

УДК 629.7.015

## КЛАССИФИКАЦИЯ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ.

Хатунцева О.Н.  
ОАО РКК «Энергия», МФТИ  
[ol-khatun@yandex.ru](mailto:ol-khatun@yandex.ru)

### Аннотация

Приводится классификация гистерезисных явлений. Разрабатываются замкнутые расчетно-теоретические модели для описания гистерезисных функций первого и второго типов.

**Ключевые слова:** гистерезис, демпфирование, аэродинамические коэффициенты.

## CLASSIFICATION OF HYSTERESIS FUNCTIONS. THEORETICAL MODELS AND DESCRIPTION METHODS.

Classification of hysteresis phenomena is addressed. The consistent theoretical and computation models are presented for description of the first and second kind hysteresis functions

**Keywords** hysteresis, damping, aerodynamic coefficients.

Во многих областях физики, химии, биологии, экономики довольно часто встречаются процессы, в которых можно наблюдать зависимость измеряемых параметров, не только от варьируемого аргумента, но и от направления изменения этого аргумента (см., например, [1]-[4]). Подобные явления принято называть гистерезисными явлениями.

Ниже речь будет идти в основном о явлениях, связанных с аэродинамическим гистерезисом, однако многие выводы будут иметь общий характер и могут быть применены в других областях исследования.

Изучение гистерезиса в аэродинамике имеет довольно давнюю историю (см., например, [5]), однако является актуальным и по сей день.

### 1 Классификация гистерезисных функций

Все гистерезисные явления в аэродинамике и соответствующие им функциональные зависимости следует разделить на два типа. К одному из них (мы будем его называть вторым) можно отнести те явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от величины (модуля) скорости изменения аргумента. К первому же типу отнесем те явления, которые зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости изменения этого аргумента.

Возможно также существование “смешанных” гистерезисных явлений, которые имеют отличительные черты явлений и первого и второго типов.

Рассмотрим в отдельности физические и математические особенности явлений обоих типов.

Начнем с описания явлений, относящихся к первому типу. Предположим, мы исследуем зависимость параметра  $m$  от варьируемого аргумента  $\alpha$ . Поскольку, априори известно, что исследуемые процессы зависят еще и от скорости изменения аргумента, то есть  $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$ , то, очевидно, что изображение зависимости исследуемой функции  $m$  только от самого аргумента  $\alpha$  на координатной плоскости  $(m; \alpha)$  является проекцией фазового

пространства большей размерности (как минимум, трехмерного пространства) на пространство меньшей размерности (на плоскость). Поэтому, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае, может существовать неопределенность в зависимости, исследуемой функции  $m$  только от одного аргумента, что, в свою очередь, может привести ее к гистерезисному виду на плоскости  $(m; \alpha)$ . Такие гистерезисные функции, как правило, имеют вид “петель” с вырожденными концами, в местах изменения направления варьирования аргумента (на рис.1 область  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ ). Если проводить исследование зависимости  $m(\alpha)$  при малой скорости изменения аргумента  $\dot{\alpha}$  ( $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ ), должно произойти “вырождение” гистерезисной функции в однозначную функцию  $m(\alpha)$  на плоскости  $(m; \alpha)$ .

Физические аспекты, относящиеся к гистерезисным явлениям первого типа, связаны с эффектом запаздывания реакции рассматриваемой системы при воздействии на нее внешних сил. В аэродинамике, таким эффектом является демпфирование. Происходит аэродинамическое демпфирование следующим образом. При положительном вращении углы атаки обтекаемых поверхностей, расположенных позади ЦМ, увеличиваются, а у тех, что впереди - уменьшаются. Таким образом, вращение приводит к тому, что дополнительная подъемная сила позади ЦМ летательного аппарата направлена вверх, а впереди ЦМ - вниз, и появляется дополнительный (демпфирующий) момент, направленный против вращения.

Для процессов, относящихся ко второму типу гистерезисных явлений, характерно отсутствие зависимости исследуемого параметра от модуля скорости изменения варьированного аргумента. Такие функции на плоскости  $(m; \alpha)$ , как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода. Точки разрыва при изменении направления варьированного аргумента, как правило, не совпадают. Иногда может наблюдаться некоторая корреляция и с изменением скорости варьированного аргумента, но она носит скорее вероятностный, нежели детерминированный характер. Примерами таких явлений могут служить зависимость силы сопротивления обтекаемой сферы от числа Рейнольдса  $C_x(\text{Re})$  при переходе от ламинарного к турбулентному режиму обтекания и обратно в дозвуковом потоке; изменение давления на цилиндре за угловой кромкой тел конус-цилиндр при увеличении и уменьшении числа Маха или угла атаки в районе критических чисел Маха, характеризующихся переходом от безотрывного обтекания угловой кромки к отрывному и наоборот [6], а так же переход от регулярного характера отражения к маховскому и обратно при обтекании клина сверхзвуковым потоком, в процессе изменения угла клина или скорости набегающего потока [7]-[9]. При описании гистерезисных явлений второго типа нельзя однозначно утверждать, что зависимость  $m(\alpha)$  на плоскости  $(m; \alpha)$  является проекцией фазового пространства физических переменных большей размерности на эту плоскость. Как правило, возникновение таких явлений обусловлено возможностью существования различных режимов процесса в одном диапазоне значений варьированного аргумента.

## 1.1 Гистерезисные функции первого типа

Остановимся подробнее на описании гистерезисных функций первого типа. Если подходить к описанию процессов, описываемых ими, отталкиваясь от полученных для стационарных случаев экспериментальными или численными методами зависимостей функции  $m_{st}(\alpha)$ , то можно привести следующие рассуждения.

В точках нулевой скорости изменения аргумента  $\alpha$ , функция  $m(\alpha)$  не будет зависеть от направления изменения вариации аргумента:  $m(\alpha, \dot{\alpha})|_{\dot{\alpha}=0} = m(\alpha) = m_{st}(\alpha)$ .

В области  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ , где  $\dot{\alpha} \neq 0$  функция  $m(\alpha, \dot{\alpha})$  имеет некоторое распределение, зависящее от величин  $\dot{\alpha}$ . Будем считать, что среднее значение этой величины в каждой точке  $\alpha$  равняется ее стационарному значению  $m_{st}(\alpha)$  в этой точке.

Рассмотрим распределение параметра  $m$  по скоростям  $\dot{\alpha}$  в точке  $\alpha$ :

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\alpha}) \rangle = \frac{1}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)} \int_{\dot{\alpha}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\alpha}) d\dot{\alpha}.$$

Если перейти к безразмерной переменной по скорости  $\dot{\phi} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)}$ , то можно записать выражение для распределения параметра  $m$  в виде:

$$m_{st}(\alpha) = \langle m(\alpha, \dot{\phi}) \rangle = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi}. \quad (1)$$

А, поделив обе части равенства на величину  $m_{st}(\alpha)$  (при условии, что  $m_{st} \neq 0$ ), получим соотношение:

$$\langle M^2(\alpha) \rangle = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} M^2(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi} = 1,$$

где  $M^2(\alpha, \dot{\phi}) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)}$  - плотность распределения по скоростям  $\dot{\phi}$  в точке  $\alpha$ .

Гистерезисная кривая представляет собой реализацию вполне определенных значений скорости  $\dot{\phi}$  в каждой точке  $\alpha$ . Этими значениями являются  $\dot{\phi}_{\min}(\alpha)$  и  $\dot{\phi}_{\max}(\alpha)$ . Введем обозначения соответствующих им значений функции  $M^2(\alpha)$ :  $M_A^2(\alpha) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \Big|_{\dot{\phi}=\dot{\phi}_{\min}} = \frac{m_A(\alpha)}{m_{st}(\alpha)}$ ,

$M_B^2(\alpha) = \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \Big|_{\dot{\phi}=\dot{\phi}_{\max}} = \frac{m_B(\alpha)}{m_{st}(\alpha)}$ , где  $m_A(\alpha)$  и  $m_B(\alpha)$  - значения функции  $m(\alpha)$  в точке  $\alpha$  на нижней и верхней ветвях гистерезисной кривой. Остальным (нереализованным) значениям скорости  $\dot{\phi}$ :  $\dot{\phi}_{\min}(\alpha) < \dot{\phi} < \dot{\phi}_{\max}(\alpha)$  будут соответствовать  $M^2(\alpha)$ :  $M_A^2(\alpha) < M^2(\alpha) < M_B^2(\alpha)$  (см. рис.2).

Построим ячейку, соответствующую точке  $\alpha$  (см. рис.1-2). Для этого в выбранной точке  $\alpha$  строим вертикальную прямую до пересечения с ветвями гистерезиса. В точках пересечения строим две горизонтальные прямые так же до пересечения с гистерезисной кривой. Полученные таким образом крайняя левая и крайняя правая точки будут, соответственно, иметь координаты:  $\alpha_A(\alpha)$  и  $\alpha_B(\alpha)$ .

Каждому значению  $M^2(\alpha)$  из диапазона  $M_A^2(\alpha) < M^2(\alpha) < M_B^2(\alpha)$  соответствует определенный интервал  $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)}$ . Причем, для любого значения  $M_A^2(\alpha) \leq M^2(\alpha) \leq M_B^2(\alpha)$  верно неравенство:  $\Delta\alpha_{M^2(\alpha)} \leq \alpha_B - \alpha_A$ . Величина  $\alpha_B - \alpha_A = \Delta\alpha_{M_B^2} + \Delta\alpha_{M_A^2}$  (где  $\Delta\alpha_{M_A^2} = \alpha - \alpha_A$ ,  $\Delta\alpha_{M_B^2} = \alpha_B - \alpha$ ) - определяет дисперсию параметра  $\alpha$  в заданной точке.

Для того чтобы найти дисперсионное соотношение в рассматриваемой ячейке, являющейся подобластью гистерезисной области в точке  $\alpha$ :  $\alpha_A < \alpha < \alpha_B$ , рассмотрим коммутационное соотношение двух операторов: оператора сдвига вдоль скорости изменения аргумента  $\hat{k} = \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}$  и оператора умножения  $\hat{\alpha} = \alpha$ :  $[\hat{k}\hat{\alpha}]M = \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}} M$ .

Для них можно записать соотношения:

$$\Delta_M^k = \left[ (\hat{k}^2 M, M) - (\hat{k} M, M)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^\alpha = \left[ (\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha} M, M)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq \frac{1}{2} \left| \left[ \hat{k} \hat{\alpha} \right] M, M \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в Гильбертовом пространстве  $H^1(\Omega \subset R^1)$ .

Таким образом, в пространстве с дополнительным параметром – скоростью изменения аргумента, имеем:

$$(\hat{k} M, M) = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial M}{\partial \dot{\phi}} d\dot{\phi} = \frac{1}{2} (M_B^2(\alpha) - M_A^2(\alpha));$$

$$(\hat{k}^2 M, M) = \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} M \frac{\partial^2 M}{\partial \dot{\phi}^2} d\dot{\phi} = \left( M_B(\alpha) \frac{\partial M_B(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\max}(\alpha)} - M_A(\alpha) \frac{\partial M_A(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\min}(\alpha)} \right) - \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\partial M}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 d\dot{\phi}$$

Здесь  $M_A(\alpha)$  и  $M_B(\alpha)$  - соответственно минимальное и максимальное значения параметра  $M$  в точке  $\alpha$ .

Интеграл  $\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\partial M}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 d\dot{\phi}$ , стоящий в правой части этого выражения, в линейном при-

ближении можно записать в виде:

$$\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\partial M}{\partial \dot{\phi}} \right)^2 d\dot{\phi} \approx \left( \frac{M_B(\alpha) - M_A(\alpha)}{\dot{\phi}_{\max}(\alpha) - \dot{\phi}_{\min}(\alpha)} \right)^2 (\dot{\phi}_{\max}(\alpha) - \dot{\phi}_{\min}(\alpha)) = (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

Тогда полученное выражение для  $(\hat{k}^2 M, M)$  примет вид:

$$(\hat{k}^2 M, M) \approx \left( M_B(\alpha) \frac{\partial M_B(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\max}(\alpha)} - M_A(\alpha) \frac{\partial M_A(\alpha)}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B(\alpha) - M_A(\alpha))^2.$$

И, следовательно,

$$\Delta_M^k \approx \left[ \left( M_B \frac{\partial M_B}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B - M_A)^2 - \frac{1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

Среднеквадратичное отклонение по аргументу:  $\Delta_M^\alpha = \left[ (\hat{\alpha}^2 M, M) - (\hat{\alpha} M, M)^2 \right]^{1/2} = \left( \langle \alpha^2 \rangle - \langle \alpha \rangle^2 \right)^{1/2}$ , для ячейки замкнутой гистерезисной кривой в точке  $\alpha$  должно быть равно половине расстояния, заключенного между точками  $\alpha_A(\alpha)$  и  $\alpha_B(\alpha)$ , то есть

$$\Delta_M^\alpha \approx \frac{1}{2} |\alpha_B(\alpha) - \alpha_A(\alpha)|. \quad (3)$$

Остается найти значение скобок Пуассона от коммутатора операторов в точке  $\alpha$ :

$$\left| \left[ \hat{k} \hat{\alpha} \right] M, M \right| = \left| \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\phi}} M^2 d\dot{\phi} \right| = \left| \int_{\alpha_A(\alpha)}^{\alpha_B(\alpha)} M^2 d\alpha \right| \approx \frac{1}{2} \left| (M_B^2(\alpha) - M_A^2(\alpha)) (\alpha_B(\alpha) - \alpha_A(\alpha)) \right|. \quad (4)$$

Наконец, вернемся к дисперсионному соотношению в фазовом пространстве:  $\Delta_M^k \Delta_M^\alpha \geq \frac{1}{2} |([\hat{k}\hat{\alpha}]M, M)|$ . Из него следует, что минимум дисперсии функции  $M(\alpha)$  по скоростям изменения аргумента  $\dot{\varphi}$  на участке  $\alpha_A(\alpha) \leq \alpha \leq \alpha_B(\alpha)$  (что соответствует минимуму производства энтропии при изменении направления вариации аргумента) будет достигаться, в случае равенства левой и правой частей этого соотношения. Однако в случае действия диссипативных сил, левая часть этого соотношения будет больше правой. Для того чтобы от неравенства перейти к равенству, введем коэффициент  $\gamma \geq 1$ . Он будет характеризовать степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента. В этом случае, рассматриваемое соотношение примет вид:

$$\Delta_M^k \Delta_M^\alpha = \frac{\gamma}{2} |([\hat{k}\hat{\alpha}]M, M)|.$$

Подставляя в это соотношение выражения (2)-(4), запишем уравнение:

$$\left( M_B \frac{\partial M_B}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\max}(\alpha)} - M_A \frac{\partial M_A}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \dot{\varphi}_{\min}(\alpha)} \right) - (M_B - M_A)^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (M_B^2 - M_A^2)^2.$$

Или, переходя обратно к физическим параметрам, получим

$$\frac{1}{2} m_{st} (\dot{\alpha}_{\max}(\alpha) - \dot{\alpha}_{\min}(\alpha)) \left( \frac{\partial m_B / \partial \alpha}{\partial \dot{\alpha}_{\max}(\alpha) / \partial \alpha} - \frac{\partial m_A / \partial \alpha}{\partial \dot{\alpha}_{\min}(\alpha) / \partial \alpha} \right) - m_{st} (\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2. \quad (5)$$

При гармоническом режиме изменений аргумента  $\alpha$  по времени  $t$ , нетрудно найти зависимость  $\dot{\alpha}(\alpha)$ . Действительно, в этом режиме для аргумента  $\alpha(t)$  должно выполняться соотношение:

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad \text{где } \alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - крайняя левая и крайняя правая точки гистерезиса (точки разворота),  $T$  - период гармонических изменений аргумента.

Следовательно,

$$\dot{\alpha}_{\min}^{\max} = \frac{\pi}{T} (\alpha_2 - \alpha_1) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \pm \frac{2\pi}{T} \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}. \quad (6)$$

Поэтому,

$$\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} \Big|_{\min}^{\max} = \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}}, \quad (7)$$

Из уравнения (5) с учетом (6), (7), получим соотношение:

$$2 \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right)^{-1} m_{st} \left( \frac{\partial m_B}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A}{\partial \alpha} \right) - m_{st} (\sqrt{m_B} - \sqrt{m_A})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} (m_B - m_A)^2,$$

где  $\alpha_1 < \alpha < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  и  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} < \alpha < \alpha_2$ .

При переходе от уравнения (5) к данному соотношению была произведена “привязка” к границам всей гистерезисной области – точкам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В результате, полученное соотношение перестало быть инвариантным и по отношению к выбору начала отсчета значений функции  $m(\alpha)$ . Чтобы полученное уравнение адекватно описывало гистерезисные явления при гармонических колебаниях тела, нужно сместить начало отсчета значений функции  $m(\alpha)$  так, чтобы в “серединой” точке:  $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ , стационарное значение функции было нулевым. Для этого сделаем замену:  $m(\alpha) \rightarrow m(\alpha) - m_{st.sp.}$ , где  $m_{st.sp.} = m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_{cp.}=(\alpha_1+\alpha_2)/2} = const$ . В результате уравнение преобразуется к виду:

$$2(m_{st} - m_{st.sp.}) \left( \frac{\partial m_B}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_{st} - m_{st.sp.}) (\sqrt{m_B - m_{st.sp.}} - \sqrt{m_A - m_{st.sp.}})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_B - m_A)^2. \quad (8)$$

Полную производную функции  $m(\alpha, \dot{\alpha})$  по параметру  $\alpha$  можно представить в виде:  $\frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha}$ . Следовательно, для стационарного параметра  $m_{st}(\alpha)$  полная производная по  $\alpha$  равна ее частной производной:  $\frac{dm_{st}(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha}$ . В случае если  $\dot{\alpha} \neq 0$  в рассматриваемом гармоническом режиме изменений аргумента  $\alpha$ , с учетом выражения (7) можно записать:

$$\left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\min}^{\max} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} \pm \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}.$$

При проектировании пространства  $(m; \alpha, \dot{\alpha})$  на плоскость  $(m; \alpha)$ , полные производные  $\left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\min}^{\max}$  задают частные значения производных для верхней и нижней ветвей кривой гистерезиса:

$$\left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\max} = \frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dm(\alpha, \dot{\alpha})}{d\alpha} \right|_{\min} = \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Поэтому, при гармоническом режиме изменений аргумента  $\alpha$  по  $t$ , можно записать:

$$\frac{\partial m_B}{\partial \alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} + \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial m_A}{\partial \alpha} = \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} - \frac{\pi}{T} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha}{\sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}} \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}}. \quad (10)$$

Из зависимостей (9)-(10) следует, что сумма производных  $\left( \frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial \alpha} \right)$  в выражении (8) равна удвоенному стационарному значению производной параметра  $m$  в точке  $\alpha$ :  $\left( \frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial \alpha} \right) = 2 \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha}$ . В этих случаях выражение (8) приобретает наиболее простой вид:

$$4(m_{st} - m_{st.sp.}) \frac{\partial m_{st}}{\partial \alpha} - \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_{st} - m_{st.sp.}) (\sqrt{m_B - m_{st.sp.}} - \sqrt{m_A - m_{st.sp.}})^2 = \frac{\gamma^2 + 1}{4} \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) (m_B - m_A)^2$$

или

$$4(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha} = (m_B(\alpha) - m_A(\alpha))^2 \left( \frac{1}{\alpha - \alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha} \right) \left( \frac{\gamma^2 + 1}{4} + \frac{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}}{\left( \sqrt{m_A(\alpha) - m_{st.cp.}} + \sqrt{m_B(\alpha) - m_{st.cp.}} \right)^2} \right). \quad (11)$$

Учитывая, выражение для разности значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке  $\alpha$ :  $\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha)$ , а так же соотношения:  $m_A(\alpha) = m_{st}(\alpha) - \frac{1}{2} \Delta m(\alpha)$ ,  $m_B(\alpha) = m_{st}(\alpha) + \frac{1}{2} \Delta m(\alpha)$ , в случае, когда  $|\Delta m(\alpha)/(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.})| < 1$ , получим

$$\left( \sqrt{m_A(\alpha) - m_{st.cp.}} + \sqrt{m_B(\alpha) - m_{st.cp.}} \right)^2 \approx 4(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}) \left( 1 - \frac{1}{16} \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}} \right)^2 \right) \approx 4(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.}).$$

Подставив это соотношение в выражение (11), запишем окончательно

$$\Delta m(\alpha) \approx \sqrt{\frac{16}{\gamma^2 + 2}} \sqrt{\left( m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.} \right) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha}} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha} \right|}, \quad (12)$$

где  $\Delta m(\alpha) = m_B(\alpha) - m_A(\alpha)$ ,  $\gamma \geq 1$ ,  $\alpha_1 \leq \alpha < \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$  и  $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} < \alpha \leq \alpha_2$ .

Выражение (12) может быть использовано для оценки зависимости разности значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой  $\Delta m(\alpha)$  от расчетных значений  $m_{st}(\alpha)$  и  $\frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha}$ , в точках  $\alpha \neq (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ , в которых выполняется соотношение:  $|\Delta m(\alpha)/(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.})| < 1$ .

Коэффициент  $\gamma$  в уравнении (12), характеризующий степень влияния диссипативных сил при изменении направления вариации аргумента, можно узнать, если иметь экспериментальные данные, хотя бы для одной гистерезисной кривой, полученной в аналогичных условиях (достаточно знать ширину гистерезиса в одной точке). Так, например, для аэродинамических гистерезисных кривых, полученных в натурных испытаниях для корабля “Союз” [10] при гиперзвуковых скоростях  $\gamma \sim 8$ , поэтому  $\sqrt{\frac{16}{\gamma^2 + 2}} \sim \frac{1}{2}$ .

Значение  $\gamma = 1$  может быть использовано для оценки “сверху” разности значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой.

К сожалению, выражение (12) не может быть использовано для оценки разности значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в окрестности “серединой” точки гистерезисной области, где  $m_{st}(\alpha) = m_{st.cp.}$ , поскольку там не выполняется соотношение  $|\Delta m(\alpha)/(m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.})| < 1$ .

Кроме того, выражение (12) неправильно описывает гистерезисную кривую в окрестности точек, в которых производные  $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha$  равны нулю. В этих точках правая часть выражения (12) равна нулю, при этом реальная величина  $\Delta m$  может быть ненулевой. Некорректность выражения (12) в точках, в которых  $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha = 0$ , объясняется тем, что в

них, как правило, не выполняется соотношение  $\left(\frac{\partial m_B(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial m_A(\alpha)}{\partial \alpha}\right) = 2 \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha}$ , так как в разложении полной производной функции  $m$  по  $\alpha$  становится необходимым учитывать вторые (а возможно и следующие) производные параметра  $\alpha$  по времени:  $\frac{dm}{d\alpha} = \frac{\partial m}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \dot{\alpha}} \frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial m}{\partial \ddot{\alpha}} \frac{\partial \ddot{\alpha}}{\partial \alpha} + \dots$ , то есть рассматривать зависимости  $m = m(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)$ , дополняя, при этом фазовое пространство переменными:  $\dot{\alpha}, \dots$ .

К адекватному описанию гистерезисной кривой практически во всей гистерезисной области можно прийти, если не ограничиваться рассмотрением плотности распределения по скоростям в одной точке  $\alpha$ , а исследовать ее в пространстве  $(\alpha, \dot{\phi})$ . Такой подход позволит создать замкнутую расчетно-теоретическую модель описания гистерезисных функций первого типа, исключив, при этом, из модели эмпирический коэффициент  $\gamma$ . Остановимся на этом подробнее.

Поделив обе части равенства (1) на величину  $m_{st}(\alpha)$  (при условии, что  $m_{st} \neq 0$ ), получим соотношение:

$$\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\phi} = 1, \tag{13}$$

где  $m(\alpha, \dot{\phi})/m_{st}(\alpha)$  - плотность распределения по скоростям  $\dot{\phi}$  в точке  $\alpha$ .

Для среднего стационарного значения  $\bar{m}_{st}$  стационарной функции  $m_{st}(\alpha)$ , определенной на интервале  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - крайняя левая и крайняя правая граничные точки заданной гистерезисной области (точки разворота), можно записать соотношение:

$$\bar{m}_{st} = \langle m_{st}(\alpha) \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_{st}(\alpha) d\alpha.$$

Подставив в него функцию  $m_{st}(\alpha)$  из соотношения (1), получим выражение:

$$\bar{m}_{st} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} m(\alpha, \dot{\phi}) d\dot{\phi} d\alpha$$

или

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = 1.$$

Из полученного выражения видно, что  $m(\alpha, \dot{\phi})/\bar{m}_{st}$  - плотность распределения в пространстве  $(\alpha, \dot{\phi})$ , поэтому для гистерезисной области можно определить энтропию  $S$  в виде соотношения:

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Параметр  $S$ , в данном случае, не является термодинамической энтропией, так как в приведенном для него выражении не используется плотность вероятности реализации значений *кинетической энергии молекул* какого-либо вещества. В тоже время, он получен с помощью соотношения, которое можно назвать общим для определения энтропии:

$$S = - \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \psi(q, p) \ln \psi(q, p) \frac{dq dp}{\Delta q \Delta p}.$$

В нем используется плотность вероятности реализации  $\psi = m/\bar{m}_{st}$  величин  $q = \alpha$  и  $p = \dot{\phi}$ , и в этом смысле, величина  $S$  может считаться обобщенной энтропией рассматриваемой динамической системы - гистерезисной области.



Полученное выражение преобразуется к виду

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{\bar{m}_{st}} \left( \ln \left( \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) + \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Вводя обозначение:  $\delta m(\alpha, \dot{\phi}) = m(\alpha, \dot{\phi}) - m_{st}(\alpha)$ , можно записать

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Учитывая уравнение (13) во втором интегральном выражении правой части соотношения для энтропии, его можно преобразовать к виду:

$$S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right) d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Если отказаться от рассмотрения точек, в окрестности которых функция  $m_{st}(\alpha)$  стремится к нулю и считать, что  $\delta m(\alpha, \dot{\phi})/m_{st}(\alpha) < 1$ , то, раскладывая выражение под знаком логарифма в первом интегральном выражении правой части в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (включая вторую степень величины  $\delta m(\alpha, \dot{\phi})/m_{st}(\alpha)$ ), получим соотношение:

$$S \approx - \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} d\dot{\phi} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (14)$$

Поскольку, в настоящей работе рассматриваются гистерезисные кривые, полученные в результате описания процессов гармонических колебаний тела, то, воспользовавшись соотношением (6), запишем:

$$\dot{\phi}_{\min} = \alpha_{\min} / (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) = -1/2 \quad \text{и} \quad \dot{\phi}_{\max} = \alpha_{\max} / (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) = 1/2.$$

Учитывая это, а также симметричное расположение ветвей гистерезисной кривой относительно стационарного значения в каждой точке  $\alpha$ , можно заметить, что второе интегральное выражение в правой части соотношения (14) в случае гармонических колебаний тела принимает нулевое значение.

В первом интегральном выражении правой части соотношения (14) можно выделить

интеграл  $\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\dot{\phi}$ , который представляет собой дисперсию распределения величины

$m(\alpha, \dot{\phi})/m_{st}(\alpha)$  по скоростям  $\dot{\phi}$  относительно стационарного значения в каждой точке  $\alpha$ . Дисперсия распределения величины является квадратом наиболее вероятного среднеквадратичного отклонения от его среднего значения. Гистерезисная кривая представляет собой реализацию вполне определенных значений  $m(\alpha, \dot{\phi})$  в каждой точке  $\alpha$ . Именно эти значения и нужно считать наиболее вероятными значениями реализации. Поэтому, можно

записать соотношение:  $\int_{\dot{\phi}_{\min}(\alpha)}^{\dot{\phi}_{\max}(\alpha)} \left( \frac{\delta m(\alpha, \dot{\phi})}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 d\dot{\phi} = \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{2m_{st}(\alpha)} \right)^2$ , где  $\Delta m(\alpha)$  - разность значений величин

$m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой.

В результате выражение (14) примет вид:

$$S \approx - \frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (15)$$

Можно заметить, что правая часть выражения (15), характеризующего значение энтропии гистерезисной области, состоит из двух частей.

Выражение  $S_0 = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \ln \left( \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$  характеризует энтропию, производимую

при изменении стационарного значения  $m_{st}(\alpha)$  функции  $m(\alpha, \phi)$ .

Выражение

$$\delta S = S - S_0 \approx - \frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (16)$$

описывает производство энтропии, полученное непосредственно за счет совершения гармонических колебаний в результате нестационарного характера изменения скорости на всем интервале изменения  $\alpha : \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ .

Задача описания гармонических колебаний тела решается в неподвижной системе координат, связанной с его ЦМ. Ограничимся малым промежутком времени рассмотрения системы так, чтобы можно было пренебречь изменением высоты. В постановке квазизамкнутой системы аналогично уравнениям термодинамики можно записать соотношение для производства энтропии в окрестности точки  $\alpha$  :

$$\tilde{T} \delta S(\alpha) = \delta A(\alpha), \quad (17)$$

где  $\delta S(\alpha)$  - производство энтропии в точке  $\alpha$ , обусловленное колебанием тела,  $\delta A(\alpha)$  - работа, произведенная в результате колебания тела в точке  $\alpha$ . Величина  $\tilde{T}$  с размерностью энергии, в данном случае, не является температурой системы. Она определяет значение энергии, от которого ведется отсчет энергетических уровней.

Работа, совершаемая при гармонических колебаниях тела в точке  $\alpha$ , определяется кинетической энергией. Поэтому, учитывая уравнение (6), можно записать:

$$A(\alpha) = 2 \frac{1}{2} I \alpha^2(\alpha) = \frac{4I\pi^2}{T^2} (\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1). \quad (18)$$

Множитель двойка здесь введен для того, чтобы учесть разность значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой (а не между одной из ветвей и стационарным значением функции).

Значение  $\delta S(\alpha)$  можно найти из выражения (16) если провести интегрирование от ближайшей точки разворота  $\alpha_j, j = 1, 2$ , до рассматриваемой точки  $\alpha$  :

$$\delta S(\alpha) = \frac{(-1)^j}{8} \int_{\alpha_j}^{\alpha} \frac{m_{st}(\alpha)}{\bar{m}_{st}} \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{m_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (19)$$

Уравнения (17)-(19), (12), а также выражение:  $\tilde{T} = \delta A(\alpha, T_1) / \delta S(\alpha, T_1)$ , с известным для бездиссипационного (при  $\gamma = 1$ ) периода колебаний  $T_1$  отношением производства работы к производству энергии, представляют собой систему уравнений для определения зависимости  $\Delta m(\alpha)$  в случае произвольного задания функции  $m_{st}(\alpha)$ . В общем случае решение такой системы может быть найдено численными методами.

В случае рассмотрения достаточно монотонных стационарных функций  $m_{st}(\alpha)$ , для которых верно соотношение:  $\bar{m}_{st} := \langle m_{st}(\alpha) \rangle \approx m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_{cp}} := m_{st.cp.}$ , где  $\alpha_{cp} = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$  - “серединая” точка гистерезисной области, можно аналитически определить зависимость  $\Delta m(\alpha)$ . В линейном приближении можно записать:

$m_{st}(\alpha) \approx m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j} - 2(-1)^j \frac{\alpha - \alpha_j}{\alpha_2 - \alpha_1} (m_{st.sp.} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j})$ ,  $j = 1, 2$ ,  $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j} = const$ . Здесь значение  $\alpha_j = \alpha_1$  или  $\alpha_j = \alpha_2$  также выбирается из условия максимальной близости к рассматриваемой точке  $\alpha$ . Сместим начало отсчета для функции  $m(\alpha)$ :  $\widehat{m}(\alpha) = m(\alpha) - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}$ .

Тогда,

$$\widehat{m}_{st}(\alpha) = m_{st}(\alpha) - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \widehat{m}_{st.sp.}(\alpha) = m_{st.sp.}(\alpha) - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_j}, \quad \Delta\widehat{m}(\alpha) = \Delta m(\alpha).$$

Вариацию энтропии в новой системе отсчета, запишем в виде:

$$\delta\widehat{S} \approx \frac{(-1)^j}{8} \int_{\alpha_j}^{\alpha} \frac{\widehat{m}_{st}(\alpha)}{\widehat{m}_{st.sp.}} \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{\widehat{m}_{st}(\alpha)} \right)^2 \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (\text{см. (19)}). \quad \text{Подставив в это выражение зависимость}$$

$$\widehat{m}_{st}(\alpha) \approx -2(-1)^j \frac{\alpha - \alpha_j}{\alpha_2 - \alpha_1} \widehat{m}_{st.sp.}, \quad \text{получим}$$

$$\delta\widehat{S}(\alpha) \approx -\frac{1}{16\widehat{m}_{st.sp.}^2} \int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(\alpha))^2 \frac{d\alpha}{\alpha - \alpha_j}.$$

Учитывая, что  $\int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(\alpha))^2 \frac{d\alpha}{\alpha - \alpha_j}$  есть среднее значение величины  $(\Delta m(\alpha))^2$  на интервале между точками  $\alpha_j$  и  $\alpha$ , а также то, что в точке  $\alpha_j$  верно соотношение:

$$(\Delta m(\alpha))^2|_{\alpha=\alpha_j} = 0, \quad \text{в линейном приближении можно записать: } \int_{\alpha_j}^{\alpha} (\Delta m(\alpha))^2 \frac{d\alpha}{\alpha - \alpha_j} \approx \frac{1}{2} (\Delta m(\alpha))^2.$$

И, следовательно,

$$\delta\widehat{S}(\alpha) \approx -\frac{(\Delta m(\alpha))^2}{32\widehat{m}_{st.sp.}^2}. \quad (20)$$

Если зафиксировать точку  $\alpha$ :  $\alpha = \alpha_*$  ( $\alpha_1 < \alpha_* < \alpha_2$ ), и подставить выражения (18), (20) в (17) при фиксированном значении периода колебания тела  $T$ :  $T = T_\gamma$ , то можно найти величину начального уровня энергии  $\widetilde{T}$ , от которого будет вестись отсчет других энергетических уровней при смещенном начале отсчета функции  $m(\alpha)$ :

$$\widetilde{T} = -128 \frac{I\pi^2}{T_\gamma^2} (\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha_1) \left( \frac{\widehat{m}_{st.sp.}^2}{(\Delta m_\gamma(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*})^2} \right),$$

где  $\Delta m_\gamma(\alpha) = \Delta m(\alpha; T)|_{T=T_\gamma}$  - разность значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции  $m$  в точке  $\alpha$ , когда период гармонического колебания тела  $T$  принимает значение, равное  $T_\gamma$ .

Подставляя полученное соотношение для  $\widetilde{T}$ , а так же выражения (18), (20) в уравнение (17), получим соотношение для определения разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции  $m$  в любой точке  $\alpha$ :  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , при произвольном значении периода гармонического колебания тела  $T$ :

$$\Delta m(\alpha; T) = \frac{T_\gamma}{T} \Delta m_\gamma(\alpha)|_{\alpha=\alpha_*} \sqrt{\frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha)}}. \quad (21)$$

В полученное уравнение не входят функции со смещенным началом отсчета  $\bar{m}(\alpha)$ , поэтому дальнейшее использование этого уравнения не зависит от выбора начала отсчета функций.

Выражением (21) можно воспользоваться, если имеются экспериментальные или расчетные сведения о разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции  $m$  в любой точке  $\alpha = \alpha_*$ , при любом известном значении периода гармонического колебания тела  $T_\gamma$ .

Однако можно обойтись и без использования экспериментальных или расчетных сведений о разности значений на верхней и нижней ветвях гистерезисной функции  $m$ , если принять во внимание соотношение (12).

Коэффициент  $\gamma$  в уравнении (12) характеризует степень влияния диссипативных сил. Так при  $\gamma = 1$  процесс демпфирования идет без затухания колебаний (влияние диссипативных сил – незначительно), при этом разность значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой – максимальна:

$$\Delta m_1(\alpha) = \Delta m(\alpha)_{\gamma=1} \approx \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( m_{st}(\alpha) - m_{st.cp.} \right) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha}} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha} \right|}. \quad (22)$$

Совместное использование выражений (21) и (22) позволит определить значение  $\Delta m_\gamma(\alpha)_{\gamma=1} = \Delta m_1(\alpha)_{\alpha=\alpha_*}$  для периода колебания тела  $T_\gamma|_{\gamma=1} = T_1$ , соответствующего бездиссипативному характеру колебаний:

$$\Delta m_1(\alpha)_{\alpha=\alpha_*} = \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.cp.} \right) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_*}} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha_*)(\alpha_* - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \right|}. \quad (23)$$

Здесь  $m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_*}$  и  $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_*}$  стационарные значения функции  $m_{st}(\alpha)$  и ее производной в фиксированной точке  $\alpha = \alpha_*$ , в которой  $m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_*} \neq 0$   $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_*} \neq 0$ .

Очевидно, что для улучшения точности расчетов, следует избегать выбора точки  $\alpha_*$  в окрестности экстремумов функции  $m_{st}(\alpha)$  и в областях, где  $m_{st}(\alpha) \rightarrow m_{st.cp.}$ .

Подставив выражение (23) в (21), получим соотношение для определения разности значений величин  $m$  на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке  $\alpha$  для тела, совершающего гармонические колебания с произвольным периодом  $T$ :

$$\Delta m(\alpha, T) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{T_1}{T} \sqrt{\left( m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_*} - m_{st.cp.} \right) \frac{\partial m_{st}(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_*}} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \right|}. \quad (24)$$

Величина периода колебания тела  $T_1$ , соответствующего бездиссипативному характеру колебаний, имеет собственные значения для каждого конкретного тела. Она может быть получена численными методами, если известно распределение массы этого тела относительно его центра масс (задача о колебании маятника сложной формы под действием силы тяжести).

Величины  $m_{st}(\alpha)_{\alpha=\alpha_*}$  и  $\partial m_{st}(\alpha)/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_*}$  также могут быть получены численными методами при проведении стационарных аэродинамических расчетов, которые гораздо точнее и требуют меньших затрат времени их нестационарных аналогов.

Таким образом, задача определения разности значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой первого типа становится замкнутой только в рамках расчетно-теоретической модели.

В семидесятых годах прошлого века предприятием НПО “Энергия” были проведены летные динамические испытания СА “Союз”. В ходе этих испытаний СА с помощью двигателей подвергался принудительной раскачке в плоскости тангажа в течение  $\sim 10$  секунд, после чего совершал свободные колебания относительно центра масс, длительностью  $\sim 30$  секунд, а затем стабилизированный полет с работающими струйными органами. Плоскость угла атаки СА была перпендикулярна горизонтальной плоскости Земли. Полет на всем участке спуска происходил в режиме максимального аэродинамического качества (угол крена  $0^\circ$ ). Первый цикл возмущенного движения начинался на высоте  $H \approx 85$  км [10].

Сравнение теоретических гистерезисных кривых, полученных с помощью соотношения (24) и экспериментальных кривых, полученных в летном эксперименте с принудительной раскачкой аппарата по углу атаки на гиперзвуковых скоростях полета, приведены на рисунках 3-5.

Ввиду отсутствия данных, позволяющих численно рассчитать величину  $T_1$ , отношение  $T_1/T$ , входящее в уравнении (24), получено из этого уравнения с использованием экспериментального значения  $\Delta C_x$  функции  $C_x(\alpha)$  в одной точке  $\alpha$  и оценивается, как  $T_1/T \approx 0,2$ .

Видно хорошее соответствие экспериментальных и расчетно-теоретических гистерезисных кривых  $C_x(\alpha)$  и  $C_y(\alpha)$  при достаточно монотонных стационарных функциях  $C_{x_{st}}(\alpha)$  и  $C_{y_{st}}(\alpha)$ . Для функции  $m_z(\alpha)$  такое соответствие ухудшается из-за недостаточной монотонности стационарной функции  $m_{z_{st}}(\alpha)$ , однако его также можно считать вполне удовлетворительным.

Таким образом, полученная в настоящей работе математическая модель для определения разности значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой первого типа, является замкнутой в рамках только расчетно-теоретической модели. Она может быть использована для решения рассматриваемой задачи без привлечения эмпирических параметров, что существенно повышает ее эффективность.

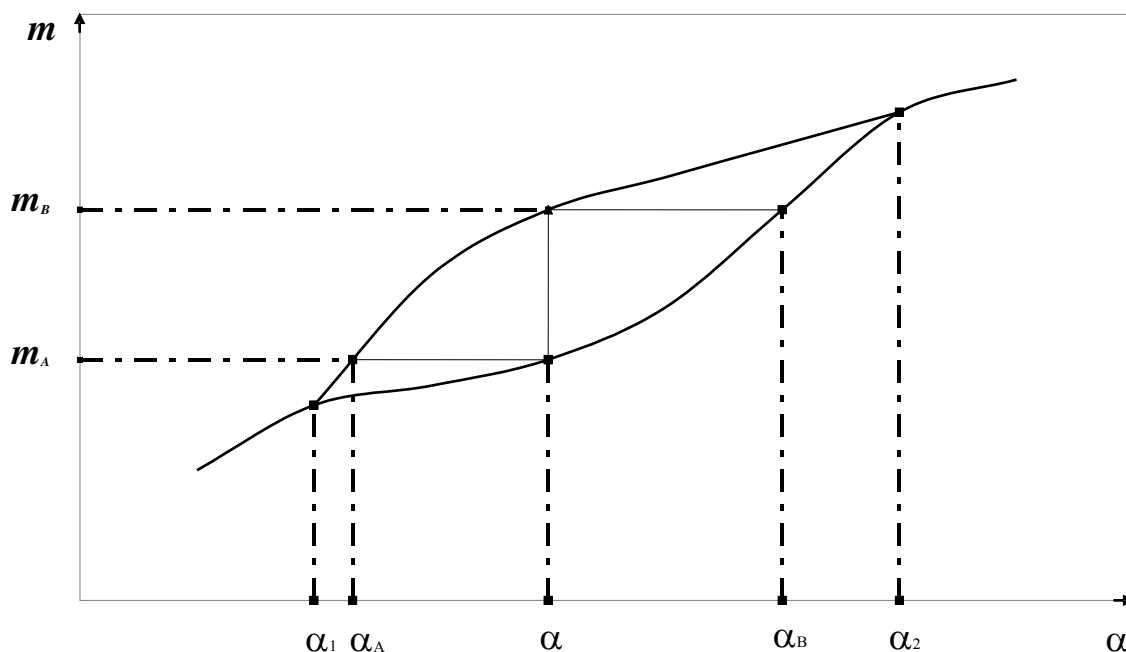


Рис. 1

Схематичное изображение гистерезисной кривой первого типа.

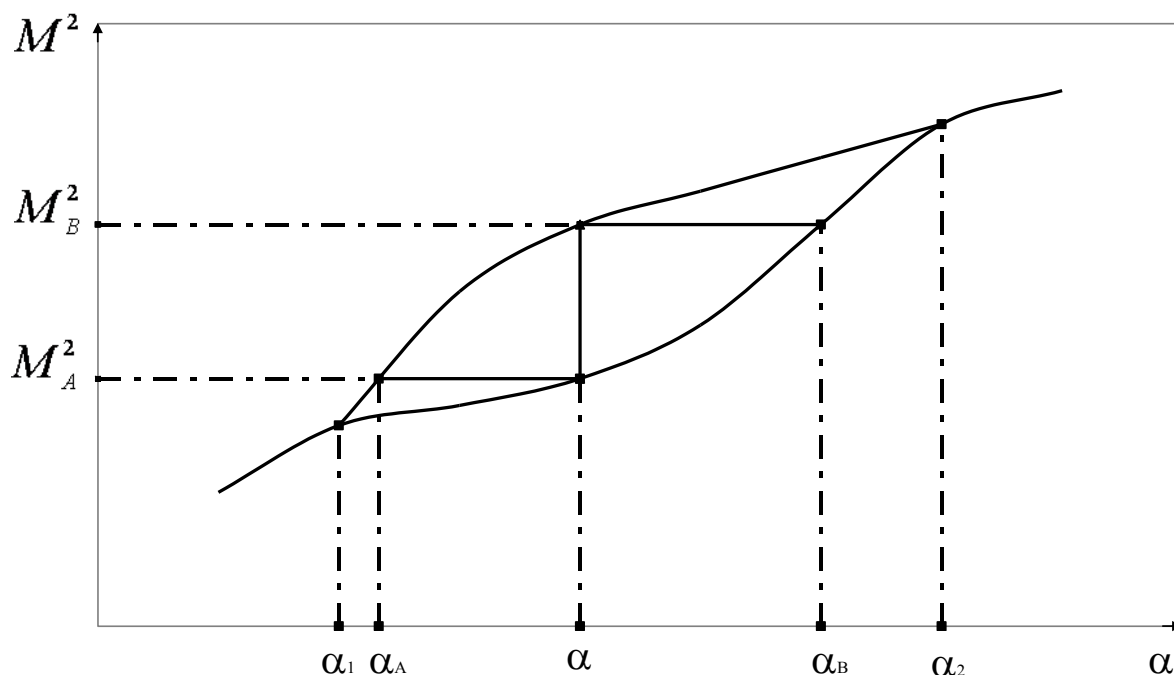


Рис.2

Зависимость плотности распределения  $M^2$  функции  $m$  по скоростям  $\dot{\phi}$  от координаты  $\alpha$ .

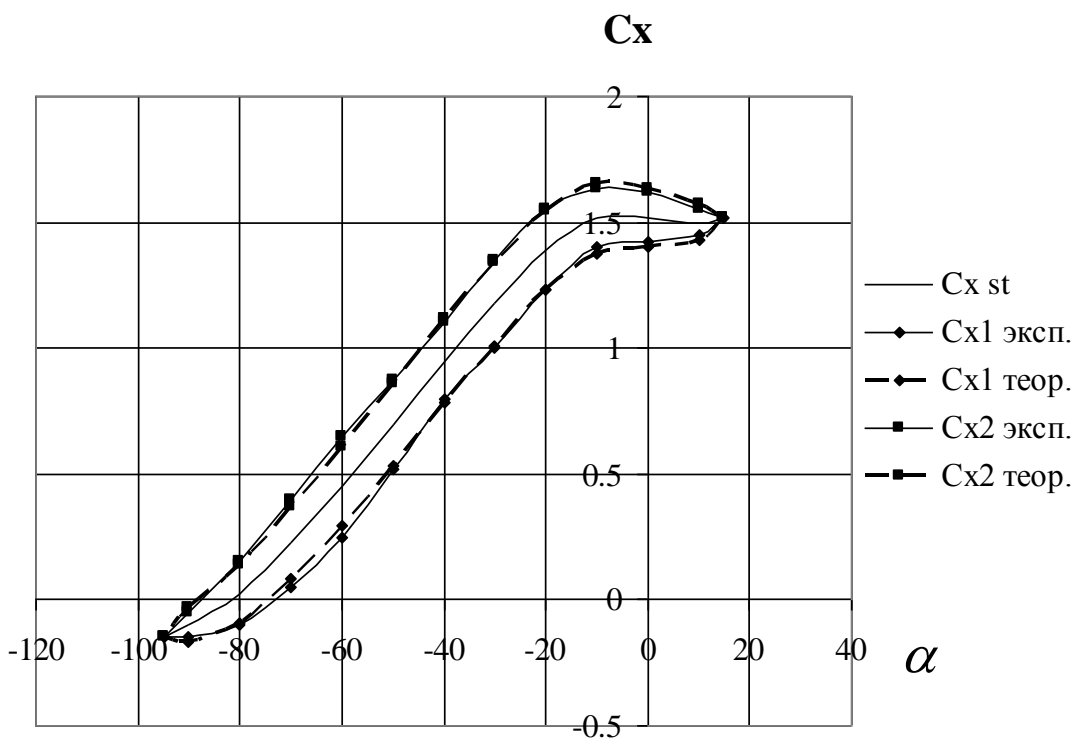


Рис.3

Сравнение экспериментальной (сплошная линия) и расчетно-теоретической (штриховая линия) гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента продольной силы.

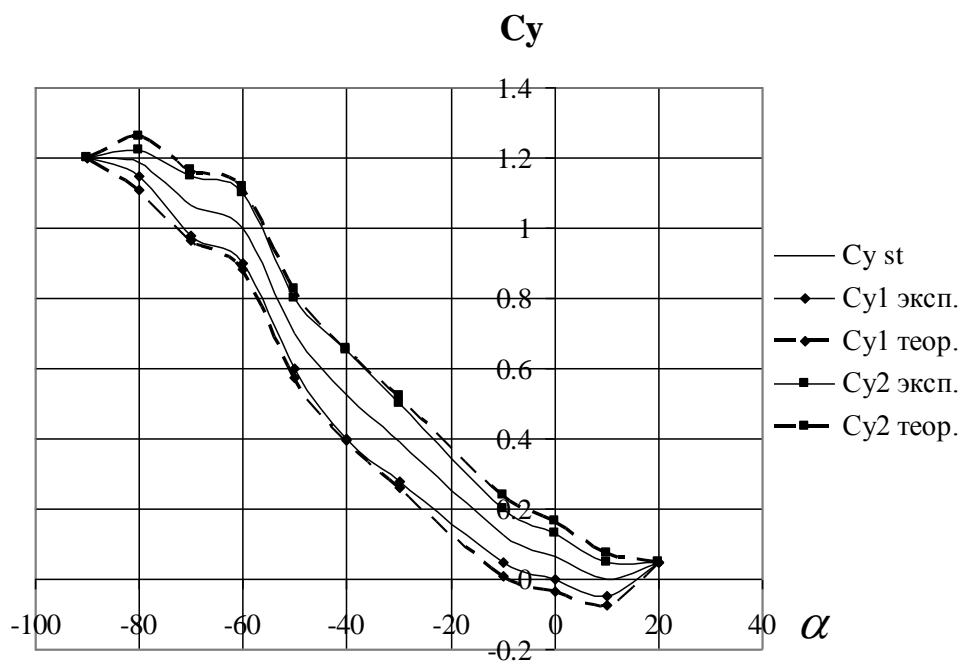


Рис.4

Сравнение экспериментальной (сплошная линия) и расчетно-теоретической (штриховая линия) гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента подъемной силы.

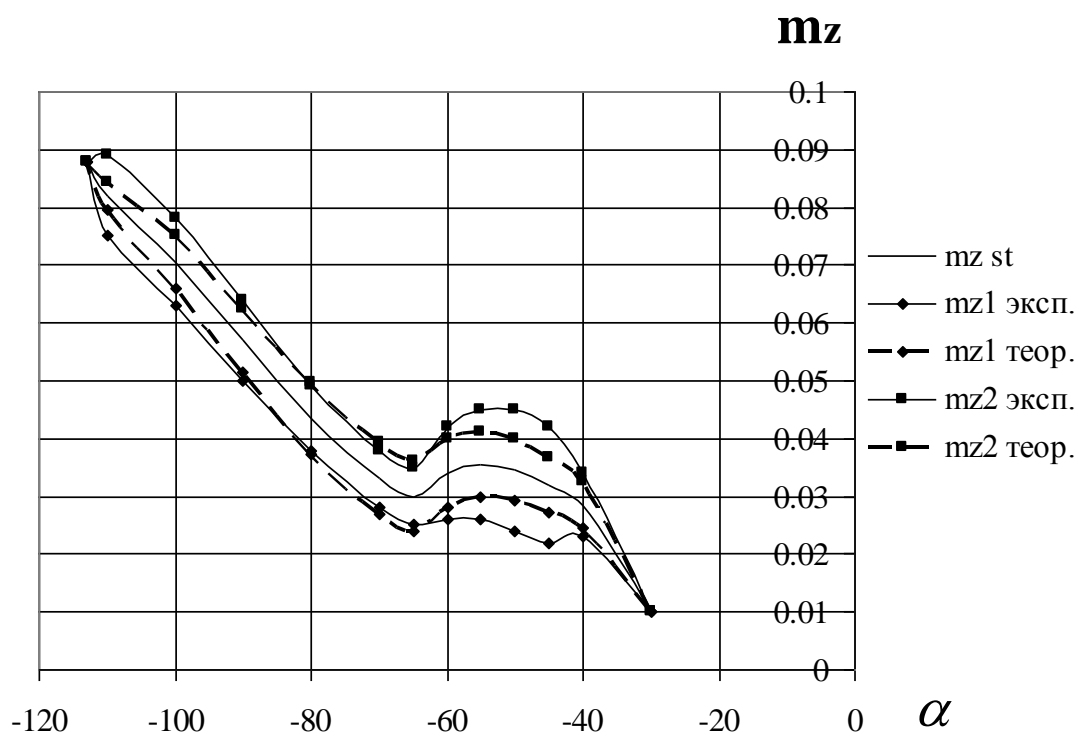


Рис.5

Сравнение экспериментальной (сплошная линия) и расчетно-теоретической (штриховая линия) гистерезисных кривых для коэффициента  $m_z$ .

## 1.2 Гистерезисные функции второго типа

Перейдем к рассмотрению гистерезисных явлений, относящихся ко второму типу. В соответствии с классификацией, приведенной в предыдущем разделе статьи (см. также [11]), ко второму типу гистерезисных явлений относятся те явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от модуля скорости изменения аргумента. Зависимости исследуемых параметров от варьируемого аргумента в этих случаях имеют на плоскости вид гистерезисных функций с разрывами первого рода. Точки разрыва при изменении направления варьируемого аргумента, как правило, не совпадают. Иногда может наблюдаться некоторая корреляция и с изменением скорости варьируемого аргумента, но она носит скорее вероятностный, нежели детерминированный характер.

Гистерезисные явления второго типа обусловлены возможностью существования различных режимов процесса, то есть возможностью существования нескольких решений в диапазоне параметров варьируемого аргумента. Математическим аппаратом для описания гистерезисных явлений второго типа может служить, разработанный ранее (см., например, [12]), метод описания функций в областях их скачкообразных изменений параметров в приближении функций с разрывом первого рода. Однако этот метод имеет ограничения, связанный с выбором исследуемых функций: интегралы по варьируемому параметру, взятые от таких функций, должны описывать какую-либо сохраняющуюся величину, например поток энергии или расход жидкости.

В данной работе предлагается подход к описанию гистерезисных функций второго типа, лишенный таких ограничений относительно исследуемых функций и их аргументов. Он позволяет найти соотношение, для определения энергии перехода между двумя стационарными состояниями системы, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

Так же как и модель, построенная для описания гистерезисных функций первого типа, данная модель может быть замкнутой только в рамках расчетно-теоретического подхода, то есть может применяться без использования эмпирических параметров. Остановимся на этом подробнее.

Предположим, мы исследуем зависимость параметра  $m$  от варьируемого аргумента  $\alpha$ . Если априори известно о возможности существования двух (или более) стационарных состояний рассматриваемой системы в некотором диапазоне изменения аргумента, то, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае, может существовать неопределенность в зависимости, исследуемой функции  $m$  только от одного аргумента, что, в свою очередь, может явиться причиной гистерезисного вида функции на плоскости  $(m; \alpha)$ .

Для гистерезисов, относящихся к первому типу, также существовала неопределенность при описании функции  $m$  на плоскости  $(m; \alpha)$ . Однако, ее существенным отличием от рассматриваемого случая было то, что введение в рассмотрение дополнительной переменной – скорости  $\dot{\alpha}$  - и переходе к описанию функции  $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$  в пространстве  $(m; \alpha, \dot{\alpha})$  позволяло полностью снять эту неопределенность.

Как было уже сказано выше, тестом на определение типа гистерезисной кривой можно считать именно “чувствительность” функции к скорости  $\dot{\alpha}$  изменения аргумента  $\alpha$ . Для гистерезисов второго типа ее либо не наблюдается вовсе, либо она не имеет детерминированного характера.

Поскольку в рассматриваемом случае речь идет о реализации различных возможных стационарных состояний системы в некотором диапазоне изменения аргумента, то можно предположить, что переход к расширенному физическому пространству не снимет неопре-



деленности описания процесса. Тем не менее, процедура расширения фазового пространства будет применена в этом случае. Переход от плоскости  $(m; \alpha)$  к фазовому пространству с дополнительной размерностью позволит “расщепить” в этом пространстве ветви гистерезисной кривой второго типа.

Предположим, что существует только два стационарных состояния системы в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента. Расширение фазового пространства произведем за счет введения дополнительной переменной  $\eta$ :  $(m; \alpha) \rightarrow (m; \alpha, \eta)$ ,  $m(\alpha) \rightarrow m(\alpha, \eta)$ . Будем считать, что переменная  $\eta$  равна нулю при нахождении системы в состоянии, описываемой одной ветвью функции, и равна единице, при нахождении системы в состоянии, описываемой другой ветвью функции.

Для определенности обозначим:  $m(\alpha, \eta)|_{\eta=1} = m_1(\alpha)$ ,  $m(\alpha, \eta)|_{\eta=0} = m_2(\alpha)$ ,  $\alpha_1$  - точка, в которой становится возможен переход с ветви  $m_1(\alpha)$  на ветвь  $m_2(\alpha)$ ,  $\alpha_2$  - точка, в которой становится возможен переход с ветви  $m_2(\alpha)$  на ветвь  $m_1(\alpha)$  (см. рис.6). До точки  $\alpha_1$  ( $\alpha \leq \alpha_1$ ) и за точкой  $\alpha_2$  ( $\alpha \geq \alpha_2$ ) функция  $m$  принимает однозначные значения в каждой точке  $\alpha$ :  $m_1(\alpha)$  и  $m_2(\alpha)$ , соответственно. При вероятностном переходе из одного состояния системы в другое (с одной ветви функции на другую) переменная  $\eta$  изменяется в диапазоне:  $0 \leq \eta \leq 1$ . При этом  $\alpha$  изменяется в диапазоне  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ . Переходная область  $(\alpha_1; \alpha_2) \times (0; 1)$  - является областью неопределенности нахождения на ветвях гистерезисной кривой.

Зная значение функции  $m_1(\alpha)$  и ее производной  $m_1(\alpha)/\partial\alpha$  в точке  $\alpha_1$ , ветвь  $m_1(\alpha)$  можно линейно экстраполировать на диапазон  $\alpha > \alpha_1$ :

$$m_1(\alpha) = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha - \alpha_1), \text{ где } \alpha > \alpha_1.$$

Зная значение функции  $m_2(\alpha)$  и ее производной  $m_2(\alpha)/\partial\alpha$  в точке  $\alpha_2$ , ветвь  $m_2(\alpha)$  можно линейно интерполировать в диапазоне  $\alpha < \alpha_2$ :

$$m_2(\alpha) = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} + \frac{\partial m_2(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} (\alpha - \alpha_2), \text{ где } \alpha < \alpha_2.$$

В дальнейшем для краткости соответствующие константы будем обозначать в виде:

$$m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1, \quad m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2, \quad \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = m_1', \quad \frac{\partial m_2(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m_2'.$$

В области  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , где  $m(\alpha)$  является еще и функцией переменной  $\eta$ :  $m = m(\alpha, \eta)$ , будем считать, что среднее по  $\eta$  значение

$$m_{12}(\alpha) := \langle m(\alpha, \eta) \rangle = \int_0^1 m(\alpha, \eta) d\eta, \tag{25}$$

в каждой точке  $\alpha$  равно среднеарифметическому между экстраполированным значением функции  $m_1(\alpha)$  и интерполированным значением функции  $m_2(\alpha)$  в рассматриваемой точке:

$$m_{12}(\alpha) = \frac{1}{2}(m_1(\alpha) + m_2(\alpha)) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(m_1' \alpha_1 + m_2' \alpha_2) + \frac{1}{2}(m_1' + m_2') \alpha, \text{ где } \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \tag{26}$$

Функция  $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$  - плотность вероятности реализации величины  $\eta$  в точке  $\alpha$ :

$$\int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta = 1.$$

Кроме того, функцию  $m_{12}(\alpha)$  можно усреднить по  $\alpha$  :

$$\bar{m} := \langle m_{12}(\alpha) \rangle = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_{12}(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (27)$$

Используя выражение (26), получим

$$\bar{m} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - \frac{1}{2}(m_1' \alpha_1 + m_2' \alpha_2) + \frac{1}{4}(m_1' + m_2')(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (28)$$

Подставив в уравнение (27) соотношение для  $m_{12}(\alpha)$  в виде (1) и поделив левую и правую части полученного выражения на константу  $\bar{m}$ , запишем соотношение для области  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  :

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} = 1. \quad (29)$$

Из выражения (29) видно, что функция  $m(\alpha, \eta)/\bar{m}$  - плотность вероятности в пространстве  $(\alpha; \eta)$ , поэтому для гистерезисной области можно определить произведенную энтропию  $\Delta S$  в виде соотношения:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Так же, как и в разделе 1.1, параметр  $S$  не является термодинамической энтропией. Его можно охарактеризовать, как обобщенную энтропию динамической системы - гистерезисной области.

Полученное выражение преобразуется к виду:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{\bar{m}} \left( \ln \left( \frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) + \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Вводя обозначение:  $\delta m(\alpha, \eta) = m(\alpha, \eta) - m_{12}(\alpha)$ , можно записать

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \int_0^1 \frac{m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Учитывая уравнение (25), во втором интегральном выражении правой части соотношения для энтропии, его можно преобразовать к виду:

$$\Delta S = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^1 \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( 1 + \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right) d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Если отказаться от рассмотрения точек, в окрестности которых функция  $m_{12}(\alpha)$  стремится к нулю и считать, что  $\delta m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha) < 1$ , то, раскладывая выражение под знаком логарифма в первом интегральном выражении правой части в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми двумя членами разложения (включая вторую степень величины  $\delta m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$ ), получим соотношение:

$$\Delta S \approx - \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \int_0^1 \left( \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \int_0^1 \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (30)$$

Будем считать, что функция  $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$  в переходной области  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  является симметричной относительно среднего значения. Тогда  $\int_0^1 \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} d\eta = 0$ , и второе интегральное выражение в правой части уравнения (30) принимает нулевое значение.

В первом интегральном выражении правой части соотношения (30) можно выделить интеграл  $\int_0^1 \left( \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta$ , который представляет собой дисперсию распределения величины  $m(\alpha, \eta)/m_{12}(\alpha)$  по параметру  $\eta$  относительно значения  $m_{12}(\alpha)$  в каждой точке  $\alpha$ . Реализованные значения функции на ветвях гистерезисной кривой можно считать ее наиболее вероятными значениями. Поэтому, для дисперсии распределения величины, являющейся квадратом наиболее вероятного среднеквадратичного отклонения от среднего значения, можно записать соотношение:  $\int_0^1 \left( \frac{\delta m(\alpha, \eta)}{m_{12}(\alpha)} \right)^2 d\eta = \left( \frac{\Delta m(\alpha)}{2m_{12}(\alpha)} \right)^2$ , где  $\Delta m(\alpha)$  - разность значений величин  $m$  на двух ветвях гистерезисной кривой в точке  $\alpha$ :

$$\Delta m(\alpha) = m_2(\alpha) - m_1(\alpha) = m_2 - m_1 - (m_2' \alpha_2 - m_1' \alpha_1) + (m_2' - m_1') \alpha. \quad (31)$$

В результате выражение (30) примет вид:

$$\Delta S \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\Delta m(\alpha))^2}{m_{12}(\alpha) \bar{m}} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (32)$$

Можно заметить, что правая часть выражения (32), характеризующего значение энтропии гистерезисной области, состоит из двух частей.

Выражение  $S_{st} = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \ln \left( \frac{m_{12}(\alpha)}{\bar{m}} \right) \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$  характеризует энтропию, произведенную в результате квазистационарного (без учета влияния скорости) изменения среднего значения  $m_{12}(\alpha)$  функции  $m(\alpha, \eta)$  на участке  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ . Как будет показано ниже, значение  $S_{st}$  становится нулевым, в случае, когда переход из одного стационарного состояния в другое происходит скачкообразно:  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ .

Выражение  $S_{jump} = S - S_{st} \approx -\frac{1}{8} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\Delta m(\alpha))^2}{m_{12}(\alpha) \bar{m}} \frac{d\alpha}{\alpha_2 - \alpha_1}$  описывает энтропию, произведенную непосредственно за счет смены стационарных состояний в интервале  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ .

Используя выражения (26), (28) и (31) можно найти значения  $S_{st}$  и  $S_{jump}$ :

$$S_{st} = -\frac{B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}{2D(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[ \left( \frac{B+D\alpha_2}{B+D \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}} \right)^2 \ln \left( \frac{B+D\alpha_2}{B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \right) - \left( \frac{B+D\alpha_1}{B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \right)^2 \ln \left( \frac{B+D\alpha_1}{B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} \right) - \frac{(B+D\alpha_2)^2 - (B+D\alpha_1)^2}{2 \left( B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)^2} \right] \quad (33)$$

$$S_{jump} = -\frac{1}{2D \left( B+D \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) (\alpha_2 - \alpha_1)} \left[ \left( A - \frac{BC}{D} \right)^2 \ln \left| \frac{B+D\alpha_2}{B+D\alpha_1} \right| + C^2 \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2} + C \left( 2A - \frac{BC}{D} \right) (\alpha_2 - \alpha_1) \right]. \quad (34)$$

Здесь, константы  $A, B, C, D$  зависят только от значений функций  $m_1(\alpha)$ ,  $m_2(\alpha)$  и их производных в точках  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответственно:

$$A = m_2 - m_1 - (m_2' \alpha_2 - m_1' \alpha_1), \quad B = m_1 + m_2 - (m_1' \alpha_1 + m_2' \alpha_2), \quad C = m_2' - m_1', \quad D = m_1' + m_2',$$

$$m_1 = m_1(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_1}, \quad m_2 = m_2(\alpha) \Big|_{\alpha=\alpha_2}, \quad m_1' = \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1}, \quad m_2' = \frac{\partial m_2(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2}.$$

Часто, переход из одного стационарного состояния системы в другое происходит скачкообразно в очень узком диапазоне изменения аргумента  $\delta\alpha$ . В этом случае при изменении аргумента  $\alpha$  в интервале  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 - \delta\alpha$ , где  $\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$ , не происходит смены состояния рассматриваемой системы – система описывается ветвью гистерезисной функции  $m_1(\alpha)$ , а в интервале  $\alpha_2 - \delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_2$  происходит “перескок” с ветви  $m_1(\alpha)$  на ветвь гистерезисной функции  $m_2(\alpha)$ . При этом, в диапазоне:  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 - \delta\alpha$ , приращение энтропии определяется только величиной  $\tilde{S}_{st} \approx S_{st}$  (выражение (33)). В диапазоне:  $\alpha_2 - \delta\alpha \leq \alpha \leq \alpha_2$ ,  $\tilde{S}_{st} = S_{st}|_{\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1} \approx 0$ , а величина  $\tilde{S}_{jump}$ :

$$\tilde{S}_{jump} = S_{jump}|_{\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1} \approx -\frac{1}{2\tilde{D}(\tilde{B} + \tilde{D}\alpha_2)} \left[ \left( \tilde{A} - \frac{\tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{D}} \right)^2 \frac{\tilde{D}}{\tilde{B} + \tilde{D}\alpha_2} + \tilde{C}^2\alpha_2 + \tilde{C} \left( 2\tilde{A} - \frac{\tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{D}} \right) \right],$$

где

$$\tilde{A} = \tilde{m}_2 - \tilde{m}_1 - \left( \tilde{m}'_2\alpha_2 - \tilde{m}'_1(\alpha_2 - \delta\alpha) \right), \quad \tilde{B} = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 - \left( \tilde{m}'_1(\alpha_2 - \delta\alpha) + \tilde{m}'_2\alpha_2 \right),$$

$$\tilde{C} = \tilde{m}'_2 - \tilde{m}'_1, \quad \tilde{D} = \tilde{m}'_1 + \tilde{m}'_2;$$

$$\tilde{m}_1 = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2-\delta\alpha} = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} (\alpha_2 - \delta\alpha - \alpha_1) \approx m_1 + m'_1(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$\tilde{m}_2 = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2, \quad \tilde{m}'_1 = \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2-\delta\alpha} = \frac{\partial m_1(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = m'_1, \quad \tilde{m}'_2 = \frac{\partial m_2(\alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = m'_2.$$

То есть в приближении линейной экстраполяции и интерполяции ветвей гистерезисной функции  $m_1(\alpha)$  и  $m_2(\alpha)$  в переходной области:  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , в случае, когда  $\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$ , можно записать:

$$\tilde{A} \approx m_2 - m_1 - \left( m'_2\alpha_2 - m'_1\alpha_1 \right) = A, \quad \tilde{B} \approx m_1 + m_2 - \left( m'_1\alpha_1 + m'_2\alpha_2 \right) = B, \quad \tilde{C} = C, \quad \tilde{D} = D.$$

Таким образом, в случае, когда процесс перехода из одного квазистационарного состояния системы в другое происходит скачкообразно в окрестности точки  $\alpha_2$  ( $\delta\alpha/\alpha_2 \ll 1$ ), полное производство энтропии  $\delta\tilde{S}$  в переходной области:  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , определяется выражениями:

$$\delta\tilde{S} = \tilde{S}_{st} + \tilde{S}_{jump},$$

$$\tilde{S}_{st} \approx -\frac{B+D\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}{2D(\alpha_2-\alpha_1)} \left( \frac{B+D\alpha_2}{B+D\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}} \right)^2 \ln \left( \frac{B+D\alpha_2}{B+D\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \right) - \left( \frac{B+D\alpha_1}{B+D\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \right)^2 \ln \left( \frac{B+D\alpha_1}{B+D\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} \right) - \frac{(B+D\alpha_2)^2 - (B+D\alpha_1)^2}{2\left(B+D\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^2},$$

$$\tilde{S}_{jump} \approx -\frac{1}{2D(B+D\alpha_2)} \left[ \left( A - \frac{BC}{D} \right)^2 \frac{D}{B+D\alpha_2} + C^2\alpha_2 + C \left( 2A - \frac{BC}{D} \right) \right]. \quad (35)$$

В постановке квазизамкнутой системы в переходной области:  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , аналогично уравнениям термодинамики можно записать соотношение, связывающее энергию  $\Delta U = U_{II} - U_{I}$ , затрачиваемую или выделяемую в процессе квазистационарного перехода из одного стационарного состояние в другое, с производством энтропии  $\Delta S = S_{st} + S_{jump}$  (см. (33)-(34)), обусловленное этим переходом:  $\tilde{T}\Delta S = \Delta U$ . Здесь  $U_{Ki}$  (где  $K = I, II$ ;  $i = 1, 2$ ) - внутренняя энергия системы, находящейся в состоянии, описываемом  $I$ -й или  $II$ -й ветвью

гистерезисной кривой (функции  $m_1(\alpha)$  или  $m_2(\alpha)$ , соответственно), в точках  $\alpha_i$  ( $i = 1$  или  $i = 2$ ).

Величина  $\tilde{T}$  с размерностью энергии, в данном случае, не является температурой системы. Она определяет значение энергии, от которого ведется отсчет энергетических уровней и, в силу аддитивности энтропии и энергии, может быть найдена из соотношения:  $\tilde{T} = \tilde{U}_{jump} / \tilde{S}_{jump}$ , где производство энтропии  $\tilde{S}_{jump}$  определяется выражением (35), а изменение энергии  $\tilde{U}_{jump} = U_{II2} - U_{I2}$  может быть найдено в результате численного эксперимента, как разность значений внутренней энергии системы при нахождении ее на одной и на другой ветвях гистерезисной кривой в точке перехода  $\alpha_2$ .

Зная параметр  $\tilde{T}$  и используя выражения (33), (34), можно определить величину  $\Delta U = U_{II2} - U_{I1}$ , характеризующую разность значений внутренней энергии системы в точках  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на двух разных ветвях гистерезисной кривой:

$$\Delta U = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} \Delta S = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} (S_{st} + S_{jump}). \quad (36)$$

Величина  $\Delta U$  характеризует также минимальную работу (без учета затрат энергии на изменение самого параметра  $\alpha$ ) необходимую для перевода системы из точки  $\alpha_1$  в точку  $\alpha_2$  (при переходе с одной ветви на другую).

С другой стороны, если известны значения внутренней энергии системы, находящейся в состоянии, описываемом одной из ветвей гистерезисной функции ( $m_1(\alpha)$  или  $m_2(\alpha)$ ) в двух точках  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , можно найти разность значений внутренней энергии системы в одной точке, но находящейся в двух разных состояниях (описываемой разными ветвями гистерезисной функции).

В самом деле, пусть, для определенности, известны значения внутренней энергии системы  $U_{I1}$  и  $U_{I2}$  при нахождении ее в точках  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в состоянии, описываемом  $I$ -й ветвью гистерезисной кривой (функцией  $m_1(\alpha)$ ), тогда

$$\Delta U = U_{II2} - U_{I1} = (U_{II2} - U_{I2}) + (U_{I2} - U_{I1}) = \tilde{U}_{jump} + \Delta U_I,$$

где  $\tilde{U}_{jump} = U_{II2} - U_{I2}$ ,  $\Delta U_I = U_{I2} - U_{I1}$ .

Исходя из уравнения (36), можно записать:

$$\frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} = \frac{\Delta U}{\Delta S} = \frac{\tilde{U}_{jump} + \Delta U_I}{\Delta S} = \frac{\tilde{U}_{jump}}{\tilde{S}_{jump}} \frac{\tilde{S}_{jump}}{\Delta S} + \frac{\Delta U_I}{\Delta S}.$$

Следовательно,

$$\tilde{U}_{jump} = \frac{\Delta U_I}{\Delta S - \tilde{S}_{jump}} \tilde{S}_{jump} = \frac{U_{I2} - U_{I1}}{S_{st} + S_{jump} - \tilde{S}_{jump}} \tilde{S}_{jump}, \quad (37)$$

где значения энтропии  $S_{st}$ ,  $S_{jump}$ ,  $\tilde{S}_{jump}$  определяются соотношениями (33), (34) и (35), соответственно.

Уравнение (37) так же, как и уравнение (36), вместе с выражениями (33)-(35) и зависимостями для определения величины внутренней энергии в двух точках  $\alpha$  на одной ветви или в одной точке, но на разных ветвях гистерезисной функции, образуют замкнутую в рамках расчетно-теоретического подхода модель для определения внутренней энергии в других точках или состояниях. Эта модель может быть использована для решения рассматриваемого класса задач без привлечения эмпирических параметров.

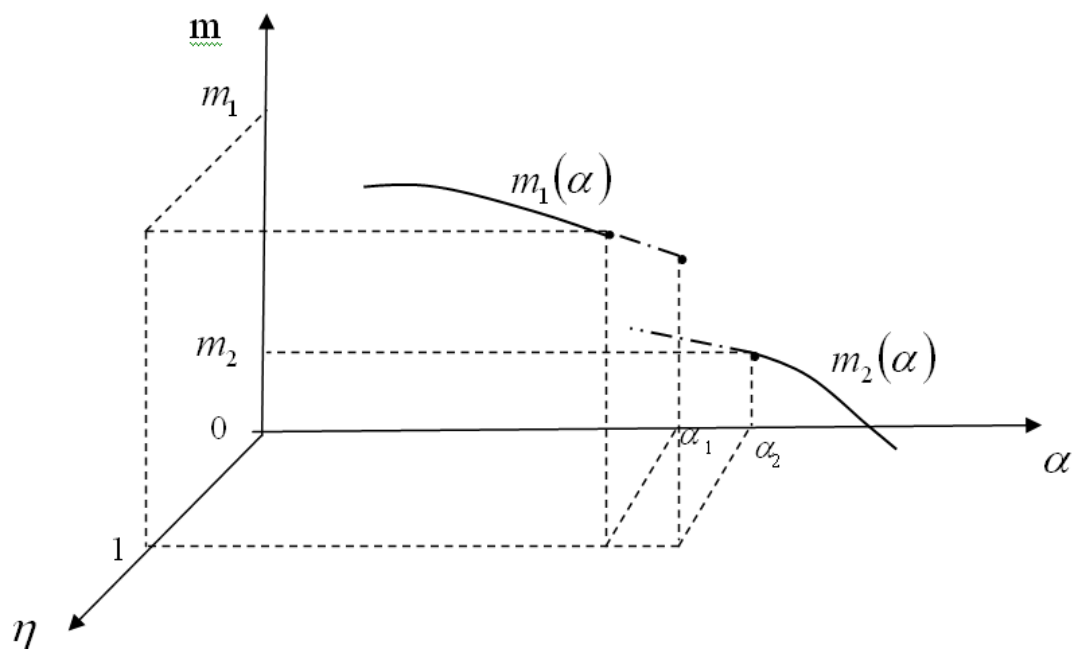


Рис.6  
Схематичное изображение гистерезисной кривой второго типа.

### Выводы

В работе приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений, в соответствии с которой, можно выделить два основных типа: гистерезисные явления, зависящие от скорости изменения аргумента и гистерезисные явления от нее независящие.

Предложены теоретические методы описания гистерезисных функций первого и второго типов. Оба метода являются замкнутыми в рамках только расчетно-теоретических моделей.

Метод описания гистерезисных функций первого типа позволяет определять разность значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в каждой точке гистерезисной области с использованием данных только о стационарных значениях функции.

Предлагаемый теоретический подход описания гистерезисных функций второго типа позволяет решать задачу определения энергии затрачиваемой или выделяемой при переходе между двумя стационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

### Литература

1. Nader Jalili Hysteretic Characteristics of Piezoelectric Materials. Piezoelectric-Based Vibration Control 2010, Part 2, 161-181, DOI: 10.1007/978-1-4419-0070-8\_7.
2. Luigi Bruno, Carmine Maletta International Journal of Mechanics and Materials in Design Volume 4, Number 2, 97-103, DOI: 10.1007/s10999-008-9055-5.
3. Zhi-feng Tang, Fu-zai Lv, Zhan-qin Xiang Hysteresis model of magnetostrictive actuators and its numerical realization. Journal of Zhejiang University - Science A Volume 8, Number 7, 1059-1064, DOI: 10.1631/jzus.2007.A1059.

4. Xiaobo Tan, John S. Baras Optimal Control of Hysteresis in Smart Actuators: A Viscosity Solutions Approach. Hybrid Systems: Computation and Control. Lecture Notes in Computer Science, 2002, Volume 2289/2002, 113-128, DOI: 10.1007/3-540-45873-5\_35.
5. Петров К.П. Аэродинамика тел простейших форм. – М., “Факториал”, 1998, 432 с.
6. Любимов А.Н., Тюмнев Н.М., Хут Г.И. Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. – М., “Наука”, 1995, 397 с.
7. Ivanov M.S., Gimelshein S.F., Beylich A.E. Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // Phys. Fluids. – 1995. – V. 7. – P. 685–687.
8. Sherbak N.B., Gvozdeva L.G., Passerel D. Numerical simulation of stationary Mach reflection. Comparison with experiment // Proc. 21st Int. Symp. on Shock Waves, Great Keppel Island, Australia, 1997. – Panther Publishing, Fyshwick, Australia. – 1998. – V. 2. – P. 849–852.
9. Ivanov M.S., Kudryavtsev A.N., Nikiforov S.B., Khotyanovsky D.V., Pavlov A.A. Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // Physics of Fluids. – 2003. – V. 15, No. 6, 2003, P. 1807–1810.
10. Решетин А.Г. Аэродинамический гистерезис при обтекании спускаемого аппарата космического корабля "Союз" гиперзвуковым вязким потоком. Результаты натурных испытаний. - Космонавтика и ракетостроение, 2000, N19, 150 с.
11. Хатунцева О.Н. Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях СА “Союз” на гиперзвуковом участке спуска. “Сибирский журнал прикладной механики и технической физики” Т.52, N4, 2011 с. 52-62.
12. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов. М., “Сибирский журнал вычислительной математики” N2, 2009 г. стр.231-241.

Статья поступила в редакцию 3 декабря 2011 г.