

УДК 536.24

## **О ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ**

**Сафронов А.В.**

ЦНИИмашиностроения, г. Королев, Московская область  
E-mail: avsafron@gmail.com

### **Аннотация**

Проанализированы возможности моделей турбулентности для расчета осредненных характеристик сверхзвуковых струй, истекающих в затопленное пространство. Рассмотрены проблемы, которые трудно поддаются учету в моделях турбулентной вязкости - влияние числа Маха (сжимаемости) и температурного фактора, а также вопросы задания начальных и граничных условий для определяющих параметров моделей турбулентной вязкости.

### **APPLICABILITY OF TURBULENT VISCOSITY MODEL FOR THE CALCULATION OF SUPERSONIC JET STREAMS**

The capabilities of turbulence models for the calculation of the averaged characteristics of supersonic jets flowing in the flooded area have been analyzed. The problems that are difficult to account in models of turbulent viscosity - effect of Mach number (compressibility) and the temperature factor, as well as setting the initial and boundary conditions for determining the parameters of models of turbulent viscosity have been considered.

### **Введение**

Сверхзвуковые высокотемпературные струйные течения являются сложными для расчета течениями, широко встречающимся авиационной и ракетной технике.

Проблемой, вызывающей наибольшие трудности при расчетном определении параметров струйных течений является моделирование турбулентной вязкости, посредством которой вычисляются осредненные характеристики турбулентного потока. Турбулентная вязкость не является физическим свойством газа, не существует и универсальной модели для нее, поэтому применение того или иного варианта требует верификации для рассматриваемого класса течений.

Альтернативным подходом является прямое численное моделирование турбулентных течений на основе решения нестационарных уравнений Навье–Стокса, варианты которого находят все большее распространение, благодаря развитию вычислительной техники и совершенствованию численных методов. Требования к количеству узлов сетки в данных подходах для пространственно-временного разрешения турбулентных вихрей на три–четыре порядка выше, чем у метода на основе применения полуэмпирических моделей турбулентности. Это приводит к большим затратам вычислительных ресурсов - памяти ЭВМ и процессорного времени. Для уменьшения трудоемкости вычислений, применяются и комбинированные методы. Подходы на основе прямого численного моделирования турбулентности, несмотря на проблему задания граничных условий на свободных границах,

перспективны и дают согласие расчёта акустики дозвуковой струи с экспериментом. Однако, кроме трудоёмкости вычислений, имеющиеся немногие примеры моделирования параметров струйных течений такими методами, не подтверждают их пригодность, для расчёта сверхзвуковых высокотемпературных струйных течений включающих ударно-волновые процессы и химические превращения. Поэтому, в настоящее время, инженерным инструментом для рассматриваемых задач, являются методы с применением моделей турбулентной вязкости.

В настоящее время существуют многие варианты моделей турбулентности, например [1–22], правильный выбор из которых требует сравнения расчётов и экспериментов для рассматриваемой задачи или близких условий.

В работе [18] проведено исследование моделей семейства  $k-\varepsilon$  для расчета "холодных" сверхзвуковых струй.

В работе [19] проведено подробное тестирование известных моделей турбулентности с поправками на сжимаемость [20–22] на основе экспериментальных данных [23] по влиянию температуры струи. Как выяснено [19], модели [20–22] имеют значительные погрешности расчетов осредненных параметров с учетом влияния температурного фактора при моделировании турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях.

В настоящей работе, с целью анализа применимости имеющихся моделей турбулентности для расчета горячих сверхзвуковых струй рассмотрены однопараметрические [24–27], двухпараметрические  $k-\nu$  [26],  $k-\omega$  [8, 28], а также наиболее распространенные модели  $k-\varepsilon$  [9, 10], с поправками на сжимаемость [11–16], которые рекомендуются в работах [15–17, 29–30, 32].

## 1 Физико-математическая модель

Рассматриваются турбулентные сверхзвуковые затопленные струйные течения при значительном превышении критических чисел Рейнольдса  $Re > 10^6$  (по параметрам на срезе сопла).

Течение описывается осредненными по Рейнольдсу-Фавру параболизированными уравнениями Навье-Стокса с моделями турбулентной вязкости, решаемыми численным маршевым методом, который наряду с математической постановкой задачи представлен в работах [33, 34].

В настоящее время имеется несколько семейств моделей турбулентной вязкости и многочисленные их модификации, обзор которых можно найти в работах [1–32]. Многообразие моделей турбулентности, часто не согласующихся с экспериментом и постоянное внесение различных поправок в них, свидетельствуют о незавершенности общей теории этого явления. При этом основными проблемами, которые трудно поддаются учету в моделях, являются влияние числа Маха (сжимаемости) и температурного фактора.

Одной из самых простых и эффективных моделей турбулентности является модель Прандтля, адаптированная к задаче расчёта сверхзвуковых турбулентных струй в работе [33].

Согласно Прандтлю (1925г.), для струйных течений коэффициент турбулентной вязкости вычисляется по формуле:

$$\nu = \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

где масштаб турбулентного вихря "путь смещения"  $\ell$  линейно зависит от толщины слоя смещения  $\delta$ :

$$\ell = \xi \delta$$

Толщина слоя смещения определяется как расстояние между точками в которых функция  $\Phi/\Phi_m$  ( $\Phi_m$  – значение концентрации газа струи  $\Phi$  на оси) принимает значение 0.05 и 0.95.

Как известно, по мере увеличения числа Маха потока происходит заметное уменьшение интенсивности смешения, а толщина слоя смешения сокращается. При удалении от среза сопла скорость течения и число Маха уменьшаются, поэтому эмпирический коэффициент  $\xi$  различен для ближнего и дальнего поля струи, изменяясь в диапазоне  $0.05 \div 0.08$  [33].

Модель Прандтля, основана на концепции длины пути смешения (масштаб турбулентного вихря), под которой принимается расстояние проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение с окружающей жидкостью. Это понятие происходит из качественной аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом в газах, когда состояния молекул остаются постоянными между соударениями на протяжении длины свободного пробега молекул. К турбулентным течениям типа слоя смешения, в которых средняя скорость имеет одну преимущественную компоненту и известен характерный поперечный размер (толщина слоя смешения) применение этой модели с соответствующим подбором эмпирического коэффициента, связывающего масштаб турбулентного вихря ("пути смешения") с толщиной слоя смешения вполне обосновано. Однако для потоков, в которых поперечный масштаб вычислить затруднительно, например, в различных отрывных течениях, в блочных струях, в слое смешения, возникающем за диском Маха, модели типа Прандтля неприемлемы. Для таких задач требуется применение более сложных подходов.

К наиболее известным при расчётах струйных течений можно отнести модели работ [8,9,31,13-16, 25,26].

С целью исследования применимости моделей турбулентности к рассматриваемым течениям проанализируем модели Прандтля, модели с одним уравнением: Секунова [4,6,7] и Спэларта–Аллараса (Spalart–Allmaras) [5]; а также двухпараметрические различных семейств:  $k-\nu$  модель Секундова [6],  $k-\varepsilon$  модель со "стандартным" набором констант [31],  $k-\varepsilon$  модель [31] с поправками на сжимаемость [12–15],[32] и  $k-\omega$  модель (Wilcox D. C.) [28, 8]. Здесь  $k$  – кинетическая энергия пульсации скорости,  $\varepsilon$  и  $\omega$  – скорости диссипации турбулентности, турбулентная вязкость  $\nu \sim 0.09k^2/\varepsilon \sim k/\omega$ .

Согласно модели Прандтля  $k \sim l^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \nu \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ . Отсюда масштаб турбулентности

Прандтля связан с характеристиками двухпараметрических моделей  $k-\nu$ ,  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$  следующим образом:

$$l \sim \nu/k^{1/2} \sim 0.09k^{3/2}/\varepsilon \sim k^{1/2}/\omega \quad (1)$$

Ось  $x$  совпадает с осью струи, ось  $y$  – направлена в поперечном направлении.

Наиболее часто применяемой моделью является модель  $k-\varepsilon$ . Приведем уравнения этой модели для расчёта слоев смешения:

$$\rho U \frac{\partial k}{\partial x} + \rho V \frac{\partial k}{\partial y} = \rho \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 (1 - \alpha_1 M_{T\lambda}^2) - \rho \varepsilon (1 + \alpha_2 M_{T\lambda}^2) + \frac{1}{y^r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^r \frac{\rho \nu}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right], \quad (2)$$

$$\rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{1}{y^r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^r \frac{\rho \nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right], \quad (3)$$

$$\nu = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon (1 + \alpha_3 M_{T\lambda}^2)}, \quad (4)$$

где:  $U, V, \rho$  – скорости по осям  $x$  и  $y$  соответственно и плотность газа;  
 $r=0$  или  $1$  для плоского или осесимметричного случаев, соответственно;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – коэффициенты поправок на сжимаемость.

Коэффициенты модели  $k-\varepsilon$  стандарт имеют значения:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.43, C_{\varepsilon 2} = 1.92, C_{\mu} = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_{\varepsilon} = 1.3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Поправки на сжимаемость рекомендуемые в ряде работ, например [13–15] зависят от турбулентного числа Маха ( $M_T = \frac{\sqrt{2k}}{c}$ ), вычисленного по пульсациям скорости:

$$M_{T\lambda} = \max(M_T - \lambda_T, 0), \quad (5)$$

где  $\lambda_T$  – пороговое значение [14], исключающее поправки на сжимаемость, в течениях с малыми числами Маха,  $c$  – скорость звука.

В работе [15], для расчётов струй, рекомендуется известная модель [14], в которой используется число Маха с пороговым значением и коэффициентами:

$$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 2.0, \alpha_3 = 0, \lambda_T = 0.2.$$

Модель [14] со стандартным набором основных коэффициентов и с этими поправками на сжимаемость обозначим  $k$ – $\varepsilon$  SZ (Sarkar – Zeman).

В работе [19] применяются модель  $k$ – $\varepsilon$  С (Chien) [10] с базовым набором коэффициентов:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.35, C_{\varepsilon 2} = 1.8, C_{\mu} = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_{\varepsilon} = 1.3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

и с поправками на сжимаемость, полученными в работах [20–22] на основе асимптотического анализа и сравнения с результатами прямого численного моделирования турбулентности:

$$\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.3, \alpha_3 = 1.0, \lambda_T = 0.$$

Примем условное название этой модели  $k$ – $\varepsilon$  CS (Chien – Sarkar).

В работе [32] принято  $\alpha_1 = 0.$ ,  $\lambda_T = 0$ , а вместо квадратичной зависимости поправок на сжимаемость от турбулентного числа Маха  $M_T$  с коэффициентами  $\alpha_2, \alpha_3$  предложена линейная, при этом коэффициенты  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.29$  (модель Молчанова)

Модели турбулентной вязкости ( $\nu$ ) с одним дифференциальным уравнением [5-7] для слоя смешения (без пристеночных членов) можно представить в виде:

$$\rho U \frac{\partial \nu}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \nu}{\partial y} = \frac{1}{y'} \frac{\partial}{\partial y} \left( y' \sigma \rho \nu \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) + \alpha \rho \nu \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| + \beta \rho \left( \frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \quad (6)$$

Наборы констант модели (6) имеют следующие величины:

- Спэларт–Аллмарас (S–A, Spalart–Allmaras) [5]:

$$\sigma = 1.5, \beta = 0.93, \alpha = 0.1355.$$

- Секундов и др. ("Секундов 1") [6]:

$$\sigma = 2.0, \beta = 0.0, \alpha = 0.2(1 - 8.33M_T), \lambda_T = 0.$$

Путем сравнения с экспериментом, в настоящей работе предложены следующие коэффициенты модели (5.6), обозначенные "Секундов n1":

$$\sigma = 2.5, \beta = 0.0, \alpha = 0.15/(1 + 8M_T), \lambda_T = 0.15 \quad (7)$$

При вычислении турбулентного числа Маха ( $M_T$ ), входящего в коэффициент  $\alpha$  модели турбулентной вязкости типа Секундова с одним дифференциальным уравнением, кинетическая энергия пульсации определяется в представлении Прандтля  $k = \frac{3}{2} \nu \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ .

Модель  $k$ – $\omega$  2007, где  $k$  – кинетическая энергия пульсаций,  $\omega$  – скорость диссипации имеет вид [8,28]:

$$\rho U \frac{\partial k}{\partial x} + \rho V \frac{\partial k}{\partial y} = \rho \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \beta^* \rho \omega k + \frac{1}{y'} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y' \sigma^* \rho \nu \frac{\partial k}{\partial y} \right],$$

$$\rho U \frac{\partial \omega}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \alpha \frac{\omega}{k} \rho v \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \beta \rho \omega^2 + \sigma_d \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{y^r} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^r \sigma_p v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right],$$

$$v = \frac{k}{\omega}.$$

Коэффициенты модели  $k-\omega$  2007 с поправками на сжимаемость имеют вид:

$$\alpha = 13/15, \quad \sigma = 0.5, \quad \sigma^* = 0.8,$$

$$\beta^* = 0.09[1 + 1.5F(M_T)], \quad \beta = 0.0708 - 0.09 \cdot 1.5F(M_T),$$

$$F(M_T) = M_T^2 - 0.25^2, \quad \sigma_d = \begin{cases} 0, & k_y \omega_y \leq 0 \\ 0.125, & k_y \omega_y > 0 \end{cases}$$

В отличие от применения модели Прандтля, определенную трудность представляют собой задание начальных величин характеристик турбулентности  $\varepsilon, \omega, \nu$  которые необходимы для численного решения дифференциальных уравнений описывающих турбулентную вязкость.

В общем случае при применении дифференциальных моделей турбулентности, расчёт параметров струи необходимо начинать от камеры газогенератора, и учитывать механизм переноса пульсаций в сверхзвуковом ядре струи, который до конца не изучен и отличается от механизма возникновения турбулентности в сдвиговом слое, где работают приведенные модели турбулентной вязкости, с градиентно-диффузионным переносом характеристик турбулентности. Эта проблема требует дальнейшего изучения.

Однако, как показали сравнения расчётов и измерений, основным фактором в струйных течениях является генерация турбулентности в слое смешения. Поэтому, в расчётах сверхзвуковых струй с помощью дифференциальных моделей турбулентной вязкости, применима следующая процедура задания начальных данных:

1) На срезе сопла задаются кинетическая энергия пульсаций скорости (которая является физической величиной) и масштаб турбулентности. Как показал анализ, согласно [16], для сверхзвуковых струй эти величины можно принять следующими:

$$k_a = \frac{3}{2} (aU_a)^2, \quad a = 0.01 \div 0.05,$$

$$\ell_a = bR_a, \quad b = 0.01 \div 0.05$$

Остальные характеристики турбулентности в сечении среза сопла определяются с помощью соотношений:

$$\nu_a = \ell_a k_a^{1/2}, \quad \varepsilon_a = \frac{0.09 k_a^{3/2}}{\ell_a}, \quad \omega_a = \frac{k_a^{1/2}}{\ell_a}. \quad (8)$$

2) На внешней границе свободной струи, в случае отсутствия искусственной турбуликации потока, кинетическая энергия пульсаций  $k_e$  и турбулентная вязкость  $\nu_e$  принимаются малыми величинами:  $k_e/U_a^2 \sim 10^{-6}$ ,  $\nu_e/(U_a R_a) \sim 10^{-6}$ , а скорости диссипации вычисляются по этим уровням с помощью соотношений (1). Практически полагается, что турбулентная вязкость на внешней границе струи соответствует ламинарной.

3) С целью формирования начальных уровней турбулентности в слое смешения на малых расстояниях от среза сопла, вплоть до сечения  $x_0 = (0.1 \div 0.2)R_a$ , решение дифференциальных уравнений, описывающих течение и модели турбулентной вязкости, решаются с турбулентной вязкостью Прандтля с масштабом  $\ell \sim 0.1 \cdot 0.2x$ .

4) Далее вниз по потоку, при  $x > x_0$ , когда в слой смешения попадает  $\sim 10$  ячеек сетки, турбулентная вязкость находится полностью с помощью дифференциальных уравнений выбранной модели и принятыми условиями на границах.

Длину  $x_0$  и начальные уровни кинетической энергии на срезе можно подобрать так, чтобы эти параметры не влияли на результаты вниз по потоку. Этого удастся достигнуть,

поскольку в рассматриваемых моделях процессы генерации турбулентности пропорциональны градиенту скорости  $\partial U/\partial y$ , а процессы диссипации пропорциональны величине скорости диссипации, входящей как источниковый член в уравнение для кинетической энергии пульсаций. Поэтому расчёты по этим моделям в ядре сверхзвуковой струи, где градиенты  $\partial U/\partial y$  малы по отношению к градиентам в слое смешения, дают быстрое падение начальных уровней величин  $k$  и  $\nu$  в случае их завышения.

Аналогичные процедуры применялись, например, в работе [16], причем рассматривалась модель "турбулентного ядра" с заданием высоких уровней турбулентности на срезе сверхзвукового сопла.

Отметим, что в модели с одним дифференциальным уравнением типа Секундова, турбулентная вязкость на срезе сопла является содержательным дополнительным параметром задачи, и в ряде случаев, за счет соответствующего выбора её, улучшается совпадение расчётных и экспериментальных характеристик струи. Однако обоснованное задание этой величины требует изучения механизмов переноса турбулентных пульсаций вдали от стенок сопла.

С целью обоснования приведенного способа задания начальных данных на срезе сопла, проведены методические расчёты параметров изобарической струи с  $M_a=2$  и  $T_0=756\text{K}$ . Эти параметры выбраны поскольку, для этой струи, в работе [23] имеются экспериментальные данные, а в работе [19] даны результаты моделирования течения в струе на основе уравнений RANS с помощью пакета WIND (NASA). В работе [19] расчёты проводились, начиная от камеры и с учетом пограничного слоя в сопле.

Результаты расчётов осредненной скорости на оси струи практически не зависят от выбора начальных параметров в диапазоне  $a=0.01\div 0.03$ ,  $b=0.01\div 0.03$ . Уменьшение степени турбулентности на срезе сопла от этих уровней не влияет на расчёт осредненных газодинамических параметров. Это объясняется тем, что в слое смешения реализуются уровни кинетической энергии и турбулентной вязкости значительно выше, чем срезе сопла. Причем, в ядре струи, по расчётам с помощью принятых уравнений описывающих турбулентность, начальные уровни кинетической энергии падают. Влияние начальных характеристик турбулентности становится заметно в зоне начала снижения скорости на оси струи при  $a\approx 0.03$ ,  $b\approx 0.03$ .

В качестве иллюстраций, на рисунке 2 представлены результаты расчётов настоящей работы при  $a=0.01$ ,  $b=0.01$ , в сравнении с результатами работы [19]. В расчётах применялась модель  $k-\varepsilon$  C (Chien) и  $k-\varepsilon$  CS (Chien-Sarkar). На рисунке 2 приведено изменение скорости на оси струи. Результаты поля течения струи приведены на рисунке 3.

Из данных рисунка 2 видно, что результаты расчётов представленным методом хорошо согласуются с данными работы [19], в которой расчёт проводился методом установления от камеры с учетом пограничного слоя в сопле, расхождение результатов расчетов не превышает 5%.

Следует подчеркнуть, что в расчётных алгоритмах выполняются законы сохранения, поэтому сравнение с экспериментальными данными на оси струи вполне информативно и представленного объема расчётов и экспериментов достаточно для верификации и валидации моделей турбулентной вязкости.

Таким образом, показано, что разработанный метод позволяет проводить расчёт характеристик струи с применением дифференциальных моделей турбулентности. Исключение составляет зона (протяженностью  $\sim 10$  толщин пограничного слоя сопла) в узком слое смешения струи около кромки сопла, в которой влияют распределения параметров в пограничном слое в выходном сечении сопла. Далее вниз по потоку, турбулентная вязкость в слое смешения и профили параметров целиком определяются принятой моделью турбулентности. Поэтому, для анализа применимости различных моделей турбулентности к расчёту рассматриваемых струйных течений, изложенный метод задания начальных и граничных данных вполне пригоден.

В последующих расчётах, в качестве исходных данных принимались уровни турбулентности на срезе сопла соответствующие параметрам  $a=0.01$ ,  $b=0.01$ .

## 2 Экспериментальные данные

Наиболее известные систематические измерения влияния температуры на распределение осевой скорости сверхзвуковых изобарических струй даны в работе [23]. В этих испытаниях рассматривались изобарические подогретые струи воздуха при  $n_a=P_a/P_e=1$ , числе Маха на срезе сопла  $M_a=2$ , и температуре в камере, которая изменялась в диапазоне 500К–1370К.

Для получения общей картины сравнения расчетов с экспериментом, экспериментальные данные работы [23] были обобщены одной зависимостью.

На рисунке 1 приведены результаты обобщения экспериментальных данных работы [23] по влиянию температурного фактора на распределение осевой скорости. Скорость на оси струи при изменении температуры представляется формулой (сплошная линия на рисунке 1)

$$U/U_a=1-\exp(-0.216/f-5.84/f^{2.5}), \text{ при } f < 4, \quad (8)$$

$$f=X/X_{CT}, \quad X_{CT}=X_{C300}(0.64+0.36K_H), \quad (9)$$

здесь  $X_{CT}$  – длина начального участка «горячих» струй;

$K_H=C_{pe}T_e/(C_{pa}T_0)$  – энтальпийный фактор;

$C_{pe}$ ,  $C_{pa}$  – теплоемкости газов внешней среды и на срезе сопла, соответственно;

$T_e$ ,  $T_0$  – температуры внешней среды и в камере, соответственно.

$X_{C300}$  – длина начального участка "холодных" струй ( $T_e = T_0$ ), которая вычисляется с учетом влияния показателя адиабаты на срезе сопла  $\gamma$  для горячих струй по критерию  $\gamma M_a^2$ :

$$X_{C300}/R_a=0.44+8.97(\gamma M_a^2)^{0.45}, \quad (10)$$

здесь  $R_a$  – радиус срез сопла,  $U_a$  – скорость на срезе сопла.

Характер зависимости длины начального участка струи от температуры приведен в таблице 1. Необходимо отметить, что, по экспериментальным данным, длина начального участка сверхзвуковой затопленной струи (9) практически перестает засвистеть от температуры струи при энтальпийном факторе  $K_H$  приблизительно меньше величины 0.2. Поэтому рассматриваемый диапазон экспериментальных данных по температуре в камере 500К - 1370К является определяющим.

Таблица 1. Характер зависимости длины начального участка сверхзвуковой струи от температуры  $T_0$  при  $C_{pe}=C_{pa}$ ,  $T_e=300$ К.

$T_0$ , К	300	600	1000	1500	2500	3000
$K_H=C_{pe}T_e/(C_{pa}T_0)$	1	0.5	0.3	0.2	0.12	0.1
$0.64+0.36 K_H$	1	0.82	0.748	0.712	0.6832	0.676

## 3 Результаты расчетов

На рисунках (4-13) представлены результаты расчётов изобарических сверхзвуковых осесимметричных струй, в сравнении с полученными (8-10) обобщенными зависимостями, приведены скорости на оси струи  $M_a=2$  с варьированием температуры в камере  $T_0=508\div 1367$ К. На этих рисунках значками обозначены результаты расчётов, линией обобщенная экспериментальная зависимость (8-10). На оси абсцисс отложены расстояния от среза сопла, отнесенные к длине начального участка  $X_{CT}$ . На оси ординат скорость на оси струи, отнесенная к скорости на срезе сопла.

Анализируя результаты на рисунках (4-13) можно сделать следующие выводы.

Модель Прандтля (рис. 4) согласуется с экспериментальными данными при изменении числа Маха и температуры струи.

Анализ моделей с одним уравнением (рис. 5-7) дает, что модель S-A, в которой отсутствуют поправки на сжимаемость, существенно расходится с экспериментом (рис б). При этом поправки Секундова (рис. 5) приближают расчётные и экспериментальные зависимости, а модель Секундова с набором констант  $n_1$ , удовлетворительно согласуется с экспериментом (рис. 7) .

Модель Секундова с двумя уравнениями  $k-v$  (рис. 8) значительно расходится с экспериментом. Причем расчёт дает завышение дальности горячей струи.

Модель  $k-\varepsilon$  стандарт (рис. 9) занижает дальность струи. Вместе с этим, поправки SZ (рис. 10) рассчитывают влияние температурного фактора неудовлетворительно: дальность горячих струй, существенно превышает экспериментальную. В расчётах по этой модели (рис. 10) температурный фактор практически не оказывает влияния на дальность сверхзвуковых струй, что противоречит эксперименту. Отметим, что аналогичные результаты были получены в работе [19] для модели SST [22].

Модель  $k-\omega$  2007 (Рис. 11) расходится с экспериментом по влиянию температуры струи.

Результаты расчётов с помощью модели  $k-\varepsilon$  CS приведены на рис. 12. Как видно данная модель дает завышение дальности горячих струй. Отметим меньшее "расслоение" расчётов по сравнению с моделью  $k-\varepsilon$  SZ (рис. 10). Этот факт свидетельствует в пользу физичности поправок модели  $k-\varepsilon$  CS.

Данные расчетов с поправками Молчанова (линейная зависимость от турбулентного числа Маха) показаны на рис. 13. Как видно, данных на рис. 12,13 учет влияния температурного фактора с "линейными" поправками на сжимаемость, не дает каких либо преимуществ по сравнению с "классическими" квадратичными.

Таким образом, из рассмотренных моделей, изменение температуры струи удовлетворительно отражается в расчётах сверхзвуковых струй только по моделям Прандтля и Секундова с модифицированными коэффициентами.

## Выводы

В работе рассмотрены проблемы моделирования турбулентности связанные с учетом сжимаемости и температурного фактора. Представлен подход и проведен анализ эффективности наиболее известных моделей турбулентной вязкости.

Рассмотрены: модель Прандтля, модели с одним уравнением Секунова и Спэларта-Аллмараса, двухпараметрические модели Секундова,  $k-\varepsilon$  модель со "стандартным" набором констант,  $k-\varepsilon$  модель с поправками на сжимаемость и  $k-\omega$ .

Результаты основаны на сравнении расчетов с экспериментальными данными. Для сравнения использовались известные эксперименты Сейнера по измерениям параметров на оси струи  $Ma=2$  при изменении температуры в камере  $T_0=508\div 1367K$ , причем показано, что при дальнейшем увеличении температуры струи, полученные выводы не изменятся.

Показано, что основные модели сжимаемой диссипации в двухпараметрических моделях дают неудовлетворительные результаты для расчета горячих сверхзвуковых струй.

Наилучшие результаты дают модель турбулентности Прандтля и однопараметрическая модель Секундова с модифицированными эмпирическими коэффициентами.

## Библиографические ссылки

1. Турбулентность / Под ред. П. Бредшоу. – М.: Мир, 1980.- 343с.
2. Wilcox D.C. Turbulence modeling for CFD. Second edition. – DCW Industries, Inc., 1998.- 460р.
3. Белов И.А., Исаев С.И. Моделирование турбулентных течений ./ Балт.гос.техн.ун-т. СПб, 2001,-109с.



4. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели турбулентной вязкости // Изв. АН СССР, МЖГ.-1993.-№ 4.-С.69–84.
5. Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. A One–Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows// AIAA Paper 92–439.-1992.
6. Козлов В.Е., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР, МЖГ.-1986.- №6.
7. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабным турбулентным потоком. //Изв. АН СССР, МЖГ.-1997.-№ 2.-С.59–68.
8. Wilcox D. C. Formulation of the  $k-\omega$  Turbulence Model Revisited//AIAA 2007–1408, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada. -2007.
9. Jones, W.P., and Launder, B.E., “The Prediction of Laminarization with a Two– Equation Model of Turbulence// International Journal of Heat and Mass Transfer.-1972.-Vol. 15.-pp. 301–314.
10. Chien K.–Y. Predictions of Channel and Boundary Layer Flows with a Low–Reynolds–Number Turbulence Model // AIAA Journal.-1982.-Vol. 20.- No. 1.- pp.33-38.
11. Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O. The Analysis and Modeling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence // Journal of Fluid Mechanics.-1991.-Vol 227.-pp. 473–493.
12. Sarkar S., and Lakshmanan B. Application of a Reynolds Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer // AIAA Journal.-1991.- Vol.29.- No.5.- pp. 743–749.
13. Sakar S. The pressure–dilatation correlation in compressible flows // Physics of Fluids.-1992.-A. 4 (12).-pp. 2674–2682.
14. Zeman O. Dilatation dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layer // Phys of Fluids.-1990.-2.-pp. 178–188.
15. Papp J. L., Dash S. M. Turbulence Model Unification and Assessment for High–Speed Aeropropulsive Flows// AIAA–2001–0880, 39th AIAA, Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Jan 8–11.-2001.
16. Kenzakowski D.C. Turbulence modeling improvemens for jet noise prediction using PIV datasets//AIAA–2004–2978, 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, 10–13 May.-2004.
17. Fairweather M., Ranson K.R. Prediction of underexpanded jets using compressibility–corrected, two–equation turbulence models// Progress in Computational Fluid Dynamics.-2006.-Vol.6,-No. 1/2/3.
18. Глушко Г.Ф., Иванов И.Э., Крюков И.А. Моделирование турбулентности в сверхзвуковых струйных течениях. Физико-химическая кинетика в газовой динамике // www.chemphys.edu.ru/pdf/2010-01-12-023.pdf
19. Dembowski M. A., Georgiadis N. J. An Evaluation of Parameters Influencing Jet Mixing Using the WIND Navier–Stokes Code// NASA/TM–002–211727. -2002.
20. Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O. The Analysis and Modeling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence // Journal of Fluid Mechanics.-1991.-Vol 227.-pp. 473–493.
21. Sarkar S., and Lakshmanan B. Application of a Reynolds Stress Turbulence Model to the Compressible Shear Layer // AIAA Journal.-1991.- Vol.29.- No.5.- pp. 743–749.
22. Menter, F. R., Zonal Two Equation  $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows//AIAA Paper 93–2906.-1993.
23. Seiner, J.M., Ponton, M.K., Jansen, B.J., and Lagen, N.T. The Effect of Temperature on Supersonic Jet Noise Emission// DGLR/AIAA Paper 92–02–046.-1992.
24. Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н. К созданию универсальной однопараметрической модели турбулентной вязкости // Изв. АН СССР, МЖГ.-1993.-№ 4.-С.69–84.
25. Spalart, P. R. and Allmaras, S. R. A One–Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows// AIAA Paper 92–439.-1992.
26. Козлов В.Е., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР, МЖГ.-1986.- №6.

27. Секундов А.Н. Модель турбулентности для описания взаимодействия пограничного слоя с крупномасштабным турбулентным потоком. //Изв. АН СССР, МЖГ.-1997.-№ 2.-С.59–68.
28. Wilcox D. C. Formulation of the  $k-\omega$  Turbulence Model Revisited//AIAA 2007–1408, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada. -2007.
29. Fairweather M., Ranson K.R. Prediction of underexpanded jets using compressibility–corrected, two–equation turbulence models// Progress in Computational Fluid Dynamics.-2006.-Vol.6,-No. 1/2/3.
30. Kenzakowski D.C., Papp J., Dash S.M. Evaluation of Advanced Turbulence Models and Variable Prandtl/Schmidt Number Methods for Propulsive Flows//AIAA Paper 2000–0885.- 2000.
31. Launder B.E., Spalding D.B. The Numerical Computation of Turbulent Flow// Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering .-1974.-Vol. 3.- pp. 269-289.
32. Глебов Г.А., Молчанов А.М. Модель турбулентности для расчета высокоскоростных реагирующих струй - В кн. Исследование теплообмена в летательных аппаратах – М.: МАИ.- 1982.- С.6-11.
33. Сафронов А.В. Численный метод расчёта струй продуктов сгорания при старте ракет// Космонавтика и ракетостроение.-2007. -№ 1(46).-С.72-79.
34. Сафронов А.В. Разностный метод решения стационарных уравнений газодинамики на основе соотношений на разрывах // Космонавтика и ракетостроение. -2008.-Вып. 1(50). С. 31–35.

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2012 г.

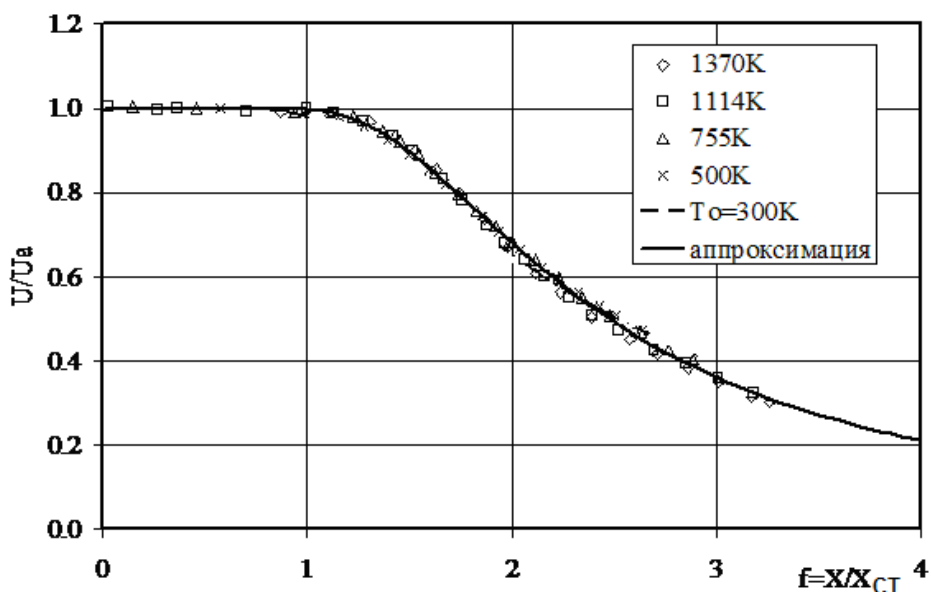


Рисунок 1. Аппроксимация экспериментальных данных Сейнера.

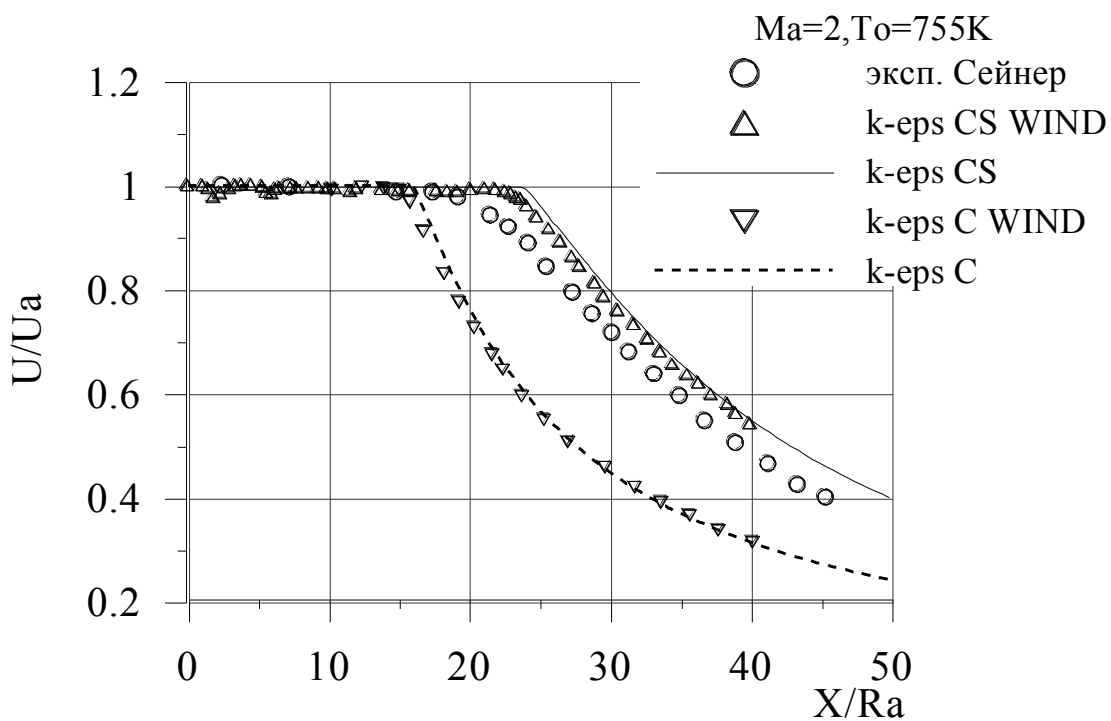
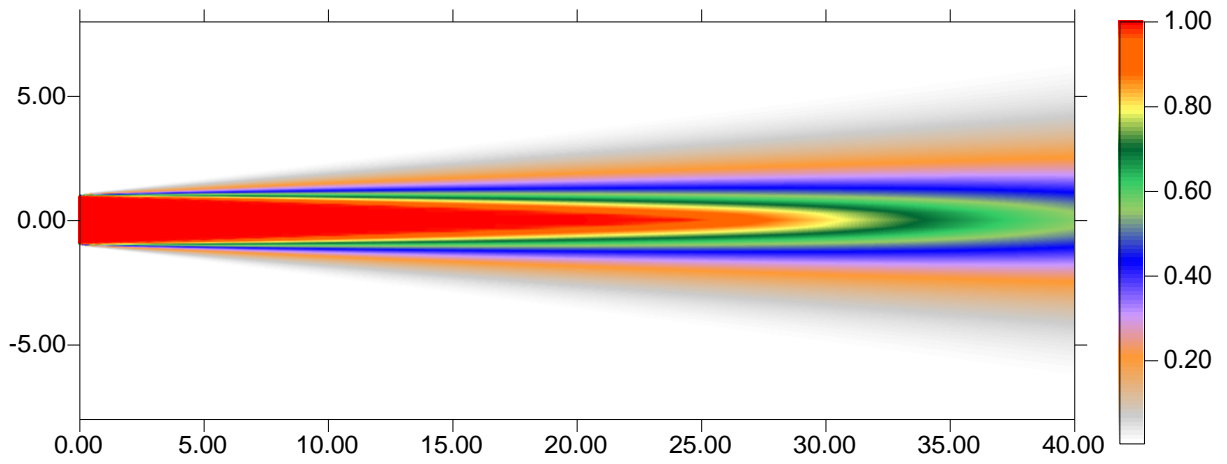
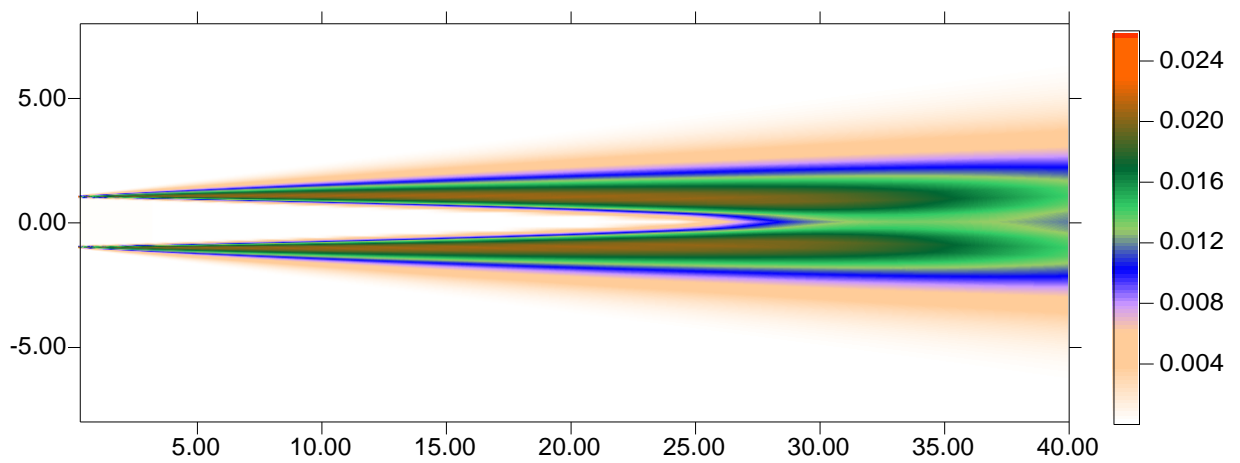


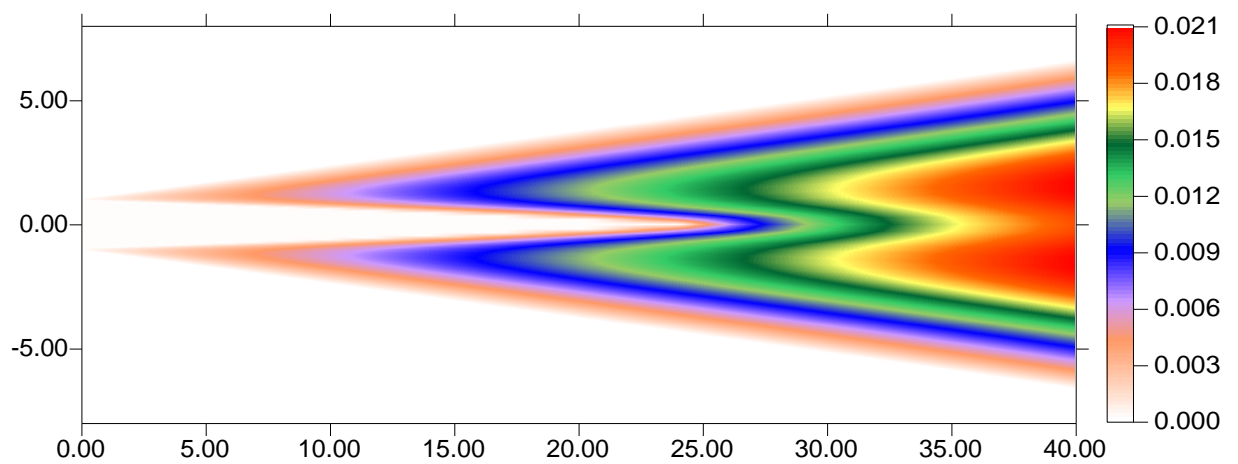
Рисунок 2. Сравнение результатов расчетов с расчетами пакетом WIND и экспериментом Сейнера.



(а) скорость



(б) кинетическая энергия пульсации



(в) турбулентная вязкость

Рисунок 3. Результаты расчетов  $Ma=2$ ,  $T_0=755K$ .  
 Модель  $k-\varepsilon$  CS. Начальные параметры  $a=0.01$ ,  $b=0.01$ .

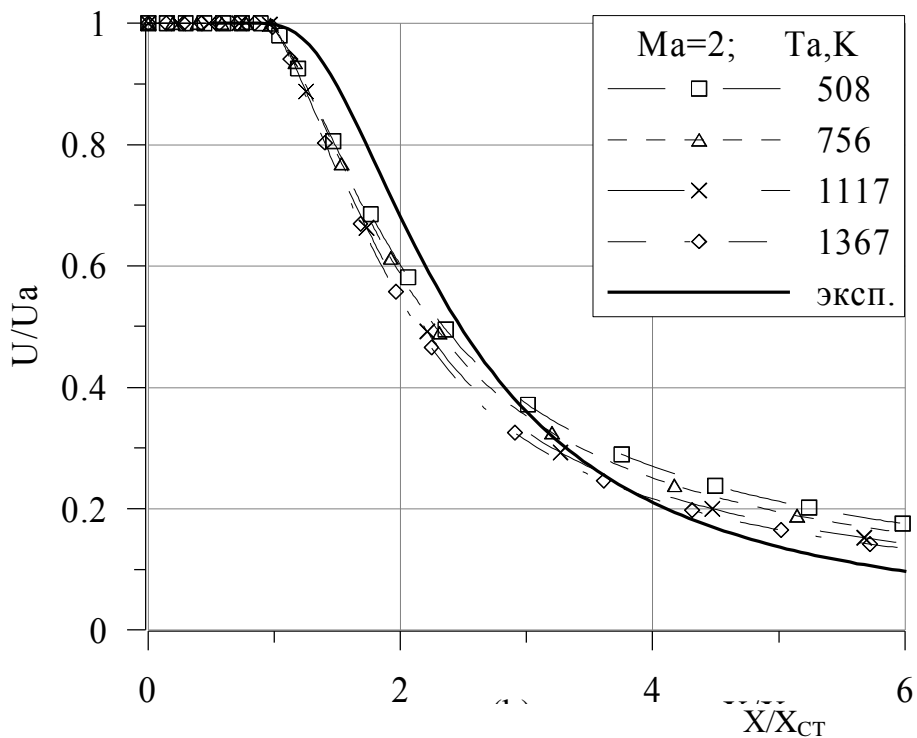


Рис. 4. Модель Прандтля

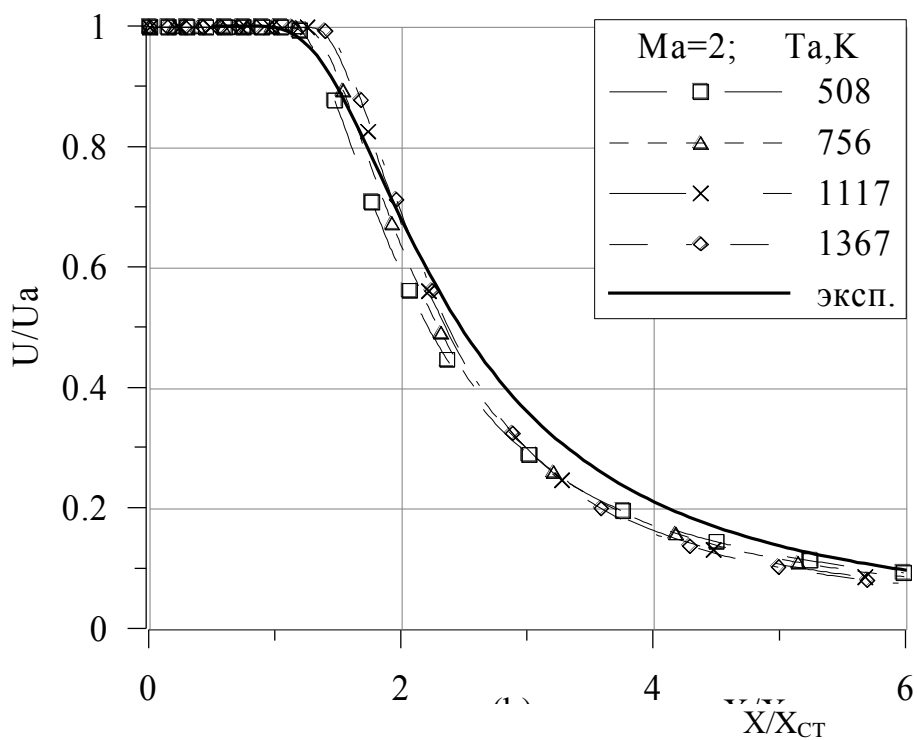


Рис. 5. Модель Секундова 1

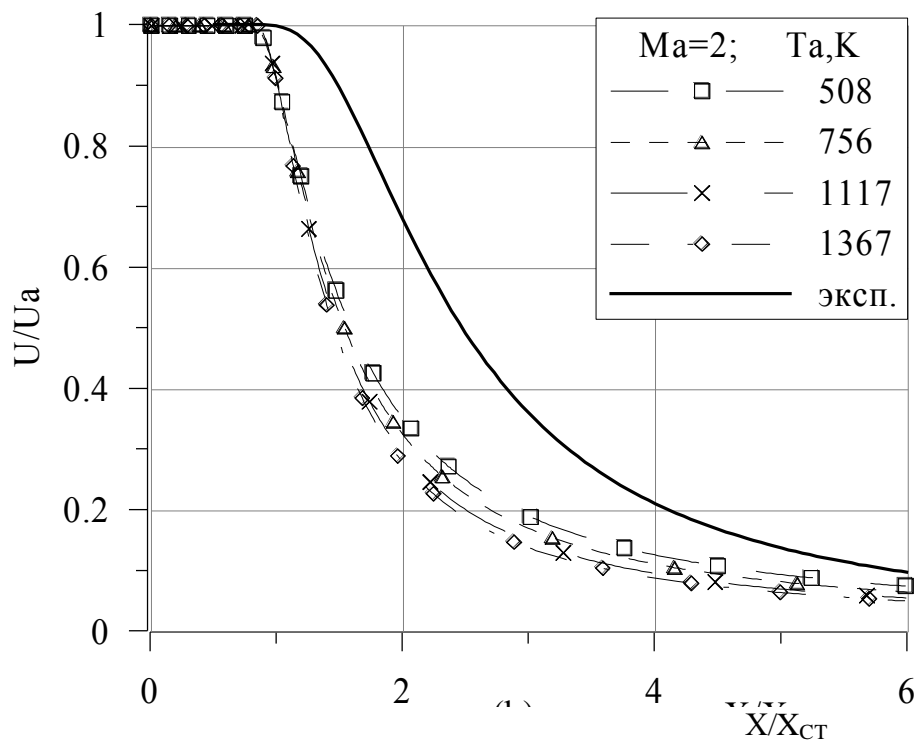


Рис. 6. Модель S-A

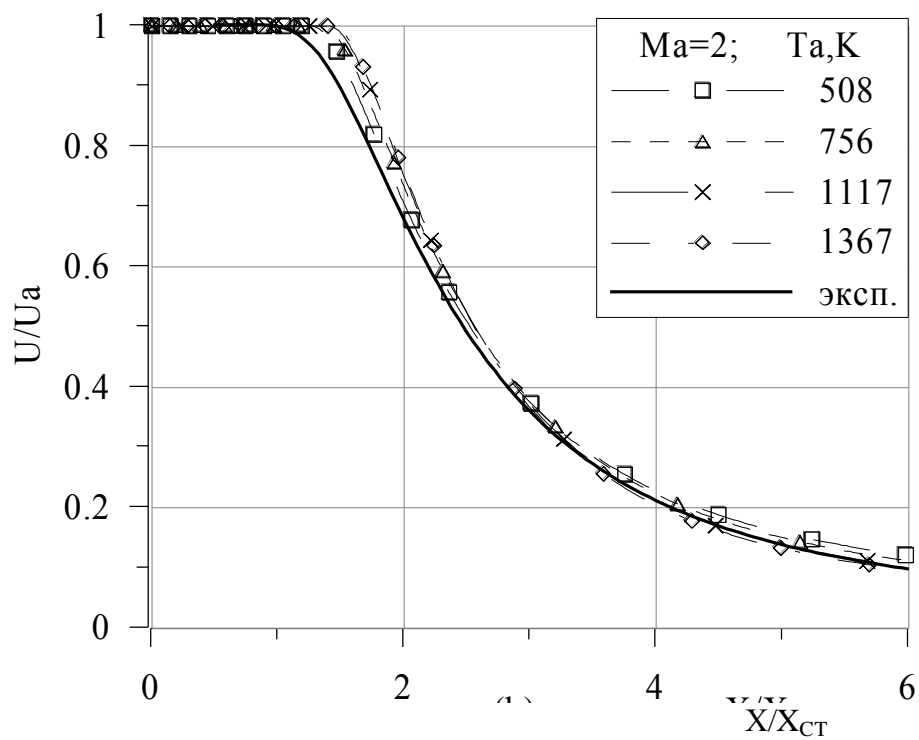


Рис. 7. Модель Секундова n1.

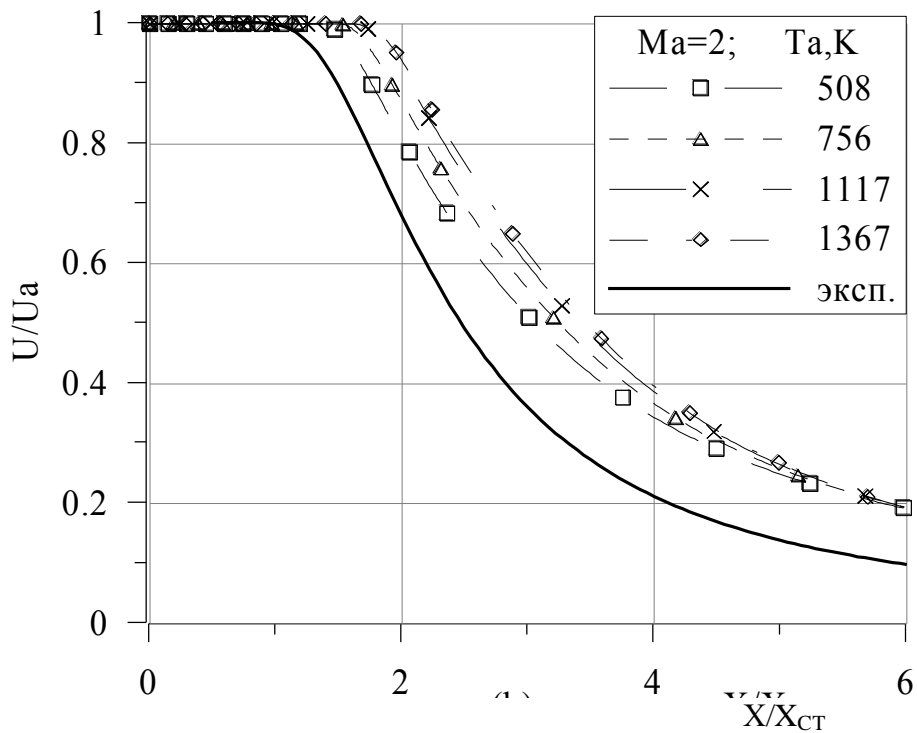


Рис. 8. Модель Секундова  $k-v$ .

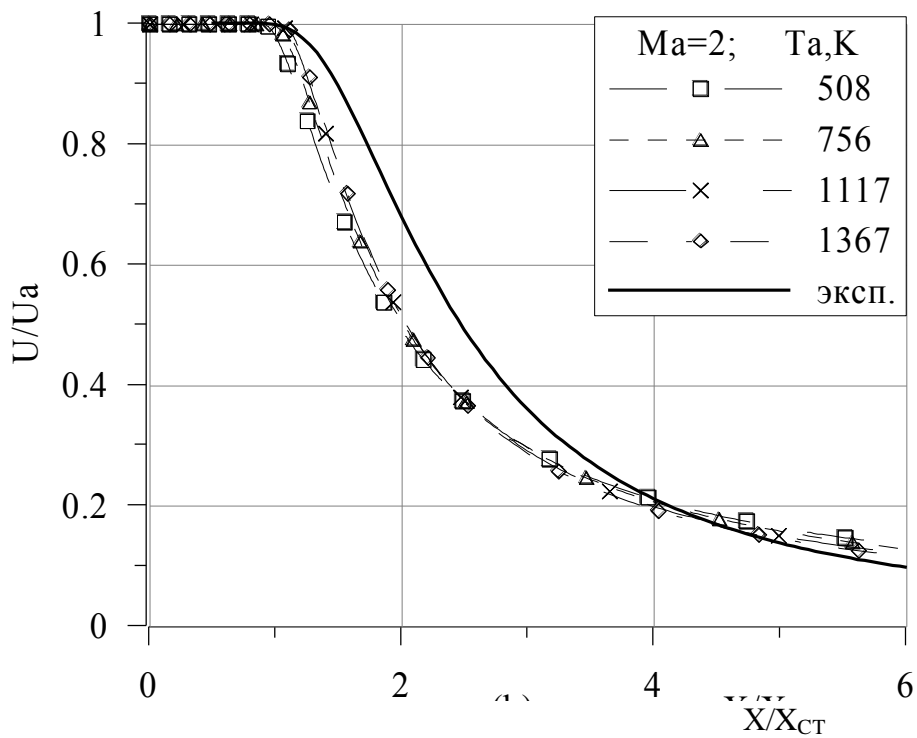


Рис. 9. Модель  $k-\epsilon$  стандарт

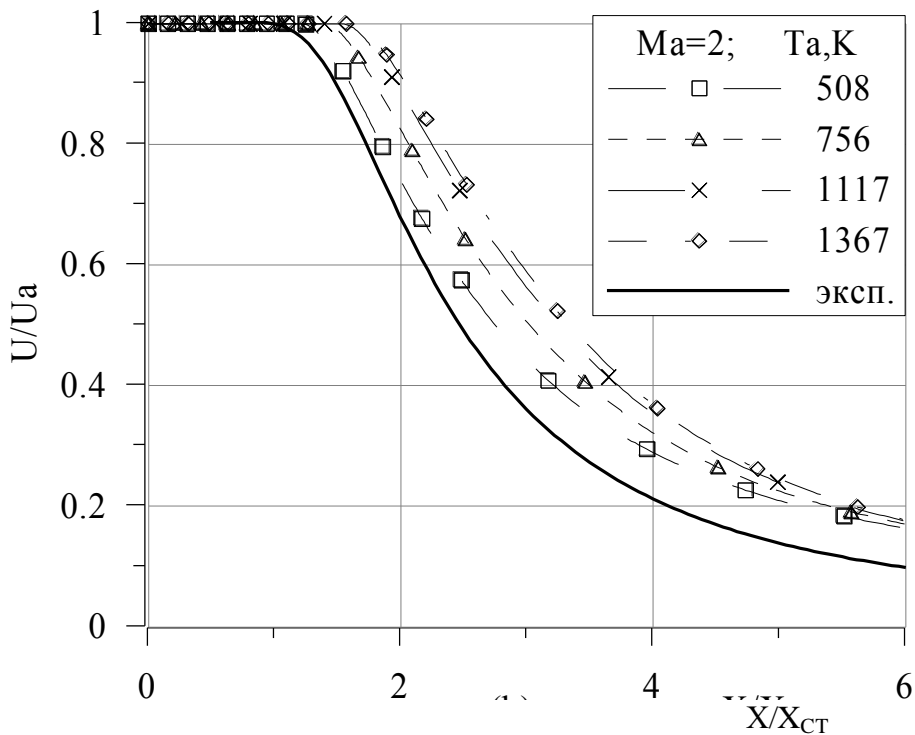


Рис. 10. Модель  $k-\varepsilon$  SZ

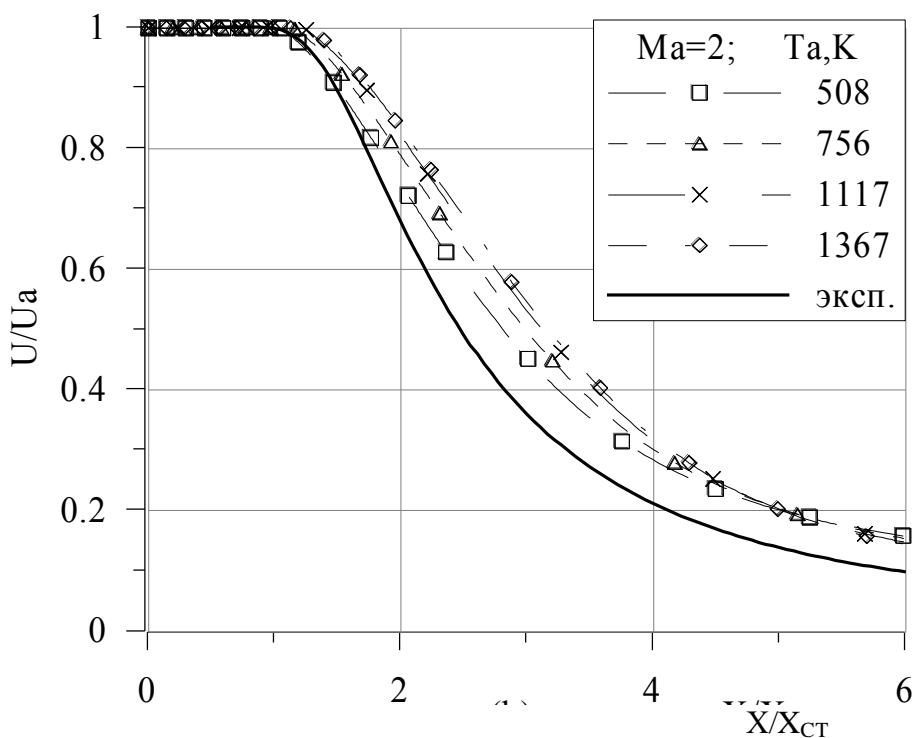


Рис. 11. Модель  $k-\omega$  2007



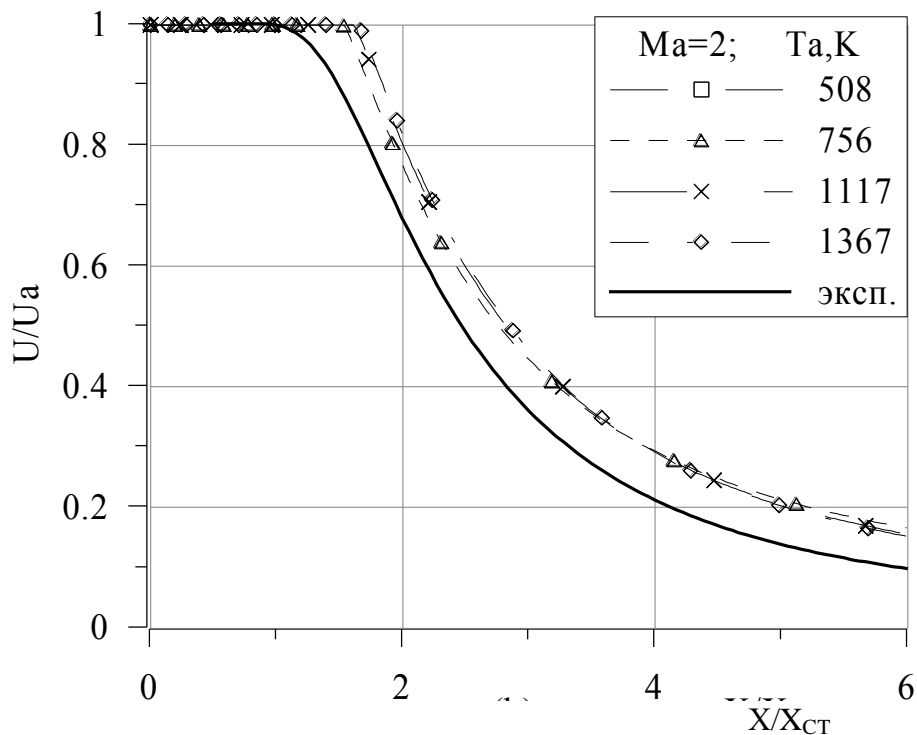


Рис.12. Модель  $k-\varepsilon$  CS (Chien Sarkar)

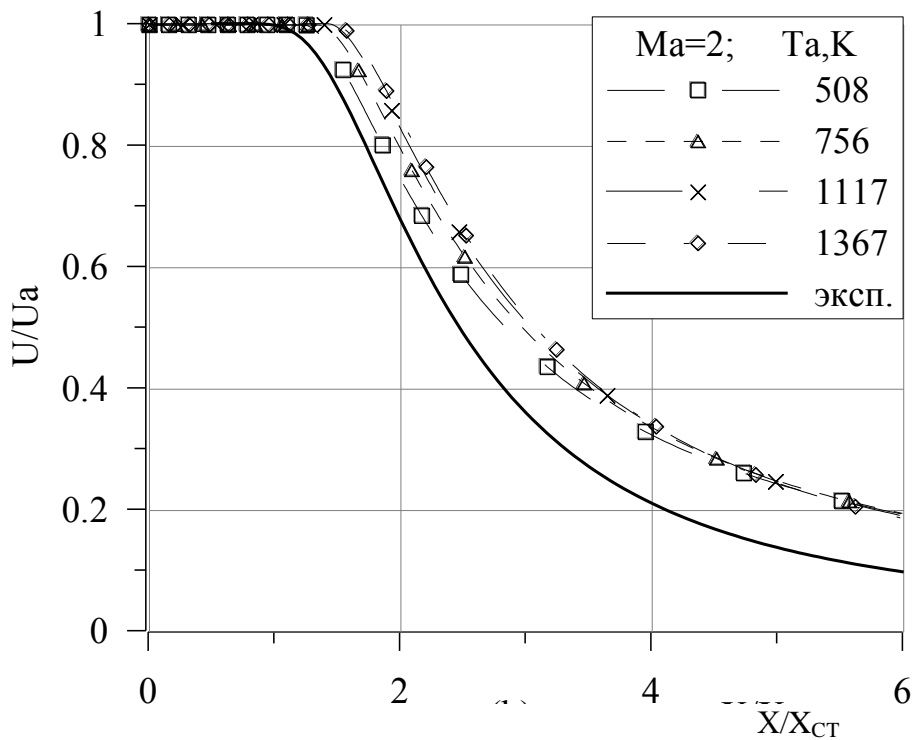


Рис.13. Модель  $k-\varepsilon$  Молчанов