», относятся к промежуточной конфигурации  $\kappa_1$ , а величины, помеченные «\circ», к промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  (см. рис. 1);  $\mathbf{e}_E$ ,  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{e}_\theta$  – симметричные части тензоров  $\mathbf{h}_E$ ,  $\mathbf{h}_{IN}$  и  $\mathbf{h}_\theta$ , соответственно. Из соотношений (2.10), (2.11) можно получить предельным переходом, при стремлении промежуточной конфигурации к текущей ( $\mathbf{F}_* \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ ) и промежуточной упругой конфигурации  $\kappa_2$  к текущей ( $\mathbf{F}_\circ \rightarrow \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{C}_\circ \rightarrow \mathbf{C}$ ), два приращения и две скорости изменения меры деформации  $\mathbf{C}$  [3]:

$$(d\mathbf{C})_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (d\mathbf{e}_E + d\mathbf{e}_{IN} + d\mathbf{e}_\theta) \cdot \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{\kappa_1} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{e}}_E + \dot{\mathbf{e}}_{IN} + \dot{\mathbf{e}}_\theta) \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{D}_E + \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{D}_\theta) \cdot \mathbf{F}$$

относительно конфигурации  $\kappa_1$  (полное приращение и полная скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$ ) и

$$\begin{aligned}
 (d\mathbf{C})_{\kappa_2} &= 2 \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F}, \\
 \dot{\mathbf{C}}_{\kappa_2} &= 2 \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F}
 \end{aligned}
 \quad (2.12)$$

относительно конфигурации  $\kappa_2$  (приращение и скорость изменения тензора  $\mathbf{C}$  за счет только упругих деформаций). Тензор меры деформаций Коши–Грина  $\mathbf{C}$ , временная производная которого сводится к (2.12), будем обозначать  $\mathbf{C}_{\kappa_2}$

Соотношения (2.7)–(2.9) удобно переписать в форме

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_i &= (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{H}_i) \cdot \mathbf{F}_{i*} \\
 \mathbf{H}_i &= \begin{cases} \mathbf{h}_E & i = E \\ \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_{IN} \cdot \mathbf{F}_{E*} & i = IN \\ \mathbf{F}_{IN*}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1} \cdot \mathbf{h}_\theta \cdot \mathbf{F}_{E*} \cdot \mathbf{F}_{IN*} & i = \theta \end{cases}
 \end{aligned}$$

Третий главный инвариант этих тензоров  $J(\mathbf{F}_i)$  определяет относительное изменение соответствующего элементарного объема. Используя правила дифференцирования скалярных и тензорных функций тензорного аргумента по тензорному аргументу [4], разлагая функцию  $J(\mathbf{F}_i)$  в ряд по  $\varepsilon$  и сохраняя только линейные слагаемые, имеем

$$J(\mathbf{F}_i) = J(\mathbf{F}_{i*}) + \frac{\partial J(\mathbf{F}_i)}{\partial \mathbf{F}_i} \dots \mathbf{C}_{II}^{IV} \dots \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{C}_{II}^{IV}$  – второй изотропный тензор четвертого ранга. Учитывая, что  $\partial J(\mathbf{F}_i)/\partial \mathbf{F}_i = J(\mathbf{F}_i) \mathbf{F}_i^{-T}$ ,  $\partial \mathbf{F}_i/\partial \varepsilon = \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{F}_{i*}$ , и принимая во внимание свойства тензора  $\mathbf{C}_{II}^{IV}$  ( $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_{II}^{IV} = \mathbf{C}_{II}^{IV} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  для любого тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ), соотношение (2.13) преобразуется к виду

$$J(\mathbf{F}_i) = J(\mathbf{F}_{i*}) [1 + \varepsilon I_1(\mathbf{H}_i)]. \quad (2.14)$$

Для любого тензора второго ранга  $\mathbf{A}$   $I_1(\mathbf{A}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{A}$ . Учитывая это, легко показать, что  $I_1(\mathbf{H}_i) = I_1(\mathbf{h}_i)$ , и (2.14) переписывается как

$$J(\mathbf{F}_i) = J(\mathbf{F}_{i*}) [1 + \varepsilon I_1(\mathbf{e}_i)].$$

Это соотношение демонстрирует еще одно свойство представления градиентов места в виде (2.7) – (2.9), в дополнение к вышеупомянутым: относительное изменение объема, соответствующее упругим, неупругим и температурным градиентам места, определяется исключительно чисто упругими, чисто неупругими и чисто температурными деформациями.

Используя полярные разложения для градиента места  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$  с любым индексом « $i$ » и представляя тензоры, составляющие полярные разложения, в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(1)} \delta_i^{(1)}, & \mathbf{V} &= \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(2)}, \\
 \mathbf{R} &= \sum_{i=1}^3 \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)}, & \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^3 U_i \delta_i^{(2)} \delta_i^{(1)},
 \end{aligned}$$

где  $U_i$  – собственные значения симметричного положительно определенного тензора  $\mathbf{U}$  (или  $\mathbf{V}$ );  $\delta_i^{(1)}$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{U}$ , единичные и ортогональные, а  $\delta_i^{(2)}$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{V}$ , также единичные и ортогональные, в работе [5] рассмотрены изменения этих тензоров при слабых возмущениях. В частности, для изменения ортогонально-тензора  $\mathbf{R}$  получено выражение

$$\mathbf{R} = \left\{ \mathbf{g} + \varepsilon \left[ \mathbf{P}_C - \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)} \right] \right\} \mathbf{R}_*, \quad (2.15)$$

где  $\mathbf{P}_S$  и  $\mathbf{P}_C$  – симметричная и кососимметричная части  $\mathbf{P}$ . Естественно, присутствующие в этих соотношениях тензоры чистой деформации, их собственные значения и векторы, ортогональный тензор относятся к неупругой или температурной кинематике.

### 3. ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Как известно [6], в соответствии с теоремой Селерье–Рихтера или теоремой приведения Нолла, определяющее уравнение для простого материала, удовлетворяющее принципу объективности, может быть представлено в нескольких эквивалентных формах (см. [1,7]), в частности, в форме

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений. Тензор  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C})$ , известный как второй (симметричный) тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, зависит от физико-механических свойств материала, определяет его отклик на чистую деформацию, описываемую мерой деформации Коши–Грина  $\mathbf{C}$ , отнесен к элементарной площадке недеформированной начальной конфигурации и выражается через упругий потенциал  $W = W(\mathbf{C})$  соотношением  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}) = 2(\partial W/\partial \mathbf{C})$ . Обкладки  $J^{-1} \mathbf{F} \cdot (\bullet) \cdot \mathbf{F}^T$  приводят этот тензор к элементарной площадке текущей конфигурации. Свойства среды зависят от структуры материала и могут меняться при деформировании и действии других физических полей. Элементарная ориентированная площадка определяется только кинематикой процесса.

Используя правила дифференцирования скалярных и тензорных функций тензорного аргумента по тензорному аргументу [4] и учитывая симметрию тензора  $\mathbf{C}$ , изменение тензора  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C})$  представляется в виде

$$d\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \dots d\mathbf{C} = 2 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}^2} \dots d\mathbf{C},$$

откуда

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}) = 2 \int_{\mathbf{C}_0} \frac{\partial^2 W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}^2} \dots d\mathbf{C}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{C}_0^t$  – история изменения тензора  $\mathbf{C}$ . Соотношение (3.2) примечательно тем, что в нем выделен тензор четвертого ранга  $\partial^2 W(\mathbf{C})/\partial \mathbf{C}^2$ , определяющий свойства материала.

Будем трактовать любой термо-упруго-неупругий процесс, приводящий к текущей конфигурации, как исключительно упругий процесс из деформированной, но ненапряженной конфигурации. Например, это будет процесс из конфигурации  $\kappa_{E_1}$  в конфигурацию  $\kappa_1$ , или из конфигурации  $\kappa_{E_2}$  в конфигурацию  $\kappa$  (см. рис. 1). В качестве уравнения состояния будем использовать соотношение (3.1), в котором градиент места определяется выражением (2.6):

$$\mathbf{T} = J_E^{-1} \mathbf{F}_E \cdot \hat{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}_E^T, \quad \hat{\mathbf{g}} = J_{IN\theta}^{-1} \mathbf{F}_{IN\theta} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(\bullet) \cdot \mathbf{F}_{IN\theta}^T,$$

где

$$J_E = J(\mathbf{F}_E), \mathbf{F}_{IN\theta} = \mathbf{F}_{IN} \cdot \mathbf{F}_\theta, J_{IN\theta} = J(\mathbf{F}_{IN\theta}) = J(\mathbf{F}_{IN})J(\mathbf{F}_\theta)$$

Тензор  $\hat{\mathbf{g}}$  определяет отклик материала на чисто упругий процесс относительно ненапряженной, но деформированной конфигурации. Поэтому, если  $\mathbf{F}_{IN\theta} \neq \mathbf{g}$ , этот тензор будет начально анизотропным, даже если тензор  $\tilde{\mathbf{g}}$  будет начально изотропным. Тензор  $\tilde{\mathbf{g}}$  будем представлять в виде (3.2), где потенциал  $W$ , с помощью которого описываются свойства материала, будет функцией меры упругих деформаций  $C_E$  (в силу трактовки процесса как исключительно упругого), абсолютной температуры  $\theta$  и некоторых скалярных параметров  $\mu_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , определяемых структурными изменениями, происходящими в материале в процессе неупругого деформирования:  $W = W(C_E, \theta, \mu_i)$ . Причем, от величин  $\theta$  и  $\mu_i$  будут зависеть только параметры функционального соотношения  $W(C_E)$ . Например, упрощенный потенциал Мурнагана с параметрами  $a$  и  $b$  запишется как

$$W = a(\theta, \mu_i)[I_1(C_E) - 3] + b(\theta, \mu_i)[I_2(C_E) - 3].$$

Хотя  $W$  зависит только от упругой кинематики, приращение  $dC$  в (3.2) должно быть приращением полной меры деформации. Это связано с тем, что тензор Пиола – Кирхгофа  $\hat{\mathbf{g}}$  должен быть отнесен к недеформированной начальной конфигурации, т.е. к конфигурации  $\kappa_0$ , т.к. любые другие конфигурации, например,  $\kappa_{E_1}$  или  $\kappa_{E_2}$  (рис. 1) деформированные: первая получена из  $\kappa_0$  с помощью градиента места  $\mathbf{F}_{IN_1}$ , вторая –  $\mathbf{F}_{IN_2}$ . Но, в силу того, что любой процесс трактуется как упругий,  $dC$  должно изменяться только если изменяются упругие деформации. Поэтому  $dC$  должно иметь вид (2.12)

$$dC = (dC)_{\kappa_2} = 2 \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{e}_E \cdot \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D}_E \cdot \mathbf{F} d\tau$$

в любой момент времени  $\tau$ :  $0 \leq \tau \leq t$ , где  $t$  – время, соответствующее текущей конфигурации. Для термоупруго-неупругого процесса  $\kappa_0 \sim \kappa_{E_1} \sim \kappa_1$  (см. рис. 1) это будет время достижения конфигурации  $\kappa_1$  ( $t = t_{\kappa_1}$ ), а для процесса  $\kappa_0 \sim \kappa_{E_2} \sim \kappa$  – конфигурации  $\kappa$  ( $t = t_\kappa$ ). Для каждой конечной конфигурации  $\kappa_1$  или  $\kappa$  существует присущий только ей градиент места  $\mathbf{F}_{IN\theta}$ , определяемый упругой разгрузкой:  $\mathbf{F}_{IN\theta_1}$  (на рис. 1 это  $\mathbf{F}_{IN_1}$ ) соответствует упругой разгрузке из конфигурации  $\kappa_1$ , а  $\mathbf{F}_{IN\theta_2}$  (на рис. 1 это  $\mathbf{F}_{IN_2}$ ) – из конфигурации  $\kappa$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{F}_{IN\theta}$  определяется временем  $t_{\kappa_1}$ :  $\mathbf{F}_{IN\theta_1} = \mathbf{F}_{IN\theta}(t_{\kappa_1})$ , а  $\mathbf{F}_{IN\theta_2}$  – временем  $t_\kappa$ :  $\mathbf{F}_{IN\theta_2} = \mathbf{F}_{IN\theta}(t_\kappa)$ , т.е. в общем случае

$\mathbf{F}_{IN\theta} = \mathbf{F}_{IN\theta}(t)$ . Важно отметить, что во время осуществления упругих процессов, например,  $\kappa_{E_1} \sim \kappa_1$  или  $\kappa_{E_2} \sim \kappa$ , эти градиенты остаются неизменными. В результате в соответствии с (2.6)  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_E \cdot \mathbf{F}_{IN\theta}$ , где все градиенты определены в один и тот же момент времени,  $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_E(\tau) \cdot \mathbf{F}_{IN\theta}(\tau)$  и  $\mathbf{F}_{IN\theta}(\tau)$  – неизменная величина, которая равна значению  $\mathbf{F}_{IN\theta}(t)$  для всех  $\tau \in [0, t]$ . Так как температура  $\theta$  связана с  $\mathbf{F}_\theta$ , а  $\mu_i$  с  $\mathbf{F}_{IN}$ , то  $\theta$  и  $\mu_i$ , являющиеся аргументами у  $W$ , будут зависеть от времени  $t$ , тогда как аргумент  $C_E$  будет зависеть от времени  $\tau \in [0, t]$ . В результате всего, сказанного выше,

$$\tilde{\mathbf{g}}(t) = 2 \int_0^t \frac{\partial^2 W(C_E(\tau), \theta(t), \mu_i(t))}{\partial C_E^2} \cdot \dot{C}_{\kappa_2}(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

или

$$\tilde{\mathbf{g}}(t) = 4 \int_0^t \left[ \mathbf{F}(\tau) \circ \frac{\partial^2 W(C_E(\tau), \theta(t), \mu_i(t))}{\partial C_E^2} \cdot \mathbf{F}^T(\tau) \right] \cdot (\cdot) \mathbf{D}_E d\tau, \quad (3.4)$$

где  $(\cdot)$  – дублирование операции (в данном случае двойного скалярного произведения) при переходе на следующую строку, как это принято в русскоязычной научной литературе, а операция « $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}^{IV}$ » означает позиционное скалярное умножение слева тензора второго ранга  $\mathbf{A}$  на третий базисный вектор тензора четвертого ранга  $\mathbf{B}^{IV}$ . Тогда, в соответствии с (3.1), тензор истинных напряжений представляется с учетом (3.3) в виде

$$\mathbf{T} = 2 J^{-1} \mathbf{F} \cdot \left[ \int_0^t \frac{\partial^2 W(C_E, \theta, \mu_i)}{\partial C_E^2} \cdot \dot{C}_{\kappa_2} d\tau \right] \cdot \mathbf{F}^T, \quad (3.5)$$

а с учетом (3.4) в виде

$$\mathbf{T} = 4 J^{-1} \mathbf{F} \cdot \left( \int_0^t \left[ \mathbf{F} \circ \frac{\partial^2 W(C_E, \theta, \mu_i)}{\partial C_E^2} \cdot \mathbf{F}^T \right] \cdot \mathbf{D}_E d\tau \right) \cdot \mathbf{F}^T. \quad (3.6)$$

В последних выражениях временные аргументы у величин опущены.

Полученные определяющие уравнения не вполне удобны для реализации. В предыдущем разделе кинематические величины в текущей конфигурации (в момент времени  $t$ ) представлялись через их значения в промежуточной конфигурации (в момент времени  $t_*$ ) и приращения при переходе в близкую текущую. Такая форма представления, которую можно назвать рекуррентной, есть не что иное как разложение соответствующих величин в ряд по  $\varepsilon$  с удержанием только линейных относительно  $\varepsilon$  слагаемых в силу близости промежуточной и текущей конфигураций. Поступая аналогично с величинами, входящими в (3.6), и представляя интеграл от 0 до  $t$  в виде двух интегралов от 0 до  $t_*$  и от  $t_*$  до  $t$ , преобразуем соотношение (3.6), сохраняя только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые, относительно промежуточной конфигурации (см. [2]):



симости являются функциями температуры:  $a_k = a_k(\theta)$ . Из этого следует, что если  $\Lambda_P = 0$ , то и  $\mu = 0$ . Функция  $\mu$ , представленная в такой форме, позволяет описать, например, процесс рекристаллизации: возрастание температуры и достижение ею критического значения, называемого температурой рекристаллизации  $\theta_R$ , приводит к  $a_k(\theta_R) = 0$  и, следовательно, к  $\mu = 0$ , в то время как мера пластических деформаций  $\Lambda_P$  остается неизменной.

В результате, используя соотношение (3.13), неравенство Клаузиуса – Дюгема переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{T} - 2J^{-1} \mathbf{F} \cdot W_{1, c_{k2}} \cdot \mathbf{F}^T \right) \cdot \mathbf{D}_E + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_\theta - \\ & - J^{-1} \rho_0 \left( \frac{\partial W_{1, \mu}}{\rho_0} + \psi_{3, \mu} \right) \mu_{, \Lambda_P} \dot{\Lambda}_P - \\ & - J^{-1} \rho_0 \left[ \frac{\partial W_{1, \theta}}{\rho_0} + \psi_{2, \theta} + \left( \frac{\partial W_{1, \mu}}{\rho_0} + \psi_{3, \mu} \right) \mu_{, \theta} + s \right] \dot{\theta} - \\ & - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \theta \geq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Связав  $\dot{\theta} = \mathbf{D}_\theta$  с изменением температуры  $\dot{\theta}$  простейшим законом линейного температурного расширения  $\dot{\theta} = \beta \dot{\theta} \mathbf{g}$ , где  $\beta$  – коэффициент линейного температурного расширения, который полагаем функцией только температуры, и, построив линейное локальное продолжение процесса [6], получаем с учетом (3.11), (3.12), что первая скобка в (4.1) тождественно равна нулю. Это означает, что определяющее уравнение (3.5) или (3.6) термодинамически допустимо. Из равенства нулю выражения при  $\dot{\theta}$  в неравенстве (4.1) вытекает соотношение для энтропии

$$s = \frac{J\beta}{\rho_0} I_1(\mathbf{T}) - \left[ \frac{\partial W_{1, \theta}}{\rho_0} + \psi_{2, \theta} + \left( \frac{\partial W_{1, \mu}}{\rho_0} + \psi_{3, \mu} \right) \mu_{, \theta} \right], \quad (4.2)$$

и оставшееся неравенство имеет вид

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} (W_{1, \mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu}) \mu_{, \Lambda_P} \dot{\Lambda}_P - \mathbf{q} \cdot \tilde{\nabla} \ln \theta \geq 0. \quad (4.3)$$

Из соотношений (3.5) или (3.6) и (3.9) следует, что если осуществляется чисто температурный процесс деформирования, т.е.  $\dot{C}_{k2} = 0$  или, что эквивалентно,  $\mathbf{D}_E = 0$  и  $\mu = 0$ , то напряжение  $\mathbf{T}$  и производные  $W_{1, \mu}$  и  $W_{1, \theta}$  равны нулю. В этом случае из (4.2) вытекает, что  $s = -\psi_{2, \theta}$  и из первого закона термодинамики получаем, что  $\psi_{2, \theta\theta} = -c_T / \theta$ . Определяя теплоемкость при нулевом напряжении соотношением  $c_T = c_{T_0} + \int_{\theta_0}^{\theta} c_{T_1}(\theta_1) d\theta_1$  находим функцию  $\psi_2(\theta)$ .

Конкретное выражение для этой функции приведено в [3].

Как известно, собственная диссипация в термодинамическом процессе определяется соотношением

$$\varphi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}).$$

Используя первый закон термодинамики

$$\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta} + \theta\dot{s}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} + \rho\Omega - \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{q}, \quad (4.4)$$

где  $\Omega$  – скорость производства тепла внутренними источниками, и принимая во внимание выражение для  $\dot{\psi}$  и соотношение (4.2), получаем, что

$$\varphi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} (W_{1, \mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu}) \mu_{, \Lambda_P} \dot{\Lambda}_P.$$

Отсюда следует, что собственная диссипация равна нулю, если неупругие деформации и структурные изменения, произошедшие в материале от этих деформаций, остаются неизменными. Используя закон Фурье для теплового потока  $\mathbf{q} = -\lambda \tilde{\nabla} \theta$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, получаем из первого закона термодинамики (4.4) соотношение для производства энтропии:

$$\begin{aligned} J^{-1} \rho_0 \theta \dot{s} = & \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} - J^{-1} (W_{1, \mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu}) \mu_{, \Lambda_P} \dot{\Lambda}_P + \\ & + \rho\Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \theta). \end{aligned}$$

Энтропия производится внешними источниками тепла (два последних слагаемых в правой части) и латентными источниками, которые зависят от мощности неупругого деформирования и скорости структурных изменений в материале. Для чисто термоупругого процесса без внешних источников тепла  $\dot{s} = 0$ . Из соотношения для производства энтропии вытекает уравнение теплопроводности (см. [3])

$$c\dot{\theta} = \dot{Q}_E + \dot{Q}_{IN} + \rho\Omega + \tilde{\nabla} \cdot (\lambda \tilde{\nabla} \theta), \quad (4.5)$$

где теплоемкость

$$\begin{aligned} c = & J^{-1} \rho_0 c_T + \theta \left\{ (\beta_{, \theta} + 2\beta^2) I_1(\mathbf{T}) + \right. \\ & + \beta \left[ I_1(\mathbf{T}, \theta) + I_1(\mathbf{T}, \mu) \mu_{, \theta} \right] - J^{-1} \left[ W_{1, \theta\theta} + \right. \\ & + 2W_{1, \theta\mu} \mu_{, \theta} + (W_{1, \mu\mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu\mu}) (\mu_{, \theta})^2 + \\ & \left. \left. + (W_{1, \mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu}) \mu_{, \theta\theta} \right] \right\}, \end{aligned}$$

скорость производства тепла упругими источниками

$$\dot{Q}_E = \theta \left[ \mathbf{T}, \theta + \mathbf{T}, \mu \mu_{, \theta} - 2\beta \mathbf{T} - \beta(\mathbf{g} \cdot \mathbf{L}^{IV}) \right] \cdot \mathbf{D}_E$$

и скорость производства тепла неупругими источниками и структурными изменениями в материале

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{IN} = & (1 - 2\beta\theta) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN} + J^{-1} \dot{\Lambda}_P \times \\ & \times \left\{ \left[ \theta W_{1, \theta\mu} - W_{1, \mu} - \rho_0 \psi_{3, \mu} - J\beta\theta I_1(\mathbf{T}, \mu) \right] \mu_{, \Lambda_P} + \right. \\ & + \theta (W_{1, \mu\mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu\mu}) \mu_{, \theta} \mu_{, \Lambda_P} + \\ & \left. + \theta (W_{1, \mu} + \rho_0 \psi_{3, \mu}) \mu_{, \theta\Lambda_P} \right\}. \end{aligned}$$

В рамках линейной упругости уравнение теплопроводности (4.5) сводится к известному соотношению.

Граничные условия для уравнения теплопроводности записываются в виде

$$\theta|_{S_\theta} = \theta_S, \quad \mathbf{N} \cdot \lambda \tilde{\nabla} \theta|_{S_q} = q_n, \quad S = S_\theta \cup S_q,$$

где  $S$ ,  $S_\theta$  и  $S_q$  - полная поверхность тела в текущей конфигурации, поверхность, на которой задана температура, и поверхность, на которой задан тепловой поток ( $S_\theta$  или  $S_q$  могут быть пустыми множествами),  $\mathbf{N}$  - внешняя единичная нормаль к поверхности тела в текущей конфигурации. Полагая  $q_n = \alpha_S (\theta - \theta_C)$ , где  $\alpha_S$  - коэффициент теплопередачи, а  $\theta_C$  - абсолютная температура окружающей среды, получаем граничное условие третьего рода.

### 5. ОГРАНИЧЕНИЯ, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ТЕРМОДИНАМИКИ

Описание кинематики процесса деформирования зависит от выбора системы отсчета, в то время как скалярные и силовые характеристики процесса должны быть независимы от такого выбора (принцип объективности или материальной независимости от выбора системы отсчета). В уравнения термодинамики входят мощности  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_E$ ,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN}$  и  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_\theta$ . В работе [3] показано, что без дополнительных ограничений эти скаляры зависят от выбора систем отсчета для описания неупругой и температурной кинематики. Объективность же этих соотношений будет выполняться, если градиенты места  $\mathbf{F}_{IN}$  и  $\mathbf{F}_\theta$  будут чистыми деформациями без вращений:  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN}$ ,  $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{U}_\theta = \mathbf{V}_\theta$ , т.е. если в полярных разложениях тензоров  $\mathbf{F}_{IN} = \mathbf{R}_{IN} \cdot \mathbf{U}_{IN} = \mathbf{V}_{IN} \cdot \mathbf{R}_{IN}$ , и  $\mathbf{F}_\theta = \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{U}_\theta = \mathbf{V}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta$  ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_\theta$  будут равны единичным:  $\mathbf{R}_{IN} = \mathbf{R}_\theta = \mathbf{g}$ . Последние условия определяют недостающую связь между  $\mathbf{e}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_{IN}$  и между  $\mathbf{e}_\theta$  и  $\mathbf{d}_\theta$ . Недостающей она является в силу того, что определяющие уравнения известны только для малых неупругих и температурных деформаций (скоростей), переводящих промежуточную конфигурацию в близкую текущую. В пластичности, например, это ассоциированный закон, в вязкости - дифференциальный закон  $\dot{\mathbf{e}}_{IN} = \mathbf{T} / \eta$ , где  $\eta$  - вязкость, в термоупругости - закон линейного температурного расширения. Для малых вращений (скоростей) подобного типа соотношений нет.

Учитывая сказанное выше, ортогональные тензоры  $\mathbf{R}_{IN}$  и  $\mathbf{R}_\theta$  в полярных разложениях этих градиентов места должны быть единичными в любой момент времени. Отсюда следует, что в соотношении (2.15)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* = \mathbf{g}$  и тогда

$$\mathbf{P}_C = \frac{U_i - U_j}{U_i + U_j} (\delta_i^{(2)} \cdot \mathbf{P}_S \cdot \delta_j^{(2)}) \delta_i^{(2)} \delta_j^{(2)}.$$

Представляя тензор  $\mathbf{P}_C$  в базисе  $\delta_i^{(2)}$ , приходим к уравнению

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_C + \mathbf{P}_C \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}_S - \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{U},$$

которое для определения  $\mathbf{d}_{IN}$  и  $\mathbf{d}_\theta$  примет вид

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{IN} + \mathbf{d}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\theta*} \cdot \mathbf{F}_{E*}^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_{IN} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{IN};$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_\theta + \mathbf{d}_\theta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_*^{-T} \cdot \mathbf{U}_{\theta*} \cdot \mathbf{F}_*^{-1}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_\theta.$$

Общий вид этих уравнений  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ , где  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$  или  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ , а  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_{IN}$  или  $\mathbf{X} = \mathbf{d}_\theta$ , и такое уравнение имеет единственное решение, если тензоры  $\mathbf{A}$  и  $-\mathbf{B}$  не имеют общих собственных значений (см. [8,9]). Рассматриваемые уравнения удовлетворяют этому условию.

### 6. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

В работе [10] рассмотренная выше теория использована для решения связанной термоупругой задачи о больших деформациях в стежне при его изотермическом и адиабатическом растяжении. Осуществлена вариационная постановка задачи. Показано, что соотношения теории адекватно описывают такие экспериментальные факты поведения эластомеров, как энтропийная упругость, температурная инверсия и снижение температуры на начальном участке адиабатического растяжения с последующим ее возрастанием.

В работе [7] в рамках изложенной выше теории построена модель вязкоупругого изотермического процесса с большими деформациями и конечным спектром времен релаксации. Параметры модели идентифицированы, используя экспериментальные данные для реального материала. Идентифицированная модель с приемлемой точностью описала как другие независимые эксперименты, так и эффекты, присущие вязкоупругому материалу.

В работе [11] построена эволюционная модель термоупругопластичности, которая использована для описания экспериментальных результатов по адиабатическому сжатию образцов. Известно, что часть пластической работы, затраченной на деформирование материалов, переходит в тепло, а часть идет на изменение энергий дислокаций, дефектов и т.п. и энергий их взаимодействия. Для оценки доли общего количества пластической работы, перешедшей в тепло, вводится величина  $\gamma = \dot{Q}_{IN} / (\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{IN})$  и экспериментально определяется зависимость  $\gamma$  от накопленной меры пластической деформации

$$\Lambda_P = \int_0^t \mathbf{D}_{IN}(\tau) \cdot \mathbf{D}_{IN}(\tau) d\tau.$$

Показано, что при определенных предположениях и допущениях, основанных на данных экспериментов,

$$\gamma = (1 - 2\beta\theta) - J^{-1} \rho_0 \frac{\rho_0}{\sigma_i} \frac{\partial \psi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \Lambda_P}.$$

Полагалось, что  $\mu(\Lambda_P)$  слабо меняется при малых  $\Lambda_P$ , затем скорость этого изменения значительно возрастает и, наконец, кривая выходит на насыщение. Такое поведение  $\mu(\Lambda_P)$  описывалось двумя экспоненциальными функциями с тремя параметрами, и принималось, что  $\psi_3(\mu) = a\mu + b\mu^2$ . Входящие в  $\mu$  и  $\psi_3$  коэффициенты находились из условия наилучшего приближения к экспериментальной кривой методом сканирования по этим коэффициентам и максимальное отклонение оказалось не больше 0.7%. Доказано выполнение неравенства (4.3). Идентифицированная таким образом модель использовалась для описания изменения температуры в процессе адиабатического сжатия и продемонстрировала приемлемые результаты.

В работах [12–14] теория применена для построения моделей поведения сплава с памятью формы и мягкого магнитного материала в постоянном в начальной конфигурации внешнем магнитном поле.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все кинематические и силовые величины в сложных средах определяются историей термо-упруго-неупругого процесса, происходящего в них. Для описания истории процесса наиболее удобна процедура, основанная на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Обычно эта процедура используется при решении нелинейных краевых задач методом последовательного нагружения (силового и/или кинематического). Однако, как показано в [15] и в настоящей статье, эта процедура эффективна и для построения кинематических соотношений термо-упруго-неупругого процесса и определяющих уравнений, которые удовлетворяют принципам термодинамики и объективности.

Работа выполнена в ведущей научной школе (грант Президента РФ НШ-7529.2010.1) в рамках программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (№ 09-Т-1-1006), программы совместных фундаментальных исследований УрО РАН, СО РАН и ДВО РАН (№ 09-С-1-1008), государственного контракта с Федеральным агентством по науке и инновациям (№ 02.740.11.0442) и при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00055, № 10-01-96008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Новокшанов Р.С., Роговой А.А. О построении эволюционных определяющих соотношений для конечных деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 4. С.77–95.
- Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // ПМТФ. 2005. Т.46. № 5. С.138–149.
- Роговой А.А. Термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2007. Т.48. № 4. С.144–153.
- Роговой А.А. Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента // Вестник ПермГТУ. Динамика и прочность машин. 2001. № 2. С.83–90.
- Роговой А.А. Кинематика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т.49. № 1. С.165-172.
- Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
- Новокшанов Р.С., Роговой А.А. Эволюционные определяющие соотношения для конечных вязкоупругих деформаций // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С.122-140.
- Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 552 с.
- Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
- Роговой А.А., Столбова О.С. Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // ПМТФ. 2008. Т.49. № 3. С.184-196.
- Роговой А.А. Конечные деформации в материалах со структурными изменениями // Электр. журнал «Физико-химическая кинетика в газовой динамике». 2011. Т. 11. URL: [www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-021.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-021.pdf)
- Роговой А.А., Столбова О.С. Построение определяющих соотношений упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в материалах с памятью формы // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред (Электронный ресурс). Пермь-Екатеринбург. 2011. Электрон. оптич. диск. (CD). 10 с.
- Путин Н.А., Роговой А.А. Деформирование пластины в магнитном поле // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред (Электронный ресурс) Пермь-Екатеринбург, 2011. Электрон. оптич. диск. (CD). 7 с.
- Путин Н.А., Роговой А.А., Столбова О.С. Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в материалах с памятью формы и упругих процессов в мягких магнитных материалах // 4-я Всероссийская Школа-семинар «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем». Сб. научн. тр., М.: Институт проблем механики РАН. 2011. С.107-112.
- Роговой А.А. Кинематика и термодинамика упруго-неупругого процесса при конечных деформациях // Электр. журнал «Физико-химическая кинетика в газовой динамике». 2008. Т.7. URL: [www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-022.pdf)