

# Pairing Mathematical Models of Non-Axial Symmetric RF Discharge and Coaxial Pulsed Plasma Engine

V.V. Kuzenov<sup>1,2,3</sup>, S.V. Ryzhkov<sup>3</sup>

1 – Federal state unitary enterprise All-Russia research institute of automatics (VNIAA) of SC «ROSATOM» company, 22, ul. Sushchevskaya, Moscow 127055, Russia

2 – Institute for problem in mechanics RAS, Russia, Moscow, 119526

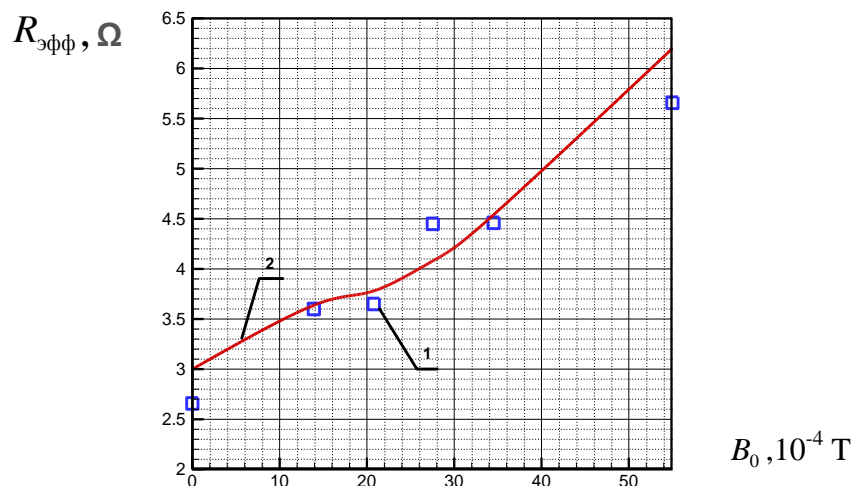
vik.kuzenov@gmail.com

3 – Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,

svryzhkov@gmail.com

## Abstract

Improved (considered not axially symmetric approach of RF discharge, take into account corresponding Fourier components of the current density of the antenna) for approximation, a mathematical model of the RF power helicon type. Developed and interfaced (with the RF source), approximate mathematical model of the coaxial magneto-plasma accelerator (with the preionization of the working substance helicon discharge), which allows you to estimate the transformation of one form of energy into another, as well as to evaluate the level of contribution of different types of energy, the increase in mass of the accelerated plasmoid on the process of changing speed.



Comparison of experimental (1) and settlement (2) the dependence of effective plasma  $R_{\phi\phi}$  resistance of the external magnetic field  $B_0$ .  $P_{\text{hel}} = 100 \text{ W}$ ,  $p = 0.67 \text{ Pa}$ ;  $R = 0.075 \text{ m}$ ;  $L = 0.2 \text{ m}$

Keywords: RF discharge of low pressure, helicon discharge, coaxial magneto-plasma accelerator, a mathematical model, ionization, non-uniform electric and magnetic fields

УДК 537.525,533.9

# Сопряжение математических моделей неаксиально-симметричного ВЧ-разряда и коаксиального импульсного плазменного двигателя

В.В. Кузенов<sup>1,2,3</sup>, С.В. Рыжков<sup>3</sup>

1 – Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова»

предприятие госкорпорации «РОСАТОМ», Москва, 127055, Суцьевская ул., д.22

2 – Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, 119526,

проспект Вернадского 101-1

vik.kuzenov@gmail.com

3 – МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

svryzhkov@bmstu.ru

## Аннотация

Усовершенствована приближенная математическая модель ВЧ-источника геликонного типа (рассматривается неаксиально-симметричное приближение ВЧ-разряда, учтены соответствующие фурье компоненты плотности тока антенны). Разработана и сопряжена (с ВЧ-источником) приближенная математическая модель коаксиального магнито-плазменного ускорителя (с преионизацией рабочего вещества геликонным разрядом), которая позволяет выполнить оценку трансформации одного вида энергии в другой, а также оценить уровень вклада различных видов энергии, увеличение массы ускоряемого плазменного сгустка на процесс изменения скорости.

Ключевые слова: ВЧ-разряд низкого давления, геликонный разряд, коаксиальный магнито-плазменный ускоритель, математическая модель, ионизация, неоднородные электрические и магнитные поля

## 1. Введение

Геликонный разряд – это высокоэффективный источник относительно плотной плазмы ( $\sim 10^{13}$  см<sup>3</sup>), представляющий собой разновидность ВЧ индукционного разряда, помещенного в слабое (50 – 600 Гс) внешнее магнитное поле (кроме этого в техническую систему ВЧ-источника входит ионно-оптическая система). В этом случае для создания высокоэффективного источника ионов частота внешнего генератора мощности  $\omega$  и геометрические размеры  $(R, L)$  газоразрядной камеры подбираются так, чтобы можно было возбудить в ВЧ-плазме разряда систему собственных объемных колебаний геликонного (магнитостатического – в виде быстрой поперечной волны) и ленгмюровского (электростатического – в виде медленной продольной волны) типа. При этом частота  $\omega$ , на которой работает внешний генератор мощности, лежит между электронной  $\omega_H$  и ионной  $\Omega_H$  ларморовскими частотами  $\Omega_H < \omega < \omega_H$ .

Основными элементами (представленными в данной работе) приближенной математической модели ВЧ–источника плазмы и коаксиального магнитоплазменного ускорителя (КМПУ) являются:

- математическая модель, учитывающая потери ВЧ мощности во внешней цепи источников плазмы (эти потери, при некоторых условиях, могут быть значительными) и описывающая механизмы поглощения ВЧ мощности плазмой, а также физические процессы, сопровождающие взаимодействие электромагнитная волна–плазма;
- математическая модель, позволяющая находить математические связи между мощностью  $P_{hell}$ , вкладываемой в плазму геликонного разряда, и теплофизическими параметрами плазмы;
- математическая модель, которая дает возможность выполнить расчет основных электрофизических характеристик коаксиального импульсного магнитоплазменного ускорителя с емкостным источником питания и системой предиионизации рабочего газа на основе геликонного разряда.

## 2. Математическая модель возбуждения собственных волн в плазме ВЧ–источника ионов при наличие в газоразрядной камере внешнего магнитного поля

В данном разделе рассматривается математическая модель (в неаксиально-симметричном приближении:  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \neq 0$ ,  $\vec{j} = j_\varphi \vec{i}_\varphi + j_z \vec{i}_z$ ), которая описывает процессы, связанные с поглощением и возбуждением объемных собственных волн в плазме ВЧ–источника ионов, помещенной в слабое внешнее магнитное поле.

При математическом описании физических процессов в ВЧ–источнике ионов примем, что сплошная среда, находящаяся в газоразрядной камере является низкотемпературной плазмой, в которой внешнее однородное магнитное поле  $\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = 0$  направлено по оси  $z$  цилиндрической системы координат (т.е.  $\vec{B}_0 \parallel \vec{e}_z$ ). В этом случае тензор диэлектрической проницаемости плазмы  $\varepsilon$  может быть записан в виде (1):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Компоненты тензора  $\varepsilon$  в случае двухкомпонентной плазмы, состоящей из распределенных по максвеллу электронов и ионов одного сорта [1–3] при учёте электрон-нейтральных, ион–нейтральных и электрон–ионных столкновений в плазме и пренебрежении электрон–электронными соударениями, задаются формулами (2):

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon_\perp^{\text{Re}} + i\varepsilon_\perp^{\text{Im}} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 (\omega + iv_e)}{[(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2] \omega} - \frac{\omega_{Li}^2 (\omega + iv_i)}{[(\omega + iv_i)^2 - \Omega_i^2] \omega} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k_z V_{Te}} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 V_{Te}^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega k_z V_{Ti}} \exp\left(-\frac{(\omega + \Omega_i)^2}{2k_z^2 V_{Ti}^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
 g &= g^{\text{Re}} + ig^{\text{Im}} = -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\left[(\omega + iv_e)^2 - \Omega_e^2\right] \omega} + \frac{\omega_{Li}^2 \Omega_i}{\left[(\omega + iv_i)^2 - \Omega_i^2\right] \omega} + \\
 &+ i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega k_z V_{Te}} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 V_{Te}^2}\right) - i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega k_z V_{Ti}} \exp\left(-\frac{(\omega + \Omega_i)^2}{2k_z^2 V_{Ti}^2}\right), \\
 \varepsilon_{\square} &= \varepsilon_{\square}^{\text{Re}} + i\varepsilon_{\square}^{\text{Im}} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega + iv_e)\omega} - \frac{\omega_{Li}^2}{(\omega + iv_i)\omega} + \\
 &+ i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k_z^3 V_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 V_{Te}^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2 \omega}{k_z^3 V_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 V_{Ti}^2}\right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где  $\omega$  – частота высокочастотного электромагнитного поля, возникающего в плазме геликонного разряда от антенн различных конфигураций,  $\omega_{Li} = \sqrt{4\pi n_i e^2 / M_i}$ ,  $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$  – ленгмюровские частоты ионов и электронов с концентрациями  $n_i$  и  $n_e$  соответственно,  $\Omega_e = eB/m_e c$ ,  $\Omega_i = eB/M_i c$  – ларморовские частоты вращения электронов и ионов во внешнем магнитном поле  $|\overline{B_0}|$ ,  $V_{Te} = \sqrt{kT_e/m_e}$ ,  $V_{Ti} = \sqrt{kT_i/M_i}$  – тепловые скорости электронов и ионов,  $\nu_e = \nu_{en} + \nu_{ei}$  – частота столкновений электронов,  $\nu_{en} = n_0 V_{Te} \sigma_{ion}$  – частота столкновений (с ионизацией) электронов с нейтральными частицами,  $n_0$  – концентрация нейтральных частиц в плазме геликонного разряда,  $\sigma_{ion}$  – дифференциальное сечение ионизации электронами нейтралов,  $\ln \Lambda_{ei}$  – кулоновский логарифм учитывающий взаимодействие электронов и ионов,  $\nu_{ei,k}$  – средняя частота электрон–ионных столкновений (с ионом сорта  $k$ ) с передачей импульса.

В тензоре (2) диэлектрической проницаемости плазмы  $\varepsilon$  учтено столкновительное, бесстолкновительное поглощение электромагнитных волн в плазме.

Материальные уравнения плазмы записываются следующим образом (3):

$$\overline{B} = \overline{H}, \quad (3)$$

$$D_r = \varepsilon_{\perp} E_r + igE_{\varphi}, \quad D_{\varphi} = \varepsilon_{\perp} E_{\varphi} - igE_r, \quad D_z = \varepsilon_{\square} E_z.$$

С целью получения приближенного решения предположим, что все коэффициенты близки к коэффициентам, рассчитанным по термодинамическим параметрам плазмы, полученным путем усреднения по объему газоразрядной камеры геликонного разряда.

В связи с тем, что антенна представляет собой проводник (медная трубка), который навивается на боковую поверхность цилиндрической разрядной колбы (газоразрядной камеры), то её пространственную форму можно представить отрезком спирали и описать уравнениями винтовой линии (4):

$$x_{gel}(z) = (R+a)\cos(2\pi z/h), \quad y_{gel}(z) = (R+a)\sin(2\pi z/h), \quad z_{gel} \equiv z, \quad (4)$$

где  $R, a$  – радиусы камеры и антенны, которая навита в виде спирали на газоразрядную камеру,  $h = L/n$  – шаг антенны. При этом длина одного витка вдоль винтовой линии равна

$$L_{gel} = 2\pi \sqrt{(R+a)^2 + h^2} \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Отсюда следует, что возможно решение задачи представить в виде конечного ряда Фурье и ограничиться единственной модой:

$$\vec{E}(r, \varphi, z, t) = \vec{E}(r) \exp[-i\omega t + i\ell\varphi + ik_z z], \quad \vec{B}(r, \varphi, z, t) = \vec{B}(r) \exp[-i\omega t + i\ell\varphi + ik_z z],$$

где  $\ell$  – азимутальный индекс  $\ell = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ ,  $k_z = \pi n/L$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) – продольная компонента волнового вектора. Тогда уравнения Максвелла в цилиндрических координатах с учётом материальных уравнений (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{r} E_z - k_z E_\varphi &= \frac{\omega}{c} B_r; \quad ik_z E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = i \frac{\omega}{c} B_\varphi; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - i \frac{\ell}{r} E_r = i \frac{\omega}{c} B_z, \\ \frac{\ell}{r} B_z - k_z B_\varphi &= -\frac{\omega}{c} (\varepsilon_\perp E_r + ig E_\varphi); \quad ik_z B_r - \frac{\partial B_z}{\partial r} = -i \frac{\omega}{c} (\varepsilon_\perp E_\varphi - ig E_r) + \frac{4\pi}{c} j_\varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - i \frac{\ell}{r} B_r &= -i \frac{\omega}{c} (\varepsilon_\square E_z) + \frac{4\pi}{c} j_z. \end{aligned}$$

Данную систему уравнений (предположив постоянными её коэффициенты по объёму разряда) можно свести к двум зацепляющимся уравнениям относительно компонент  $E_z$ ,  $B_z$  электромагнитного поля [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \left( \frac{\omega D}{c \lambda} - \frac{\ell^2}{r^2} \right) B_z &= -i \frac{v}{\lambda} \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} E_z \right), \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left( \frac{\omega \varepsilon_\square D}{c \mu} - \frac{\ell^2}{r^2} \right) E_z &= i \frac{v}{\mu} \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} B_z \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu = \frac{\omega}{c} \left( \varepsilon_\perp p^2 + \frac{\omega^2}{c^2} g^2 \right); \quad v = \frac{\omega^2}{c^2} k_z g, \quad \lambda = \frac{\omega}{c} p^2; \quad p^2 = k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp; \quad D = \frac{\omega^4}{c^4} g^2 - p^4.$$

Далее по тексту будет приведен полуаналитический способ нахождения решения осевых  $E_z, B_z$ , радиальных  $E_r, B_r$  и азимутальных  $E_\varphi, B_\varphi$  компонент напряженности электромагнитного поля внутри разрядной камеры.

Частное решение данной дифференциальной задачи можно искать в виде:

$$E_z = E \cdot J_\ell(kr), \quad B_z = B \cdot J_\ell(kr).$$

Подставив это частное решение в систему зацепляющихся уравнений относительно компонент  $E_z, B_z$  получим систему двух линейных алгебраических уравнений относительно величин  $E, B$ :

$$\left[ \frac{\omega D}{c \lambda} - k^2 \right] B - i \frac{v}{\lambda} k^2 E = 0, \quad -i \frac{v}{\mu} k^2 B + \left[ k^2 - \frac{\omega D}{c \mu} \varepsilon_\square \right] E = 0.$$

Эта система линейных алгебраических уравнений однородна и имеет нетривиальное решение только при условии, когда определитель  $\Delta$  равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\omega D}{c \lambda} - k^2 & -i \frac{v}{\lambda} k^2 \\ -i \frac{v}{\lambda} k^2 & k^2 - \frac{\omega D}{c \mu} \varepsilon_\square \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \left( 1 - \frac{v^2}{\lambda \mu} \right) k^4 - \frac{\omega}{c} \left( \frac{D}{\lambda} + \frac{D}{\mu} \varepsilon_\square \right) k^2 + \frac{\omega^2 D^2}{c^2 \lambda \mu} \varepsilon_\square = 0.$$

Условие  $\Delta = 0$  представляет собой биквадратное уравнение, которое позволяет найти два значения параметра  $k^2$  (и тем самым два частных решения:  $E_1 J_\ell(k_1 r)$  и  $E_2 J_\ell(k_2 r)$  и т.д.):

$$k_{1,2}^2 = \frac{b_k \pm \sqrt{b_k^2 - 4a_k c_k}}{2a_k},$$

где  $a_k = \left(1 - \frac{v^2}{\lambda\mu}\right)$ ;  $b_k = \frac{\omega}{c} \left(\frac{D}{\lambda} + \frac{D}{\mu} \varepsilon_\square\right)$ ;  $c_k = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{D^2}{\lambda\mu} \varepsilon_\square$ .

Общее решение записывается, как линейная комбинация частных решений:

$$E_z = E_1 J_\ell(k_1 r) + E_2 J_\ell(k_2 r), \quad B_z = B_1 J_\ell(k_1 r) + B_2 J_\ell(k_2 r).$$

Для нахождения коэффициентов  $E_1, E_2$  и  $B_1, B_2$  следует решить систему уравнений Максвелла не только в области  $r < R$ , но и вне области цилиндрической разрядной колбы геликонного разряда, т.е. в области  $r \geq R$ , а затем найденные решения "сшить" с помощью условий сопряжения при  $r = R$ :

$$E_{\varphi,2} - E_{\varphi,1} = 0, \quad B_{\varphi,2} - B_{\varphi,1} = -\frac{4\pi}{c} j_z(z,t)|_{r=R}, \quad j_z(z,t)|_{r=R} = \frac{I_0}{\pi R},$$

$$E_{z,2} - E_{z,1} = 0, \quad B_{z,2} - B_{z,1} = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi(z,t)|_{r=R}, \quad j_\varphi(z,t)|_{r=R} = -\frac{k_z R}{\ell} j_z.$$

Здесь учтено условие замкнутости линий тока  $\nabla \vec{j} = 0$  (для 2D случая это соотношение эквивалентно

$$j_z = -\frac{\ell}{k_z} \frac{1}{R} j_\varphi).$$

Уравнения Максвелла вне плазмы ( $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\square = 1, g = 0$ ) расщепляются на два независимых уравнения вида:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \left(p^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) B_z = 0, \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \left(p^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\right) E_z = 0.$$

Очевидно, что, так как решение задачи должно на бесконечности обращаться в ноль, то в области  $r \geq R$  ( $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\square = 1, g = 0$ ) решением задачи будет выражаться через функции Макдональда порядка  $\ell$ :

$$E_z = E_0 K_\ell(pr), \quad B_z = B_0 K_\ell(pr), \quad p = \sqrt{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp}.$$

При этом функции Макдональда  $K_\ell(kr)$  являются вещественными функциями вещественного аргумента  $pr$  (т.к.  $p \approx k_z$ ).

Коэффициенты  $B_1, B_2$  можно выразить через коэффициенты  $E_1, E_2$  с помощью следующего соотношения:

$$B_1 = \beta_1 E_1, \quad B_2 = \beta_2 E_2; \quad \beta_1 = k_1^2 - \frac{\omega}{c} \frac{D}{\mu} \varepsilon_\square \Big/ i \frac{v}{\mu} k_1^2; \quad \beta_2 = k_2^2 - \frac{\omega}{c} \frac{D}{\mu} \varepsilon_\square \Big/ i \frac{v}{\mu} k_2^2.$$

Радиальные  $E_r, B_r$  и азимутальные  $E_\varphi, B_\varphi$  компоненты напряженности электромагнитного поля внутри разрядной колбы выражаются через величины  $E_z, B_z$  с помощью следующих выражений: для области  $r < R$ :

$$\begin{aligned}
 E_\varphi &= \frac{(F_1 a_{21} - F_2 a_{11})}{(a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11})}; \quad B_\varphi = \frac{F_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{(F_1 a_{21} - F_2 a_{11})}{(a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11})}, \\
 a_{11} &= k_z \left( \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} - 1 \right); \quad a_{12} = i \frac{\omega}{c} g; \quad F_1 = i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\ell}{r} B_z, \\
 a_{21} &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{g}{k_z}; \quad a_{22} = i k_z \frac{c}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} - 1 \right); \quad F_2 = \frac{\omega}{c} \frac{g}{k_z} \frac{\partial E_z}{\partial r} - i k_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} E_z + \frac{\partial B_z}{\partial r}, \\
 B_r &= \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} E_z - \frac{c}{\omega} k_z E_\varphi; \quad E_r = \frac{\omega}{c} \frac{1}{k_z} B_\varphi - i \frac{1}{k_z} \frac{\partial E_z}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

для области  $r \geq R$  ( $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\square = 1, g = 0$ ):

$$\begin{aligned}
 E_\varphi^* &= \frac{F_2^*}{a_{22}^*}; \quad B_\varphi^* = \frac{F_1^*}{a_{11}^*}; \quad a_{11}^* = k_z \left( \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2} - 1 \right); \quad a_{12}^* = 0; \quad F_1^* = i \frac{\omega}{c} \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\ell}{r} B_z, \\
 a_{21}^* &= 0; \quad a_{22}^* = i k_z \frac{c}{\omega} \left( \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2} - 1 \right); \quad F_2^* = -i k_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} E_z + \frac{\partial B_z}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Подстановка полученных для областей  $r < R$  и  $r \geq R$  решений в условия сопряжения (при  $r = R$ ) приводит к системе (разрешаемой например, с помощью комплексного варианта метода Гаусса) комплексных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $E_0, B_0, E_1, E_2$ .

Для  $B_{z,2} - B_{z,1} = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi(z, t)|_{r=R}$ ;  $E_{z,2} - E_{z,1} = 0$ , имеем:

$$B_0 K_\ell(pR) - \beta_1 E_1 J_\ell(k_1 R) - \beta_2 E_2 J_\ell(k_2 R) = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi(z, t)|_{r=R},$$

$$E_0 K_\ell(pR) - E_1 J_\ell(k_1 R) - E_2 J_\ell(k_2 R) = 0,$$

Для  $(B_\varphi^* - B_\varphi)|_{r=R} = -\frac{4\pi}{c} j_z(z, t)|_{r=R}$ ;  $(E_\varphi^* - E_\varphi)|_{r=R} = 0$ , имеем:

$$\frac{F_1^*}{a_{11}^*} - \frac{F_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{(F_1 a_{21}/a_{11} - F_2)}{(a_{12} a_{21}/a_{11} - a_{22})} = \frac{F_1^*}{a_{11}^*} - \frac{F_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{F_2^*}{a_{22}^*} = -\frac{4\pi}{c} j_z(z, t)|_{r=R},$$

$$\frac{F_2^*}{a_{22}^*} - \frac{(F_1 a_{21} - F_2 a_{11})}{(a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11})} = 0,$$

При этом в области  $r < R$  коэффициенты  $F_1, F_2$  задаются с помощью следующих соотношений:

$$F_1 = \left[ i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} \frac{\partial J_\ell(k_1 r)}{\partial r} - \beta_1 \frac{\ell}{r} J_\ell(k_1 r) \right] E_1 + \left[ i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} \frac{\partial J_\ell(k_2 r)}{\partial r} - \beta_2 \frac{\ell}{r} J_\ell(k_2 r) \right] E_2,$$

$$F_2 = \left[ \frac{\omega}{c} \frac{g}{k_z} \frac{\partial J_\ell(k_1 r)}{\partial r} - i k_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} J_\ell(k_1 r) + \beta_1 \frac{\partial J_\ell(k_1 r)}{\partial r} \right] E_1 +$$

$$+ \left[ \frac{\omega}{c} \frac{g}{k_z} \frac{\partial J_\ell(k_2 r)}{\partial r} - ik_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} J_\ell(k_2 r) + \beta_2 \frac{\partial J_\ell(k_2 r)}{\partial r} \right] E_2.$$

А в области  $r \geq R$  ( $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = 1, g = 0$ ) коэффициенты  $F_1^*, F_2^*$  находятся с помощью выражений:

$$F_1^* = E_0 i \frac{\omega}{c} \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial K_\ell(pr)}{\partial r} - B_0 \frac{\ell}{r} K_\ell(pr), \quad F_2^* = -E_0 ik_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{r} K_\ell(pr) + B_0 \frac{\partial K_\ell(pr)}{\partial r}.$$

Данную систему комплексных линейных алгебраических уравнений при её численном решении удобно представить в матричной форме  $BY = F$ :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{pmatrix}, \quad Y = (E_0, B_0, E_1, E_2)^T, \quad F = \left( -\frac{4\pi}{c} j_\varphi(z, t)|_{r=R}, 0, -\frac{4\pi}{c} j_z(z, t)|_{r=R}, 0 \right)^T,$$

$$B_{11} = 0; \quad B_{12} = K_\ell(pR); \quad B_{13} = -\beta_1 J_\ell(k_1 R); \quad B_{14} = -\beta_2 J_\ell(k_2 R);$$

$$B_{21} = K_\ell(pR), \quad B_{22} = 0; \quad B_{23} = -J_\ell(k_1 R); \quad B_{24} = -J_\ell(k_2 R);$$

$$B_{31} = \frac{C_1^{1*}}{a_{11}^*} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{C_1^{2*}}{a_{22}^*}; \quad B_{32} = \frac{C_2^{1*}}{a_{11}^*} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{C_2^{2*}}{a_{22}^*}; \quad B_{33} = -\frac{C_1^{1*}}{a_{11}}, \quad B_{34} = -\frac{C_2^{1*}}{a_{11}};$$

$$B_{41} = \frac{C_1^{2*}}{a_{22}^*}, \quad B_{42} = \frac{C_2^{2*}}{a_{22}^*}; \quad B_{43} = -\frac{C_1^1 a_{21} - C_2^1 a_{11}}{(a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11})}; \quad B_{44} = -\frac{C_2^1 a_{21} - C_1^1 a_{11}}{(a_{12} a_{21} - a_{22} a_{11})};$$

$$C_1^1 = i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} \frac{\partial J_\ell(k_1 R)}{\partial r} - \frac{\ell}{R} \beta_1 J_\ell(k_1 R); \quad C_2^1 = i \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_\perp}{k_z^2} \frac{\partial J_\ell(k_2 R)}{\partial r} - \frac{\ell}{R} \beta_2 J_\ell(k_2 R);$$

$$C_1^2 = \frac{\omega}{c} \frac{g}{k_z} \frac{\partial J_\ell(k_1 R)}{\partial r} - ik_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{R} J_\ell(k_1 R) + \beta_1 \frac{\partial J_\ell(k_1 R)}{\partial r};$$

$$C_2^2 = \frac{\omega}{c} \frac{g}{k_z} \frac{\partial J_\ell(k_2 R)}{\partial r} - ik_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{R} J_\ell(k_2 R) + \beta_2 \frac{\partial J_\ell(k_2 R)}{\partial r};$$

$$C_1^{1*} = i \frac{\omega}{c} \frac{1}{k_z^2} \frac{\partial K_\ell(pR)}{\partial r}; \quad C_2^{1*} = -\frac{\ell}{R} K_\ell(pR); \quad C_1^{2*} = -ik_z \frac{c}{\omega} \frac{\ell}{R} K_\ell(pR); \quad C_2^{2*} = \frac{\partial K_\ell(pR)}{\partial r}.$$

Определив из этой системы комплексных линейных алгебраических уравнений коэффициенты  $E_0, B_0, E_1, E_2$  можно рассчитать распределение напряженностей электромагнитного поля внутри разрядной колбы (газоразрядной камеры) геликонного источника ионов и мощность  $W_{hel}$ , выделяемую в плазме.

Для расчета мощности  $W_{hel}$ , которая выделяется в плазме геликонного разряда, следует воспользоваться следующей формулой (5):

$$W_{hel} = \frac{L\omega}{4} \int_0^R r \left\{ \varepsilon_\perp^{\text{Im}} \left( |E_r|^2 + |E_\varphi|^2 \right) + \varepsilon_\parallel^{\text{Im}} |E_z|^2 + ig^{\text{Im}} \left( E_\varphi E_r^* - E_r E_\varphi^* \right) \right\} dr \quad (5)$$



### 3. Приближенная численная модель расчета теплофизических, электротехнических параметров плазмы в газоразрядной камере ВЧ-разряда

При построении модели расчета параметров плазмы в газоразрядной камере ВЧ-разряда сформулируем следующие упрощающие предположения [5–10]:

- функция распределения электронов по энергиям является максвелловской, плазма считается квазинейтральной ( $Z_i n_i^\Sigma = n_e^\Sigma$ );
- скорость движения нейтральных частиц  $V_a$  равна их наиболее вероятной скорости  $V_a = \sqrt{2kT_a/M_a}$  при температуре  $T_a$ , ионы считаются не замагниченными;
- скорость движения ионов в направлении, ортогональном оси симметрии системы  $V_i^\perp$ , совпадает с наиболее вероятной скоростью их движения в том же направлении;
- скорость истечения электронов через выходное торцевое отверстие геликонного источника ионов  $V_e^\square$  равна скорости истечения ионов  $V_e^\square \approx V_i^\Sigma = \sqrt{2kT_i/M_i}$ ;
- принимается, что температура ионов  $T_i$  и нейтральных частиц  $T_a$  не имеют равных значений  $T_i \neq T_a$ ;
- плазма геликонного разряда считается оптически прозрачной.

Для нахождения связи ( $P_{hel} = I_{эл.ц}^2 R_{Ant} + \alpha(B_0)W_{hel}$ ;  $W_{hel} = I_{эл.ц}^2 R_{эфф}/2$ , где  $\alpha(B_0)$  – доля энергии, поглощаемая плазмой разряда;  $B_0$  – напряженность внешнего магнитного поля) между мощностью  $W_{hel}$ , вкладываемой в плазму геликонного разряда, мощностью  $P_{hel}$ , подведенной к антенне, и параметрами плазмы, будем использовать приближенную “квазиодномерную” модель ВЧ-источника ионов [5–10].

Очевидно, что ВЧ разряд геликонного типа нельзя рассматривать, не учитывая влияние внешней цепи, а именно потерь мощности в системе согласования, индукторе, потерь на возбуждение индукционных токов в установочных фланцах, кожухе двигателя и т.д. (сопротивление внешней цепи и плазмы можно охарактеризовать ее эквивалентным сопротивлением).

Математическая модель, которая описывает потери подведенной к плазме разряда энергии во внешней электрической цепи приведена в работах [5–10].

Для возбуждения и поддержания ВЧ-разряда, как уже отмечалось выше, используются индукторы или различного рода антенны, некоторые их схематичные изображения показаны на рис. 1. Эти антенны крепятся с внешней или внутренней стороны стенки колбы источников плазмы, на его боковой или торцевой поверхности. Напомним, что здесь  $\ell$  – азимутальный индекс.

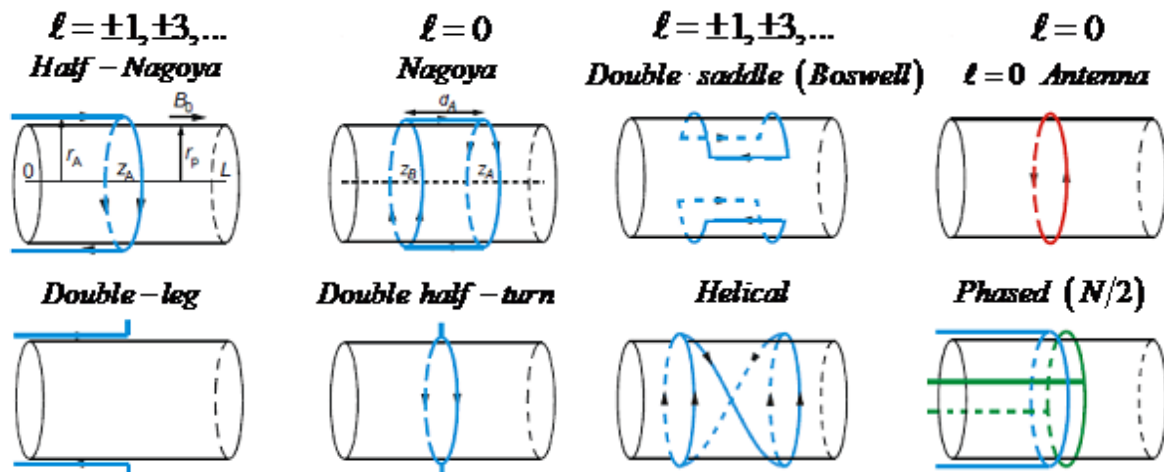


Рис. 1. Схемы различных типов антенн ВЧ-разряда

При работе ВЧ-источника ионов могут быть использованы спиральные антенны, зигзагообразные антенны, антенны *Nagoya* и антенны, позволяющие возбуждать разряд емкостным способом. Антенны, как правило, выполняются из медной трубки и в большинстве экспериментов охлаждаются потоком воды.

Для расчета мощности электромагнитной энергии  $W_{hel}$  (вводимой в ВЧ разряд), и нахождения осевых  $E_z, B_z$ , радиальных  $E_r, B_r$  и азимутальных  $E_\varphi, B_\varphi$  компонент напряженности электромагнитного поля внутри разрядной камеры необходимо определить значения фурье компонент плотности тока  $\vec{j}$  в антенне.

Найдем фурье компоненты плотности тока  $j_\varphi(t, \varphi, z)$  для антенны типа *Helical*. Эта антенна (рис. 2) состоит из двух кольцевых сегментов (радиусом  $R$ ) и двух криволинейных перемычек (длиной  $L$  вдоль оси  $z$ ). Фурье компоненты плотности тока  $\vec{j}$  получены в работе [11]:

$$j_\varphi(t, \varphi, z) = I_0 \left\{ \frac{i}{\pi \ell} [\delta(z - z_a) + \delta(z - z_a - L)] + \frac{H(z - z_a)H(z - z_a - L)}{L} e^{-i\pi \ell [1 + (z - z_a)/L]} \times \frac{e^{i\pi \ell} - 1}{2} \delta(r - R) \right\},$$

$$j_z(t, \varphi, z) = I_0 H(z - z_a)H(z_a + L - z) \frac{e^{-i\pi \ell [1 + (z - z_a)/L]}}{\pi R} \times \frac{1 - e^{i\pi \ell}}{2} \delta(r - R),$$

где  $H(\ )$  – функция Хевисайда,  $\delta(\ )$  – дельта функция Дирака.

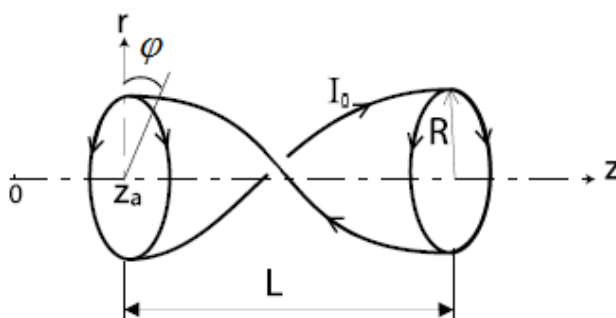


Рис. 2. Полувинтовая антенна ВЧ-разряда типа Helical

#### 4. Приближенная математическая модель коаксиального импульсного плазменного двигателя

Целью данного параграфа является построение замкнутой приближенной математической модели, которая позволит выполнить расчет основных электрофизических характеристик коаксиального импульсного магнитоплазменного ускорителя с емкостным источником питания и системой предионизации рабочего газа на основе геликонного разряда. Основными преимуществами данного типа двигателя можно считать относительно высокий (по сравнению с другими электрореактивными двигателями (ЭРД)) ресурс работы, возможность использования различных рабочих тел. Рассматриваемые ЭРД могут применяться в качестве двигателей коррекции и ориентации геостационарного или низкоорбитального (с массой менее 100 кг) космического аппарата, а также маршевых двигателей [13-16].

Схематичное изображение коаксиального магнитоплазменного ускорителя (КМПУ) с указанием всех необходимых обозначений показано на рис. 3 [17]. Из данного рисунка следует, что ускорительный канал КМПУ построен по принципу «труба в трубе», т.е. пред-

ставляет собой пространственную область между двумя трубами различного диаметра (цилиндрическим и центральным электродами), которые расположены одна внутри другой.

Цилиндрический электрод (рис. 3), имеет вид трубы постоянного сечения и обладает большим диаметром ( $2R_2$ ), чем центральный электрод (расположенный на оси симметрии КМПУ), который также является трубой, но меньшего диаметра ( $2R_1$ ). Кроме того, в конструкцию ускорителя входит соленоид (индуктор), состоящий из системы витков (с диаметром  $2R_i$ ) с круговым поперечным сечением.

Кратко опишем принцип работы КМПУ. После подачи напряжения  $U_0$  от емкостного источника питания (рис. 3) на центральный и цилиндрический электроды КМПУ происходит их электрическое замыкание с помощью проводящего плазменного сгустка, геометрически представляющего собой плазменный "диск". Этот плазменный "диск" создается путем пробоя газа (после подачи напряжения  $U_0$ ) и взаимодействия импульсного тока индуктора с кольцевым вихревым током в плазменном образовании, что, в свою очередь, приводит к возникновению электромагнитной силы, действующей на плазменный сгусток и обеспечивающей его первоначальное ускорение и втекание в ускорительный канал КМПУ. Далее (по времени) плазменный сгусток электромагнитным способом сжимается и доускоряется (в направлении оси симметрии). При этом электродинамическое ускорение плазменного сгустка в канале КМПУ основано на взаимодействии, описываемом законом Ампера, магнитного поля электрического контура с токнесущим плазменным сгустком.

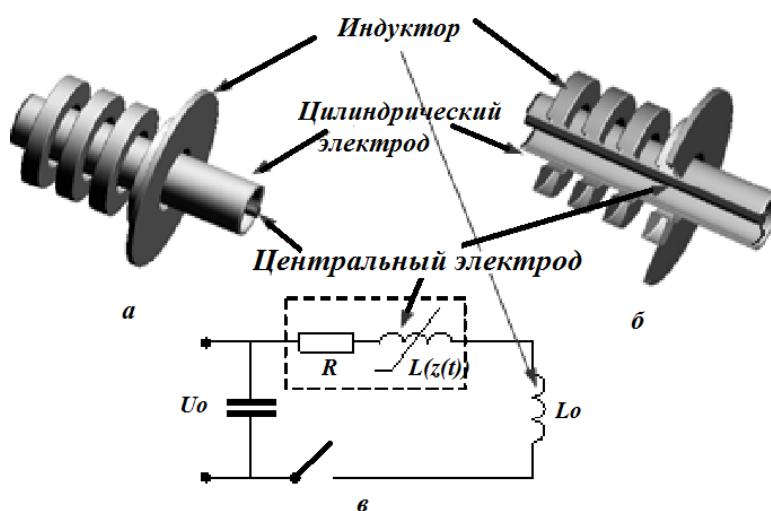


Рис. 3. Модельная конфигурация КМПУ, система "индуктор–ускоряемая плазменная струя": а) модель проводящей части плазменного ускорителя, б) сечение плазменного ускорителя, в) электротехническая схема замещения КМПУ

В общем случае математическое описание системы КМПУ–ускоряемый плазменный сгусток возможно на основе решения уравнения электрического контура, трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики и уравнений Максвелла с учетом соответствующих термодинамических уравнений состояний. Решение такой задачи связано с большими математическими и вычислительными трудностями, требует большого времени разработки программы и больших вычислительных ресурсов. Поэтому исследование процессов, происходящих в КМПУ, целесообразно свести к расчету переходных процессов в электротехнической схеме замещения.

Основное допущение, положенное в основу построения схемы замещения, заключается в том, что проводимость материала ускоряемого плазменного сгустка полагалась бесконечной ( $\sigma = \infty$ ). Такое приближение будет оправдано в том случае, если глубина диффузии-

онного проникновения магнитного поля в плазму материала ускоряемого сгустка  $\delta_g(t)$  будет меньше, чем толщина области занятой плазмой  $\delta$  на стадии её эффективного ускорения, а уровень джоулевых потерь энергии в ускоряемой плазме будет значительно меньше, чем её кинетическая энергия. Величина омических потерь энергии в ускоряемой плазме, как правило, не велики и в самых “энергонапряженных” режимах их доля не превышает 3÷5% от начальной энергии емкостного источника питания.

Вторым допущением модели КМПУ является то, что при расчете магнитного поля используется приближенность задания геометрии индуктора, которая представляется в виде системы концентрически расположенных  $N$  колец, по каждому из которых протекает одинаковый ток  $J(t)$ , сосредоточенный в геометрическом центре поперечного сечения витка (пренебрегаем пространственным распределением плотности тока в поперечном сечении витка).

Расчет электромагнитной силы  $F$ , действующей на ускоряемую плазму, осуществляется на основе общего выражения, приведенного в работе [18] с использованием сил токов  $J_j, J_i$ , протекающих в произвольных контурах системы “КМПУ–ускоряемая плазма”:

$$F_q = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_i J_j \frac{\partial L_{ij}}{\partial q}, \quad (6)$$

где  $J_j, J_i$  – токи, протекающие в  $j$ -ом и  $i$ -ом контурах,  $L_{ij}$  – коэффициент взаимной индукции  $j$ -ого и  $i$ -ого контуров,  $q$  – обобщенная координата.

В рамках сделанных допущений выражение (6) может быть записано в виде:

$$F_q = \frac{1}{2} J^2 \sum_{ij} \frac{\partial L_{ij}}{\partial z} = \frac{1}{2} J^2 \frac{\partial L}{\partial z}, \quad (7)$$

где  $J$  – ток в круговом витке индуктора, или, что тоже самое ток в электрическом контуре системы ускорения,  $L$  – суммарная индуктивность всей системы электромагнитного ускорения КМПУ.

Теоретические [18] и экспериментальные [19] исследования позволяют говорить о том, что существенное влияние на процесс ускорения плазменного сгустка, оказывают теплофизические параметры газов, которые заполняют канал импульсного плазменного ускорителя. Так, например [19], максимальная скорость движения плазменного поршня имеет некий предел, который обусловлен сопротивлением окружающей среды и уменьшением ускорения плазмы при вовлечении в движение части материалов, испаренных с электродов технической системы. Далее будем считать [19], что масса ускоряемой плазмы изменяется за счет абляции электродов под действием её собственного широкополосного излучения и процессов вовлечения в движение плазмы, первоначально заполняющей ускорительный канал КМПУ, торможение плазменного сгустка осуществляется за счет давления сжатого в головной ударной волне окружающего газа. Для  $J \geq 300$  кА величина коэффициента  $\alpha$  слабо зависит от величины тока  $J$  и находится в диапазоне значений  $\alpha \approx (2 \div 5) \times 10^{-12}$  кг/(А<sup>2</sup>·с) [20].

Исходная система уравнений, соответствующая модельной конфигурации системы “КМПУ–ускоряемый плазменный сгусток” и описывающая динамику электромагнитного ускорения (с идеально проводящими свойствами) с использованием емкостного накопителя энергии  $C_0$  имеет вид:

- уравнение электротехнического контура (8):

$$L \frac{dJ}{dt} = - \left( R + V \frac{dL}{dz} \right) J + U, \quad (8)$$

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{J}{C_0}.$$

- уравнение движения ускоряемого плазменного сгустка (9):

$$M \frac{dV}{dt} + V \frac{dM}{dt} = f = \frac{J^2}{2} \left( \frac{dL}{dz} \right) - p_2 F; \quad \frac{dz}{dt} = V, \quad (9)$$

$$\frac{dM}{dt} = \alpha J^2 + F \cdot M_{\Sigma} (n_i^{\Sigma} + n_a^{\Sigma}) V - \pi R_2 \ell_{cp} \rho_2 V_{36}; \quad F = \pi(R_2^2 - R_1^2),$$

$$V_{36} = \sqrt{\frac{\gamma P_{cp}}{\rho_2}}; \quad \ell_{cp} = \frac{M}{\rho_2 F}; \quad P_{mag} = \frac{J^2}{2} \left( \frac{dL}{dz} \right) / F; \quad P_{cp} = \frac{P_{mag} + P_2}{2},$$

где  $C_0$  – емкость конденсаторного источника питания системы “КМПУ–ускоряемый плазменный сгусток”;  $U$  – напряжение на емкостном накопителе в момент времени  $t$ ,  $L = L_0 + L_1 + L_2 - L_{B3} + L_3$  – суммарная индуктивность эквивалентного электротехнического контура, включающая постоянные составляющие  $L_0$  (индуктивность емкостного накопителя и подводящих шин),  $L_1$  (суммарная индуктивность витков с током, входящих в индуктор),  $L_2$  (суммарная взаимная индуктивность всех  $i$ -ых и  $j$ -ых контуров, составляющих индуктор), переменные во времени составляющие  $L_{B3}(t)$  (индуктивность системы “индуктор-ускоряемое тело”) и  $L_3(t)$  (индуктивность КМПУ), которые находятся с помощью выражений (9–11),  $R = R_0 + R_{инд} + R_{уск}$  – суммарное активное сопротивление, подводящих шин ( $R_0$ ), индуктора ( $R_{инд}$ ) и ускорительного канала ( $R_{уск}$ ), определяемые соотношениями (13) и (14),  $dz/dt = V$ ,  $M(t)$  – скорость и масса ускоряемого плазменного сгустка.

Из соотношения для сильной ( $p_2 \gg p_1$ ) ударной волны следует выражения:

$$p_2 = \frac{1}{1 - \rho_1/\rho_2} \rho_1 V^2; \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1,$$

где  $\rho_2, \rho_1$  – плотности окружающего газа за и перед фронтом головной ударной волны.

С помощью формулы (10) рассчитаем индуктивность  $L_3(t)$  коаксиальной системы КМПУ и её погонную индуктивность  $\ell$  (индуктивность единицы длины КМПУ):

$$L_3(t) = \ell z; \quad \ell = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2/R_1), \quad (10)$$

где  $R_2, R_1$  – радиусы центрального и наружного электродов соответственно;  $z$  – продольная координата КМПУ, вдоль которой распространяется ускоряемый плазменный сгусток.

Величина  $L_1$ , входящие в выражения для суммарной индуктивности (10) определена по методике [21]:

$$L_1 = \sum_{k=1}^N L_k, \quad L_k = \mu_0 R_k \left( \ln \frac{8R_k}{g} - 2 \right), \quad (11)$$

где  $N$  – число витков в индукторе;  $R_k$  – радиус геометрического центра  $k$ -ого витка с током,  $g$  – среднее геометрическое расстояние витка от самого себя определяемого с помощью следующего соотношения:

$$\ln g = \frac{1}{(a+c)^2} \left\{ a^2 \ln(a) + c^2 \ln(c) + ac \ln(a^2 + c^2) + (a+c) \operatorname{arctg} \frac{a}{c} + a(a+c) \operatorname{arctg} \frac{c}{a} - \frac{3}{2}(a+c)^2 \right\},$$

где  $a, c$  – высота и ширина витка с током в индукторе.

Величина  $L_2$  находится с помощью выражений (12):

$$L_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N L_{ij}, \quad i \neq j \quad (12)$$

$$L_{ij} = \mu_0 \sqrt{R_i R_j} \left[ \left( \frac{2}{k_{ij}} - k_{ij} \right) K - \frac{2}{k_{ij}} E \right],$$

$$K(k_{ij}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_{ij}^2 \sin^2 \theta}} - \text{эллиптический интеграл 1-го рода,}$$

$$E(k_{ij}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_{ij}^2 \sin^2 \theta} d\theta - \text{эллиптический интеграл 2-го рода,}$$

$$\text{где } k_{ij} = \left( \frac{4R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + 4(z_i - z_j)^2} \right)^{1/2}; \quad z_i = z_1 + \Delta Z_N (i-1); \quad i = \overline{1, N}; \quad \Delta Z_N = \frac{z_N - z_1}{N-1}.$$

Величина  $L_{B3}(t)$  взаимной индуктивности системы “индуктор–ускоряемая электромагнитным способом плазма” определяется из соотношений:

$$L_{B3}(t) = \sum_{i=1}^N L_i; \quad L_i = \begin{cases} \mu_0 \sqrt{R_i R_{ni}} \left[ \left( \frac{2}{k_i} - k_i \right) K - \frac{2}{k_i} E \right], & z_i \leq z \\ 0, & z_i > z \end{cases},$$

$$\text{здесь } k_i = \left( \frac{4R_i R_{ni}}{(R_i + R_{ni})^2 + 4(z - z_i)^2} \right)^{1/2}; \quad R_{ni} = \frac{R_1 + R_2}{2} - \text{радиус тороидального вихревого тока}$$

в плазме, ускоряемой в канале КМПУ.

Начальные условия для продольной координаты  $z(t=0)$ , скорости плазменного сгустка  $V(t=0)$ , массы ускоряемой плазмы  $M(t=0)$ , тока  $J(t=0)$  и напряжения  $U(t=0)$  в электрической цепи задаются следующим образом:  $z(t=0) = 0$ ;  $V(t=0) = V_i^\Sigma$ ;  $M(t=0) = 0$ ;  $J(t=0) = 0$ ;  $U(t=0) = U_0$ .

Данные уравнения зависят от пяти безразмерных параметров:

$$q_1 = \frac{\ell^2 C_0^2 U_0^2}{2M_0 L_0}; \quad q_2 = R_0 C_0 \omega_0; \quad q_3 = \frac{C_0}{2} \left( \frac{L_0}{\ell} \omega_0 \right)^2 \rho_1 F; \quad q_4 = \frac{\alpha (C_0 U_0 \omega_0)^2}{M_0 \omega_0}; \quad q_5 = \frac{FM_\Sigma n_0 V_0}{M_0}$$

и в безразмерных переменных могут быть представлены следующим образом:

$$\tilde{z} = \frac{\ell}{L_0} z; \quad U = \frac{U}{U_0}; \quad \tilde{t} = \omega_0 t; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}; \quad V = \frac{V}{V_0}; \quad V_0 = \frac{\omega_0 L_0}{\ell}; \quad L = \frac{L}{L_0}; \quad M = \frac{M}{M_0},$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \left( M \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \right) = q_1 \left( \frac{dU}{d\tilde{t}} \right)^2 - q_3 \left( \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \right)^2, \quad \frac{d}{d\tilde{t}} \left[ \tilde{L} \frac{dU}{d\tilde{t}} \right] + q_2 \frac{dU}{d\tilde{t}} = -U,$$

$$\frac{dM}{d\tilde{t}} = q_4 \left( \frac{dU}{d\tilde{t}} \right)^2 + q_5 \cdot (n_i^\Sigma + n_a^\Sigma) V, \quad \tilde{z}(0) = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0, \quad U(0) = 1, \quad \left. \frac{dU}{d\tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0.$$

Отметим, что при математическом описании КМПУ необходимо определить величины электротехнических параметров  $U_0$ ,  $R_0$ ,  $C_0$ ,  $L_0$ ,  $\ell_0$ ,  $M_0$  электродинамической модели ускорителя.

Сопротивление индуктора  $R_{\text{инд}}$  находим по следующей формуле (13):

$$R_{\text{инд}} = \sum_{i=1}^N \frac{2\pi R_i}{\sigma a c}, \quad (13)$$

где  $\sigma$  – проводимостью металла витков индуктора.

Активное сопротивление ускорительного канала  $R_{\text{уск}}$  находим по формуле (14):

$$R_{\text{уск}} = \frac{z}{\sigma\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{(R_2 + \delta)^2 - R_2^2} \right), \quad (14)$$

где  $\delta$  – толщина сетчатого наружного электрода.

КПД электромагнитного ускорения  $\eta$  определялся по формуле (15):

$$\eta = \frac{MV^2(t=t_\infty)}{W}, \quad (15)$$

где  $V(t=t_\infty)$  – скорость ускоряемого плазменного сгустка на момент времени  $t_\infty$  окончания тока в электрической цепи,  $W$  – энергия, содержащаяся в начальный момент времени  $t=0$  в источнике энергии.

Тяговая эффективность  $\theta$  оценивалась следующим образом (16):

$$\theta = \frac{f^2}{2\dot{M} \alpha(B_0) W_{\text{hel}}}, \quad (16)$$

где  $\dot{M}$  – массовый расход.

Удельный импульс  $I$  определялся по следующей формуле (17):

$$I = \frac{f}{\dot{M}}, \quad (17)$$

## 5. Некоторые результаты расчета физических характеристик ВЧ-источника и КМПУ

Очевидно, что разработанная выше физическая и математическая модели, позволяющие выполнять расчеты теплофизических параметров, электрических и магнитных ВЧ полей в цилиндрическом источнике плазмы, возбуждаемых токовой антенной, расположенной на боковой поверхности плазменного цилиндра, необходимо подтвердить путем сравнения численных результатов с известными аналитическими решениями или с опубликованными расчетными и экспериментальными результатами.

На рис. 4 и 5 показаны результаты сопоставления экспериментальных [22] и расчетных зависимостей эффективного сопротивления плазмы  $R_{\text{эф}}$  от величины внешнего магнитного поля  $B_0$ , полученные с помощью объединенного варианта вычислительного кода. Здесь и далее рабочая частота антенны 13,56 МГц, рабочий газ – Ar.

На рис. 6–9 показаны отдельные результаты расчетов [5–10], выполненных с помощью разработанной выше математической модели коаксиального магнитоплазменного ускорителя. Эти результаты соответствуют следующим параметрам геликонного разряда: рабочая частота антенны 13.56 МГц;  $P_{\text{hel}} = 100$  Вт; рабочий газ – Ar;  $p=1$  мТорр;  $R = 0.75$  м,  $L = 0.2$  м.

При этом геометрические, электротехнические характеристики КМПУ имели следующие значения: наружный и внутренние радиусы ускорительного канала и витков индуктора  $R_2 = 7.5$  см,  $R_1 = 5$  см, продольная длина индуктора  $L = 0.6$  см, число витков индуктора 2, напряжение и емкость конденсаторной батареи  $U_0 = 5$  кВ,  $C_0 = 3$  мкФ.

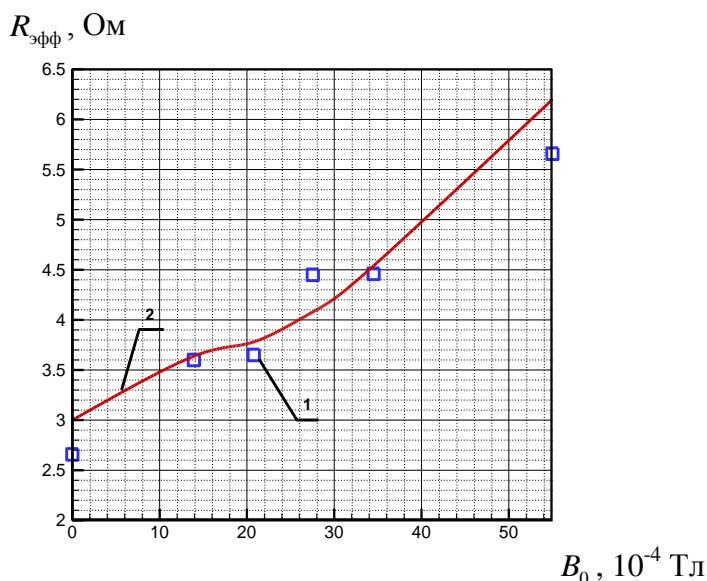


Рис. 4. Сравнение экспериментальной (1) и расчетной (2) зависимостей эффективного сопротивления плазмы  $R_{эфф}$  от внешнего магнитного поля  $B_0$ .  $P_{hel} = 100$  Вт,  $p = 0.67$  Па,  $R = 0.075$  м,  $L = 0.2$  м

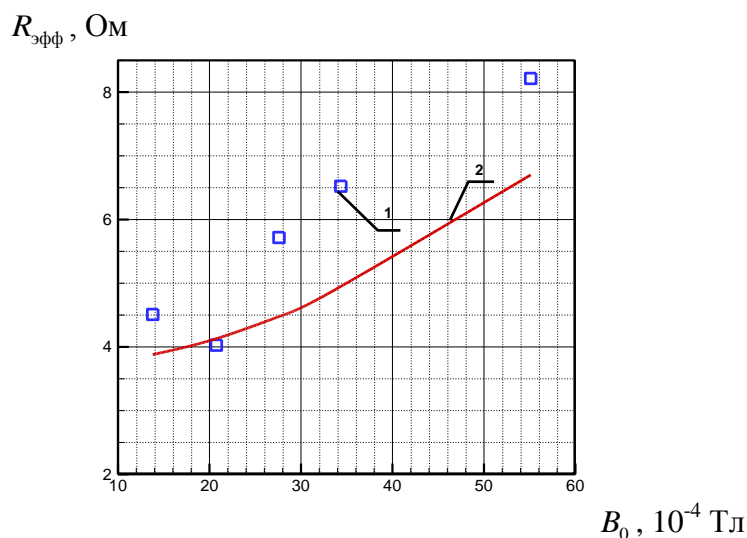


Рис. 5. Сравнение экспериментальной (1) и расчетной (2) зависимостей эффективного сопротивления плазмы  $R_{эфф}$  от внешнего магнитного поля  $B_0$ .  $P_{hel} = 150$  Вт;  $p = 0.67$  Па,  $R = 0.075$  м,  $L = 0.2$  м

Из рис. 6 следует, что ток  $J$  в электрической цепи КМПУ достигает своего первого максимума ( $J_1 \approx 7$  кА) в момент времени  $t_1 \approx 3$  мкс и в дальнейшем слабо затухает ( $J_2 \approx 7$  кА,  $t_2 \approx 9$  мкс) с течением времени  $t$ .

Графическая зависимость скорости  $V$ , показанная на рис. 7, позволяет отметить, что скорость  $V$  плазменного сгустка имеет относительно времени  $t$  единственный максимум  $V \approx 25$  км/с, достигаемый в момент времени  $t \approx 1.5$  мкс. Далее с течением времени  $t$  скорость  $V$  плазменного сгустка уменьшает свое значение до уровня  $V \approx 10$  км/с.

На рис. 8 и 9 показаны графические зависимости ускоряющей силы  $F_q$  и продольной координаты  $z$  плазменного сгустка от времени  $t$ .

Из рис. 8 и 9 следует, что максимальный прирост ускоряющей силы  $F_q$  имеет место для диапазона времени  $t \in [0; 0.5]$  мкс и пространственной координаты  $z \in [0; 5]$  мм.



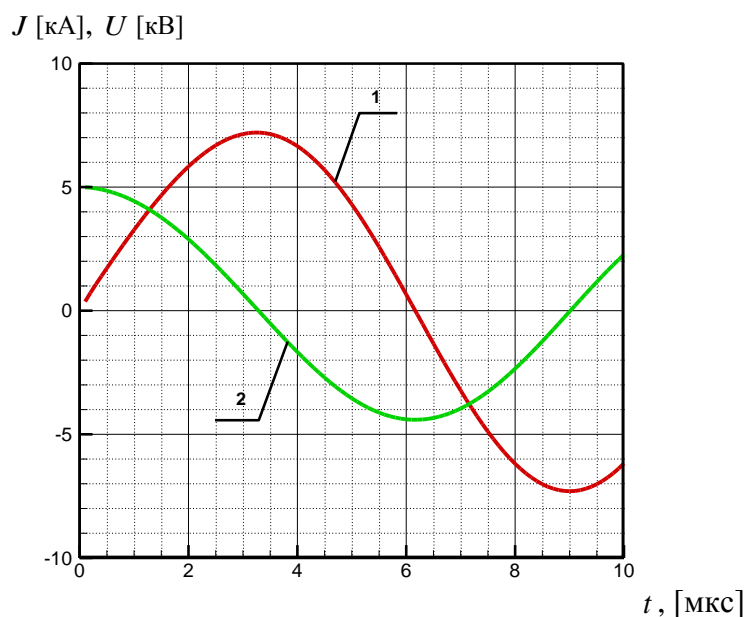


Рис. 6. Зависимость тока  $J$  [кА] (1) и напряжения  $U$  [кВ] (2) в электрической цепи КМПУ от времени  $t$

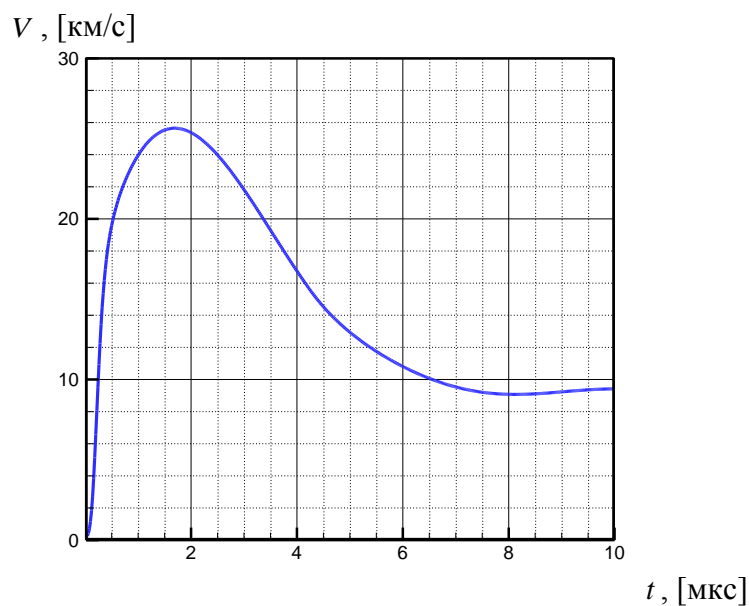


Рис. 7. Зависимость скорости  $V$  плазменного сгустка от времени  $t$

Т.к. координата плазменного сгустка относительно не велика, то в данном диапазоне времен увеличение скорости происходит в основном за счет взаимодействия импульсного тока индуктора и кольцевого вихревого тока в плазменном образовании, что, в свою очередь, приводит к возникновению электромагнитной силы, действующей на плазменных сгусток и обеспечивающей его ускорение.

В диапазоне времен  $t > 0.5$  мкс электродинамическое ускорение плазменного сгустка осуществляется в основном силой Ампера, т.е. за счет взаимодействия магнитного поля электрического контура КМПУ с токнесущим проводником (плазменным сгустком).

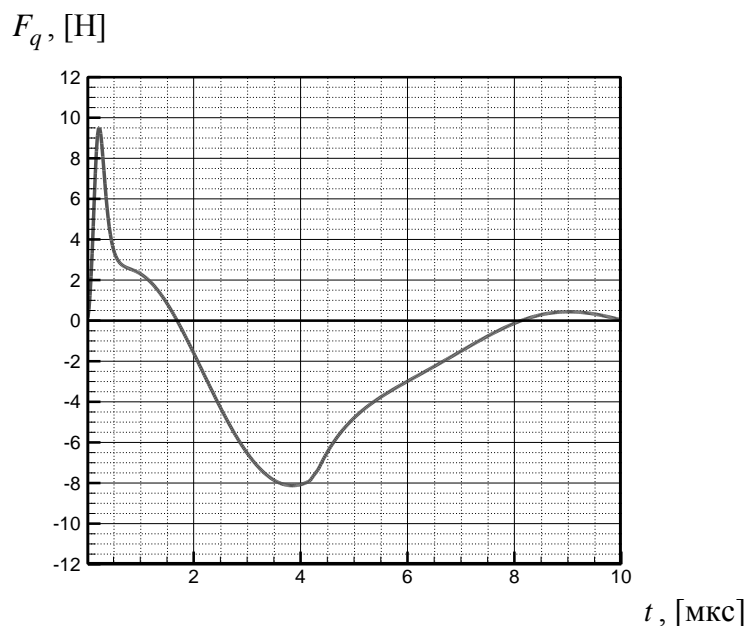


Рис. 8. Зависимость от времени  $t$  ускоряющей силы  $F_q$ , действующей на плазменный сгусток

Зависимость ускоряющей силы  $F_q$  (рис. 8) имеет второй экстремум и достаточно протяженную по времени ( $t > 2$  мкс) зону с отрицательным значением силы  $F_q < 0$ .

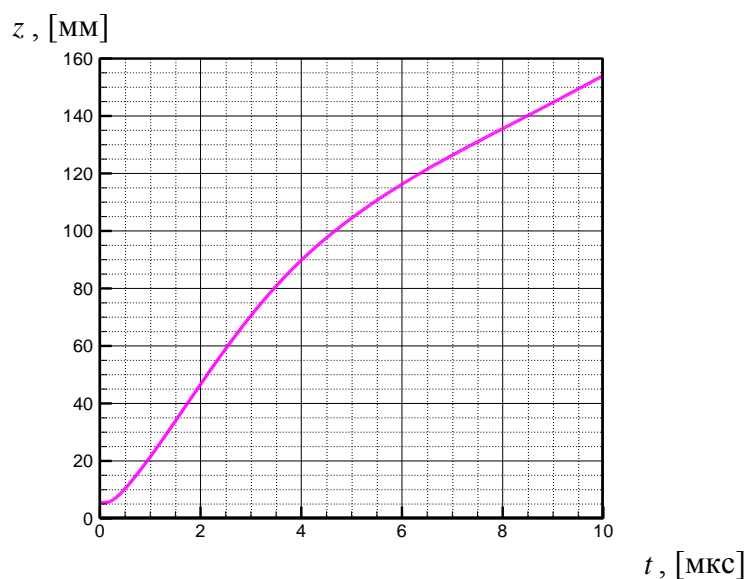


Рис. 9. Зависимость продольной координаты  $z$  плазменного сгустка в канале КМПУ от времени  $t$

Проведенные расчет показали, что наиболее существенным фактором, ограничивающим значение скорости  $V$  и делающим силу  $F_q$  отрицательной является слагаемое вида

$$\left(\frac{dm}{dt}\right) \frac{dz}{dt}.$$

Это слагаемое ответственно за уменьшение ускорения сгустка за счет присоединения к нему с течением времени плазмы, исходно заполняющей ускорительный канал КМПУ, а также эрозийных паров материала электродов.

Таким образом, из проведенного обсуждения следует, что длину канала ускорителя следует ограничить величиной  $z \approx 40$  мм, где сила  $F_q > 0$ , а скорость плазменного сгустка достигает максимального значения  $V \approx 25$  км/с.

Также отметим, что в ускорителях плазмы типа КМПУ для увеличения скорости  $V$  движения плазменного сгустка целесообразно организовать в канале ускорителя импульсную подачу рабочего газа (с аксиальным или радиальным напуском).

Выполненное сопоставление показывает, что упрощенная реализация математической модели качественно близко (по сравнению с экспериментальной зависимостью [22–28]) описывает ход кривой эффективного сопротивления  $R_{\text{эфф}}(B_0)$  и моделирование величины  $R_{\text{эфф}}$  на основе такой упрощенной математической модели возможно по порядку величины.

## 6. Заключение

Усовершенствована (рассматривается неаксиально-симметричное приближение ВЧ-разряда, учтены соответствующие фурье компоненты плотности тока антенны) приближенная математическая модель физических процессов в ВЧ-источнике низкотемпературной разреженной плазмы (геликонном разряде). Приведена упрощенная кинетическая схема, используемая для расчета компонентного состава плазмы молекулярного водорода в камере геликонного разряда. Построена приближенная математическая модель коаксиального магнитоплазменного ускорителя (с предиионизацией рабочего вещества геликонным разрядом), которая позволяет выполнить оценку трансформации одного вида энергии в другой, а также оценить уровень вклада различных видов энергии, увеличение массы ускоряемого плазменного сгустка на процесс изменения скорости. Произведено сопряжение математических моделей КМПУ и ВЧ-разряда. Выполненные расчеты позволили установить, что наиболее существенным фактором (наряду с образованием ударной волны), ограничивающим величину скорости плазменного сгустка в канале КМПУ, является присоединенная масса, возрастающая с течением времени.

## Благодарности и ссылки на гранты

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (госзадание № 13.79.2014/К) и в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН.

## Литература

1. Гинзбург ВЛ., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975. 254 с.
2. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988. 423 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 528 с.
4. Кралькина Е.А. Особенности энерговклада в пространственно ограниченные ВЧ индуктивные источники плазмы низкого давления // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008. 301 с.
5. Кузенов В.В. Разработка оценочной физико-математической модели ВЧ-разряда геликонного типа // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Т.15, вып.6. 15с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-6/articles/258/>
6. Кузенов В.В. Приближенная математическая модель ВЧ-разряда и коаксиального импульсного плазменного двигателя // Актуальные проблемы российской космонавтики. Труды XXXIX академических чтений по космонавтике: Тез. докл. Москва, 27–30 января 2015. С.122–123.
7. Кузенов В.В., Рыжков С.В. Отдельные элементы физико-математической модели геликонного разряда // Прикладная физика. 2015. № 2. С. 37–44.
8. Кузенов В.В., Рыжков С.В., Фролко П.А., Шумаев В.В. Математическая модель импульсного плазменного двигателя с предиионизацией геликонным разрядом // Электронный журнал «Тру-

- ды МАИ». Выпуск № 82. 2015. [http://www.mai.ru/upload/iblock/24a/kuzenov-ryzhkov-shumaev-frolko\\_rus.pdf](http://www.mai.ru/upload/iblock/24a/kuzenov-ryzhkov-shumaev-frolko_rus.pdf)
9. Kuzenov V.V., Frolko P.A. Approximate Model of the Coaxial Pulsed Plasma Thruster // 5th International Workshop on Computer Science and Engineering: Information Processing and Control Engineering, WCSE 2015-IPCE. 2015. P. 48–53.
  10. Kuzenov V.V., Polozova T.N., Ryzhkov S.V. Numerical simulation of pulsed plasma thruster with a preionization helicon discharge // Problems of Atomic Science and Technology. 2015. № 4 (98). P. 49–52.
  11. Light M., Chen F.F. Helicon wave excitation with helical antennas // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 1084–1093.
  12. Сторожев Д.А., Суржиков С.Т., Куратов С.Е. Анализ кинетических процессов в тлеющем разряде в молекулярном водороде // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2014. Т. 15, вып. 6. 21с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-6/articles/267/>
  13. Цаглов А.И., Лоян А.В., Кошелев Н.Н., Рыбалов О.П. Результаты испытаний безэлектродного электрореактивного двигателя малой мощности с ВЧ ионизацией РТ // Авиационно-космическая техника и технология. 2012. № 8. С. 212–217.
  14. Shinohara S., Tanikawa T., Nada T. et al. High-density helicon plasma sources: basics and application to electrodeless electric propulsion // Fusion Science and Technology. 2013. Vol. 63 (1T). P. 164–167.
  15. Chen F.F. The low-field density peak in helicon discharges // Phys. Plasmas. 2003. V. 10. P. 2586–2592.
  16. Shabshelowitz A., Gallimore A.D., Peterson P.Y. Performance of a helicon Hall thruster operating with Xenon, Argon, and Nitrogen // Journal of Propulsion and Power. 2014. Vol. 30. P. 664–671.
  17. Сивков А.А., Исаев Ю.Н., Васильева О.В., Купцов А.М. Математическое моделирование коаксиального магнетоплазменного ускорителя // Известия Томского политехнического университета. 2010. Т. 317. № 4. URL: [http://www.lib.tpu.ru/fulltext/v/Bulletin\\_TPU/2010/v317/i4/16.pdf](http://www.lib.tpu.ru/fulltext/v/Bulletin_TPU/2010/v317/i4/16.pdf).
  18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 661 с.
  19. Жуков Б.Г., Резников Б.И., Куракин Р.О., Розов С.И. Влияние плотности газа на движение свободного плазменного поршня в канале рельсотрона // ЖТФ. 2007. Т. 77, вып. 7. С. 43–49.
  20. Дьяков Б.Б., Резников Б.И. Абляция электродов при электродинамическом ускорении // ЖТФ. 1989. Т. 59, вып. 6. С. 148–150.
  21. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справочная книга. 3-е изд., перераб. и доп. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд., 1986. 488 с.
  22. Кралькина Е.А. Индуктивный высокочастотный разряд низкого давления и возможности оптимизации источников плазмы на его основе // УФН. 2008. Т. 178. С. 519–540.
  23. Kuzenov V.V., Ryzhkov S.V. Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beam: and plasma jets // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. № 1 (83). P. 12–14.
  24. Железнякова А.Л., Кузенов В.В., Петрусов АС., Суржиков СТ. Расчет аэротермодинамики двух типов моделей спускаемых космических аппаратов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике 2010. Том 9. 6с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/144/>
  25. Глушко Г.С., Иванов Н.Э., Крюков ИА. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Том 9. 8с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/142/>
  26. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Том 7. 9с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2008-7/articles/435/>
  27. Днкалюк А.С., Суржиков С.Т. Сравнение проголки четвертого и второго порядков точности на примере задачи, имеющей аналитическое решение // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010. Том 9. 5с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2010-9/articles/156/>
  28. Котов М.А., Рулева Л.Б., Козлов П.В., Суржиков С.Т. Предварительные экспериментальные исследования обтекания моделей в гиперзвуковой ударной аэродинамической трубе // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Т.14, вып. 2. 6с. <http://chemphys.edu.ru/issues/2013-14-2/articles/394/>

Статья поступила в редакцию 17 ноября 2015 г.