УДК 539.9

КАК РАБОТАЮТ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Р.Г. Баранцев

СПбГУ, Санкт-Петербург
brem@mail.ru

Аннотация

Асимптотические методы служат для упрощения постановки и решения задач вблизи особенностей, при этом точность возрастает по мере приближения к особенности. Мы демонстрируем эффективность этих методов на ряде задач газовой динамики. Выявляется также связь асимптотики с тринитарной методологией.

ASYMPTOTIC METHODS: HOW THEY WORK

Asymptotic methods are intended to simplify definition and solution of problems in the vicinity of peculiarities and validity grows when approximating to the peculiarity. We displayed the effectiveness of these methods to solve some gasdynamic problems. The association of asymptotic and trinitar methodology is demonstrated.

1. Концепция сплошной среды

Оппозиция «дискретность-непрерывность» – одна из основных не только в физике, но и в философии, где она нашла выражение в антиномии Канта: *каждая сложная субстанция состоит из простых частей – не существует ничего простого.*

В современном естествознании различают два вида материи: вещество – обладающее массой покоя, и поле – с нулевой массой. Поле обычно мыслится непрерывным, а вещество дискретным. Однако большое место занимает и модель вещественного континуума.

Рассмотрим подробнее, как формируется *концепция сплошной среды.* Пусть ΔV – некоторый объём, содержащий частицы вещества, суммарная масса которых равна Δm. Отношение $\Delta m/\Delta V$, характеризующее плотность среды как массу в единице объёма, вообще говоря, зависит от величины ΔV. Эта зависимость тем заметнее, чем более неоднородна среда в пределах ΔV. С уменьшением объёма зависимость ослабевает, и величина $\Delta m/\Delta V$ стремится к некоторому пределу, который и принимают за значение плотности среды ρ в той точке, куда сжимается ΔV. Однако фактически этот процесс не доводят до конца, так как зависимость от величины объёма появляется снова, когда число частиц в нём становится невелико. Важно, что существует масштабный интервал ΔV, в пределах которого отношение $\Delta m/\Delta V$ остаётся постоянным. Запись $\rho = \lim\left(\Delta m/\Delta V\right)$ при $\Delta V \to 0$ означает, что обнаруженная закономерность экстраполируется по ΔV вплоть до нуля. Это позволяет использовать математику бесконечно малых величин, т.е. аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Изложенная концепция широко применяется в гидроаэромеханике, теории упругости, теории пластичности и других областях механики сплошных сред. Наряду с плотностью ρ таким же образом вводятся давление p, температура T, вектор скорости $\overline{u}$ и другие характеристики среды. Они называются *макропараметрами,* потому что определяются в масштабе ΔV, большом по сравнению с размерами молекул. Сверху объём ΔV ограничен характерными размерами неоднородностей этих макровеличин. Типичный масштабный интервал формирования целостных параметров макромира можно оценить как $10^{-8} \div 10^{-3}$ м, т.е. примерно в 5 порядков.

Существуют и другие масштабные уровни организации материи, допускающие введение континуальных моделей, как в микро-, так и в мегамире. Они далеки от человеческих масштабов, но доступны наблюдению при помощи приборов. Размах масштабной "лестницы расстояний" примерно 42 порядка, от 10^{-15}м до 10^{27}м. В микромире выделяются атомный и ядерный уровни, в мегамире – планетарный, звёздный, галактический. Целостная картина каждого уровня – сравнительно простая асимптотика. Между уровнями существуют связи, влияние одних на другие. Исследование таких *переходных слоёв* – интереснейшая проблема как асимптотологии, так и синергетики.

2. Гидро- и аэродинамика

Изучая жидкую сплошную среду, гидродинамика выделяет модели, которые можно рассматривать как особенности в пространстве определяющих параметров. Так, полагая плотность постоянной, получаем модель несжимаемой жидкости; допуская отсутствие вихря, имеем потенциальное течение; пренебрегая вязкостью и теплопроводностью, приходим к модели идеальной жидкости.

Эти модели удобны для математических исследований, но, будучи приближенными, щедро порождают эффекты, не соответствующие реальности. Как пишет Г. Биркгоф (ссылаясь на М. Лайтхилла), уже в XIX веке «гидродинамики разделялись на инженеров-гидравликов, которые наблюдали то, что нельзя было объяснить, и математиков, которые объясняли то, что нельзя было наблюдать» [1, с.17].

Неравномерность асимптотик в окрестности особенностей стала источником многочисленных парадоксов, для объяснения которых потребовалось углублённое исследование этих асимптотик. Так, равномерная линеаризация возмущений воздуха летящим аэропланом привела к выражению для аэродинамического сопротивления, которое обращается в бесконечность, когда скорость полёта приближается к звуковой (парадокс Аккерета). Однако этот “страшный” звуковой барьер оказался преодолимым, как только установили характер неравномерности трансзвуковой асимптотики. Другой пример: задача медленного (“ползущего”) обтекания кругового цилиндра при равномерном асимптотическом упрощении вообще не имела решения (парадокс Стокса). Но она стала разрешимой после уточнения относительных порядков конвективных и вязких членов в уравнениях движения.

Исследование течений при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = ud/\nu$, где u – скорость; d – характерный размер; ν – кинематический коэффициент вязкости) привело к понятию пограничного слоя (Л. Прандтль, Л.Г. Лойцянский и др.), которое обрело концептуальное звучание не только в гидродинамике.

В аэродинамике основным безразмерным параметром является число Маха $M = u/a$, где u, a – скорости газа и звука. В окрестности особых значений этого параметра $M = 1$ и $M = \infty$ выросли трансзвуковая и гиперзвуковая аэродинамика. Асимптотика вблизи $M = 1$ приводит к уравнению Трикоми для функции тока ψ

$$\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0,$$

где θ – угол наклона вектора скорости; η – преобразованный модуль скорости. После разделения переменных это уравнение решается в функциях Эйри [2]. Звуковая точка оказывается точкой перехода от экспоненциальной асимптотики в дозвуковой области к колебательной асимптотике в сверхзвуковой области. Асимптотика вблизи $M = \infty$ тоже неравномерна. Возмущение продольной составляющей скорости оказывается на порядок меньше, чем поперечной, и в первом приближении становится возможным изучать возмущённое течение только в поперечных сечениях [3].

Другой безразмерный параметр аэродинамики – отношение удельных теплоёмкостей при постоянных давлении и объёме $\kappa = c_p / c_v$, которое выражается через число возбуждённых степеней свободы j простой формулой $\kappa = (j+2)/j$. В одноатомном газе $j=3$ и $\kappa = 5/3$, в двухатомном – $j=5$ и $\kappa = 7/5$. При возбуждении колебательных и электронных степеней свободы j растёт и $\kappa \to 1$. При этом гиперзвуковое течение около тела вырождается в бесконечно тонкий слой с бесконечно большой плотностью [4]. В переменных (b,ψ), где b – продольная координата, ψ – функция тока, это течение можно описать аналитически, а асимптотика при малых $\varepsilon = (\kappa-1)/(\kappa+1)$ составляет хорошо разработанную теорию тонкого ударного слоя.

В аэродинамике разреженных газов, где основным параметром является число Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/L$ (l – средняя длина свободного пробега молекул газа, L – характерный макроразмер), асимптотические явления охватывают как раз тот круг проблем, который находится в центре внимания теоретических исследований [5]. Функция распределения молекул газа по скоростям $f(t,\mathbf{x},\mathbf{u})$ удовлетворяет уравнению Больцмана. Разложение этой функции по целым степеням Kn составляет метод Гильберта. Такое же разложение при дополнительном предположении о том, что f зависит от $t,\mathbf{x}$ только через макропараметры, ведёт к методу Чепмена – Энскога, в первом приближении которого получаются известные уравнения Навье – Стокса. Эти разложения являются асимптотическими решениями лишь вне начальных, граничных и ударных слоёв.

При $\mathrm{Kn} \to \infty$ межмолекулярными столкновениями можно пренебречь, и течение становится свободномолекулярным. Однако формальный переход к пределу не равномерен на больших расстояниях r (порядка Kn), поэтому в асимптотических разложениях аэродинамических коэффициентов по $\varepsilon = 1/\mathrm{Kn}$ возникают логарифмические члены. Например, в двумерном случае коэффициент аэродинамического сопротивления c_x имеет вид

$$c_x = c_0 + c^* \varepsilon^2 \ln \varepsilon + c_1 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

в трёхмерном

$$c_x = c_0 + c_1 \varepsilon + c^* \varepsilon^2 \ln \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$$

Асимптотическое раздолье открывается в теории взаимодействия разреженных газов с поверхностями [6]. Малых параметров здесь сколько угодно. Тут и глубина потенциала притяжения, и относительная температура поверхности, и статистическая шероховатость и многие другие. В этом богатом параметрическом пространстве многообразия особенностей достойны изучения с позиций теории катастроф.

3. Основные понятия асимптотики

Введём сначала основные символы и понятия асимптотического анализа, рассматривая функцию $f(x), x \in S$, при $x \to x_0$. Предел f_0 может быть конечным, нулевым, бесконечным или же несуществующим. В асимптотическом подходе интерес представляет около предельное поведение $f(x)$. Цель заключается в том, чтобы найти другую, более простую функцию $\varphi(x)$, которая описывает $f(x)$ при $x \to x_0$ с возрастающей точностью. Количественные сравнения опираются при этом на понятие порядка переменной величины. Введём основные *порядковые соотношения* и соответствующие символы.

Будем говорить, что $f(x)$ есть величина *порядка* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, если существует такое число A, что в некоторой окрестности Δ точки x_0 $|f(x)| \le A|\varphi(x)|$.

Кроме того, будем говорить, что $f(x)$ есть величина *порядка меньше* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая окрестность Δ_ε точки x_0, в которой $|f(x)| \le \varepsilon |\varphi(x)|$.

В первом случае отношение $|f(x)|/|\varphi(x)|$ в области Δ ограничено, во втором оно стремится к нулю при $x \to x_0$. Например, $\sin x = O(1)$, $x \to \infty$; $\ln x = o(x^a)$, $a > 0$, $x \to \infty$. Первое соотношение, очевидно, допускает распространение на конечную область Δ. Знаки символов происходят от начальной буквы слова order.

Целесообразно ввести ещё два порядковых соотношения. Будем говорить, что $f(x)$ *порядково равна* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) \approx \varphi(x)$, $x \to x_0$, если существуют такие числа $a > 0$ и A, что в некоторой окрестности Δ точки x_0 $a|\varphi(x)| \le |f(x)| \le A|\varphi(x)|$. Например, $1 - \cos x \approx x^2$, $x \to 0$.

Далее, будем говорить, что $f(x)$ *асимптотически равна* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \to x_0$, если $f(x)/\varphi(x) \to 1$. Например, $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

Нетрудно показать, что $f(x) \approx \varphi(x)$ эквивалентно двум соотношениям $f(x) = O(\varphi(x))$, $\varphi(x) = O(f(x))$, а $f(x) \sim \varphi(x)$ эквивалентно $f(x) = \varphi(x)[1 + o(1)]$. Следовательно, символы $\approx$ и $\sim$ порождены символами O и o и применяются лишь для краткости записи. Подчеркнём ещё, что знак равенства в основных соотношениях порядка употребляется в специфическом смысле, ибо символы O и o могут находиться лишь справа от этого знака.

Следует также отличать введённое выше понятие порядка от часто употребляемого в физике порядка постоянных или заключённых в некотором интервале величин, когда говорят, что радиус атома порядка 10^{-8} см, энергия связи порядка 10^2 эВ и т.п. В асимптотическом определении порядка существенным является вид функции $\varphi(x)$ и не важен постоянный коэффициент. Эффективность оценки, разумеется, зависит от величины коэффициента, но порядок асимптотики определяется только функцией $\varphi(x)$.

Название символа O не вполне соответствует его смыслу, так как эта оценка даёт не сам порядок, а лишь некоторую верхнюю границу. Чтобы смысл и звучание символа O совпадали, следовало бы использовать его для точной оценки порядка, а для верхней оценки предложить другой символ. Однако в основной массе существующей литературы символ O используется именно как верхняя оценка порядка, и с этой не вполне удачной традицией приходится считаться. Для точной оценки порядка, наряду с $\approx$, употребляются и другие обозначения (см. [7,8]).

Полезно различать следующие этапы асимптотического приближения. Сначала строятся верхние оценки типа $f(x) = O(\varphi(x))$. Обычно такая оценка оказывается завышенной, т.е. фактически $f(x) = o(\varphi(x))$. В ходе её улучшения находится точный порядок $f(x) \approx \varphi_0(x)$. Затем достигается асимптотическое равенство $f(x) \sim a_0\varphi_0(x)$. Для $\sin(ax)$ при $x \to 0$ указанные этапы таковы: $\sin(ax) = O(1)$, $\sin(ax) \approx x$, $\sin(ax) \sim ax$. Информация при этом увеличивается.

Завершив такой цикл, можно исследовать тем же путём остаток, получить асимптотическое равенство $f(x) - a_0\varphi_0(x) \sim a_1\varphi_1(x)$ и идти дальше. Для описания результата необходимо ввести новые понятия.

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \to x_0$, называется асимптотической, если $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$. Например, $\{x^n\}$ при $x \to 0$.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где a_n – произвольные числа, называется асимптотическим, если $\{\varphi_n(x)\}$ – *асимптотическая последовательность.*
Будем говорить, что $f(x)$ имеет *асимптотическое разложение* по $\{\varphi_n(x)\}$, записывая

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x), \quad N = 0,1,2,\ldots,$$

если
$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \varphi_n(x) + o\left(\varphi_m(x)\right), \quad m = 0,1,2,\ldots,N$$

Например, $e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n$, $x \to 0$. Этот ряд, как известно, сходится при любом фиксированном значении x. Однако понятие сходимости не требуется при определении асимптотического разложения. Более интересный пример получается, если взять интегральную показательную функцию $Ei(y) = \int_{-\infty}^{y} e^t t^{-1} \mathrm{d}t,\ y < 0$, и путём интегрирования по частям представить её в виде расходящегося асимптотического ряда

$$Ei(y) \sim e^y \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\, y^{-n},\ y \to -\infty$$

Оценка $\left| \int_{-\infty}^{y} e^t t^{-1-n} \mathrm{d}t \right| \le |y|^{-1-n} \int_{-\infty}^{y} e^t \mathrm{d}t = e^y\, |y|^{-1-n} = o\left(e^y\, |y|^{-n}\right)$ показывает, что этот ряд действительно является асимптотическим разложением функции $Ei(y)$ при $y \to -\infty$. Частная сумма ряда с верхним пределом *N* при любом $y = \text{const}$ с ростом *N* стремится к бесконечности. Но в асимптотическом разложении эта сумма рассматривается при $N = \text{const}$, и по мере приближения y к предельному значению $y = -\infty$ она всё лучше описывает $Ei(y)$ (см. также гл.8).

Представляет интерес вопрос о нахождении номера $N = m$, при котором достигается минимальное значение $\Delta_m(x)$. Способы определения $m(x)$ для некоторых классов асимптотических разложений указываются в работах [308, 309]. На практике можно ориентироваться на минимальный член, начиная с которого члены ряда начинают возрастать.

Теорема единственности. Пусть функция $f(x)$, $x \in S$, при $x \to x_0$ разлагается в ряд по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, т.е. $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$. Тогда коэффициенты разложения a_n определяются единственным образом.

Докажем это утверждение способом от противного. Допуская наличие еще одного разложения $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$, $b_n \ne a_n$, имеем $f(x) \sim a_0 \varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$, $f(x) \sim b_0 \varphi_0(x) + o(\varphi_0(x))$.

Разность этих выражений приводит к соотношению $a_0 - b_0 = o(1)$, откуда следует $a_0 = b_0$. Действуя далее методом математической индукции, получим доказательство теоремы.

Итак, если задана асимптотическая последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, то коэффициенты a_n асимптотического разложения функции $f(x)$ при $x \to x_0$ определяются однозначно по формуле

$$a_n = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right] \varphi_n^{-1}(x)$$

Однако нужно иметь в виду, что эта же функция $f(x)$ может разлагаться по другой асимптотической последовательности $\{\chi_n(x)\}$. Естественно, в этом новом разложении будут и другие коэффициенты. Например:

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ при } x \to 0; \quad \frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (1+x) x^{2n} \text{ при } x \to 0$$

С другой стороны, одно и то же асимптотическое разложение может соответствовать нескольким функциям. Например:

$$\frac{1}{1-x} \sim \frac{1+ce^{-1/x}}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ при } x \to 0$$

Иными словами, асимптотический ряд представляет не одну, а целый класс асимптотически равных функций.

Рассмотрим теперь действия над асимптотическими разложениями.

Сложение. Асимптотические разложения функций $f(x)$ и $g(x)$, $x \in S \subset R^1$ при $x \to x_0$ по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \ g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

можно складывать и умножать на постоянные

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \varphi_n(x)$$

Умножение. Перемножать асимптотические ряды, вообще говоря, нельзя, так как произведения $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)\}$ ($m, n =$ 0, 1, …) не всегда можно упорядочить в асимптотическую последовательность. Однако если это удается сделать, например, в случае $\varphi_n(x) = x^n$, то почленное перемножение возможно. Степенные асимптотические ряды допускают деление, если $b_0 \neq 0$.

Логарифмирование и потенцирование. Логарифмирование асимптотик не вызывает особых трудностей, а при потенцировании необходимо особо позаботиться о правильной оценке остатка. Рассмотрим, например, асимптотику функции $f(x) = (\sqrt{x}\ln x + 2x)\mathrm{e}^x = [2x + o(x)]\mathrm{e}^x$ при $x \to \infty$. Если $g(x) \equiv \ln f(x)$, то, в соответствии с последним равенством, $g(x) = x + \ln[2x + o(x)] = x + \ln x + \ln 2 + o(1) \sim x + o(x)$ при $x \to \infty$. Потенцируя разложение для функции $g(x)$, находим асимптотику $f(x) \sim \mathrm{e}^x$ при $x \to \infty$, при этом в главном члене асимптотики потерян множитель $2x$. Дело в том, что при потенцировании в разложении $g(x)$ не учтены члены $\ln x$ и $\ln 2$, которые как раз влияют на главный член асимптотики функции $f(x)$, и только величины $o(1)$ не изменяют коэффициент, так как $\exp\{o(1)\} \sim 1$.

<u>Интегрирование и дифференцирование.</u> Если в степенном асимптотическом разложении функции $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ при $x \to \infty$ имеем $a_0 = a_1 = 0$, то его можно интегрировать почленно, т.е.

$$\int_x^{\infty} f(x)dx \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{1-n} x^{1-n}$$

Дифференцировать асимптотические разложения в общем случае нельзя. Например, функция $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \sin(\mathrm{e}^{1/x})$ имеет вырожденное степенное разложение $f(x) \sim 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$ Однако производная функции $f(x)$ не допускает степенного разложения, хотя и существует. Если непрерывная при $x \geq d > 0$ производная $f'(x)$ имеет, как и функция $f(x)$, степенное асимптотическое разложение при $x \to \infty$, то оно получается путем почленного дифференцирования разложения функции $f(x)$.

До сих пор объектом нашего исследования была функция $f(x)$, зависящая от одного аргумента. Рассмотрим теперь функцию двух переменных $f(x,\varepsilon)$, $x \in D \subset R^n$, допускающую разложение по асимптотической последовательности

$$f(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{1}$$

Коэффициенты a_n зависят от координаты *x* *n*-мерного пространства. Эти ряды отличаются от так называемых <u>обобщенных асимптотических рядов</u> тем, что в последних последовательность $\{\varphi_n\}$ зависит не только от параметра ε, но и от переменной *x*.

Если равенство (1) справедливо для всех $x \in D$, то такое разложение называется равномерным по *x* в *D*. При этом

$$f(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(\varepsilon) = o\left[\varphi_N(\varepsilon)\right] \text{ для всех } x \in D$$

Вместо слов «равномерное асимптотическое разложение» иногда говорят «равномерно пригодное» или «равномерно точное разложение» [9].

Если же в области $D \subset R^n$ существует многообразие *L* меньшей размерности такое, что соотношение (6.1) не выполняется на любом подмножестве $D' \subset D$ размерности *n*, содержащем *L*, то разложение (6.1) является неравномерным. В этом случае говорят, что $f(x,\varepsilon)$ имеет сингулярность по ε при $x \in L$ или что $f(x,\varepsilon)$ − сингулярная функция, а многообразие *L* называют пограничным слоем. Явление неравномерности часто называют также явлением Стокса.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x,\varepsilon) = \mathrm{e}^{-x/\varepsilon} - 1, \quad x \in [0,1] \text{ при } \varepsilon \to 0 \tag{2}$$

Очевидно, что для всех $x \in [d,1]$, $d > 0$ и n

$$f(x,\varepsilon) = -1 + o(\varepsilon^n) \tag{3}$$

Асимптотическое разложение (2) для функции (3) является неравномерным вблизи $x_0 = 0$.

Каковы же источники неравномерности? Можно ли еще до решения конкретной задачи определить, является ли она регулярной или же сингулярной?

Основные математические источники неравномерности: 1) наличие в дифференциальном уравнении малого параметра ε при старшей производной; 2) изменение типа дифференциальных уравнений в частных производных при $\varepsilon \to 0$; 3) качественное изменение краевых и начальных условий задачи при $\varepsilon \to 0$, а также изменение структуры области D при $\varepsilon \to 0$; 4) неограниченность области D.

Например, как известно гидромеханикам, уравнения Навье – Стокса, описывающие течения вязкой жидкости, являются уравнениями 4-го порядка эллиптического типа. Если число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to \infty$, то переход к пределу по малому параметру $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1} \to 0$ при старших производных преобразует эти уравнения в уравнения Эйлера, которые в случае несжимаемой жидкости являются уравнениями того же типа, но 2-го порядка, и описывают течения невязкой жидкости. Значит, предельный переход по малому параметру при старшей производной понижает порядок исходного уравнения, а решение нового уравнения, естественно, не удовлетворяет всем условиям задачи. Так, уравнения Эйлера не обеспечивают выполнимость условия «прилипания» частиц жидкости на поверхности тела.

В теории упругости характерными асимптотическими задачами являются краевые задачи для эллиптических уравнений 4-го порядка, решение которых необходимо построить в многосвязной области D, причём многосвязность области обусловлена наличием тонких трещин, отверстий и т.п. Если в качестве малого параметра ε выбрать характерную толщину трещины или диаметр отверстия, то в пределе по $\varepsilon \to 0$ получается односвязная область D_0, в которой отсутствуют трещины, отверстия. Решение задачи в области D_0, будет равномерным везде в D за исключением многообразия L, представляющего собой области трещин и отверстий. Таким образом, если структура предельной области D_0 существенно отличается от структуры области D, то это признак сингулярности задачи.

4. Сращивание и соединение асимптотик

Если области действия разных асимптотик перекрываются, то в зоне перекрытия можно осуществлять *сращивание* этих асимптотик путём взаимного переразложения. Если же области действия разделены переходным слоем, то сращивать негде, но можно проводить *соединение* асимптотик при помощи аппроксимаций Паде.

Рассмотрим простой пример ([9], §5.2):

$$\varepsilon y'' + y' = a, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{4}$$

с известным точным решением

$$y = (1-a)\frac{1-e^{-x/\varepsilon}}{1-e^{-1/\varepsilon}} + ax \tag{5}$$

Построим асимптотику решения задачи (4) при $\varepsilon \to 0$, опираясь на точное решение (5). Видно, что упрощение возможно при $x \ll \varepsilon$ или $x \gg \varepsilon$. В первом случае, раскладывая экспоненту в ряд Маклорена, имеем внутреннюю асимптотику

$$y_i \sim (1-a)x/\varepsilon \tag{6}$$

Внешнюю асимптотику при $x \gg \varepsilon$ получаем, пренебрегая малыми экспоненциальными слагаемыми

$$y_e \sim (1-a) + ax \tag{7}$$

В переходном слое, когда x имеет порядок ε, можно пренебречь в знаменателе составляющей $e^{-1/\varepsilon}$, но приходится оставлять в числителе функцию $e^{-x/\varepsilon}$, так что

$$y_t \sim (1-a)(1-e^{-x/\varepsilon}) \tag{8}$$

Области действия разложений (6) и (7) перекрываются, поэтому сращивание возможно.

Если точное решение неизвестно, приходится исходить из постановки задачи. Внешнее разложение обычно строится как решение исходной задачи при $\varepsilon = 0$. В нашем случае уравнение (4) при этом вырождается и его решение, удовлетворяющее условию на правом конце промежутка, совпадает с (7).

В переходном слое вводится растянутая переменная $\xi = x/\varepsilon$, и уравнение для определения функции $y_t(\xi,\varepsilon)$ принимает вид

$$y_t'' + y_t' = 0$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию на левом конце промежутка $y_t = C\left(1-e^{-\xi}\right)$, содержит неопределённую постоянную *C*, которая находится путём сращивания решения в переходном слое y_t с внутренним решением y_i. В результате имеем

$$C = 1 - a$$

Сравнивая внутреннюю (6) и переходную (7) асимптотики, видим, что вторая несколько сложнее. В данном простом примере эта разница невелика, в более же сложных случаях за расширение области действия на переходный слой приходится платить серьёзным усложнением внутренней асимптотики, поэтому во многих случаях предпочтительным становится метод соединения не перекрывающихся, но зато простых асимптотик.

Рассмотрим для примера задачу

$$\varepsilon y'' - xy = \varepsilon y, \; y(0) = 1, \; y(\infty) = 0 \tag{9}$$

Внешнее решение уравнения (9), удовлетворяющее условию на правом конце промежутка интегрирования, тривиально: $y_e = 0$.

Введём растянутую переменную $\xi = x/\varepsilon^{\gamma}$. В переходном слое главные члены уравнения должны быть одного порядка; из этого условия находим $\gamma = 1/3$ и получаем для функции $y_t(\xi,\varepsilon)$ уравнение

$$y_t'' - \xi y_t = 0, \tag{10}$$

точное решение которого выражается через функции Эйри.

Построим теперь асимптотические решения уравнения (9). Для построения внутренней асимптотики используем степенное разложение по ξ

$$y_i = 1 - a\xi + 1/6\,\xi^3 + O(\xi^4), \tag{11}$$

где a – произвольная постоянная.

Внешнее разложение строится при помощи метода ВКБ [10]

$$y_e = b\xi^{-1/4}\exp\left(-2/3\,\xi^{3/2}\right)\left[1 - 5/48\,\xi^{-3/2} + O\left(\xi^{-3}\right)\right], \tag{12}$$

где b – произвольная постоянная.

Теперь естественно попытаться срастить эти асимптотики. Из-за наличия экспоненты в (12) использовать аппроксимацию Паде в исходном виде нельзя. Поэтому используем квазирациональную аппроксимацию [11]: при больших значениях переменной экспонента учитывается полностью, а при подборе коэффициентов для малых значений переменной она раскладывается в ряд Маклорена. Построенное таким путём равномерно пригодное решение имеет вид

$$y_a = \frac{1 - as + \frac{2}{3}s^{3/2} - \frac{2}{3}as^{5/2} + \frac{32}{5}as^4}{1 + \frac{32}{5}\frac{a}{b}s^{17/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}s^{3/2}\right), \tag{13}$$

где $s = x\varepsilon^{-1/3}$.

Коэффициенты a и b в выражении (13) определяются на основе интегральных соотношений, которые получаются из уравнения (10) путём умножения на весовые функции $1, x, x^2, \ldots$ и дальнейшего интегрирования по всему промежутку [0, ∞).

Аппроксиманта (13) сохраняет по три члена асимптотики на обоих концах и обеспечивает внутри переходного слоя точность до 1.5 %.

Как видим, метод соединения асимптотик допускает значительную свободу действий как при выборе числа параметров в Паде или квазирациональной аппроксиманте, так и при подборе весовых функций в процессе определения этих параметров. Искусство асимптотолога проявляется в умении удачно совмещать требования простоты и точности.

5. Расширение области действия асимптотик

Асимптотика, осуществляя упрощение за счёт локализации, вообще говоря, имеет тенденцию к сужению области действия. В результате возникают переходные слои, составляющие основной источник трудностей в асимптотической методологии. Поэтому границы простых асимптотик следует оценивать по максимуму. И, более того, желательно находить возможности для их расширения.

Покажем один приём расширения области действия асимптотики на следующем примере [12]

$$y'' + y = \varepsilon f(x)\, y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0;\ \ |f(x)| \le A, x \in [0,\infty). \tag{14}$$

Перейдём от (14) к интегральному уравнению

$$y(x) = \cos x + \varepsilon \int_0^x f(t)\, y(t) \sin(x-t)\, \mathrm{d}t \tag{15}$$

Обозначая $y_m(\varepsilon) = \max|y(x)|$ на $[0, x_m]$, из (2) имеем $y_m \le 1 + \varepsilon x_m A y_m$, т.е. $y_m(1-\varepsilon x_m A) \le 1$. Отсюда, если x_m растёт медленнее, чем ε^{-1}, то y_m можно считать ограниченным. Следовательно,

$$y(x) = O(1),\ x \in [0, x_m],\ x_m = o(\varepsilon^{-1}) \tag{16}$$

На основе (16) из (15) получается уточнённая оценка

$$y(x) = \cos x + \varepsilon x O(1),\ x \in [0, x_m],\ x_m = o(\varepsilon^{-1}) \tag{17}$$

Итерационный процесс в (15) даёт следующие члены асимптотического разложения, но в той же области x, что и опорная оценка (16).

Возможность расширения области действия асимптотических оценок появляется, если предварительно выполнить итерацию интегрального оператора (15)

$$y(x) = \cos x + \varepsilon \int_0^x f(t) \cos t \sin(x-t)\, \mathrm{d}t + \varepsilon^2 \int_0^x f(t) \sin(x-t) \int_0^t f(\tau)\, y(\tau) \sin(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t$$

Сменив порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$y(x) = \cos x + \varepsilon J_c(0,x) + \varepsilon^2 \int_0^x f(\tau)\, y(\tau) \left[J_s(\tau,x) \cos\tau - J_c(\tau,x) \sin\tau \right] \mathrm{d}\tau \tag{18}$$

где
$$J_c(\tau,x) = \int_\tau^x f(t) \cos t \sin(x-t)\, \mathrm{d}t,\quad J_s(\tau,x) = \int_\tau^x f(t) \sin t \sin(x-t)\, \mathrm{d}t \tag{19}$$

Продолжимость асимптотики (17) на большие значения x, естественно, зависит от свойств функции $f(x)$. Имея уравнение (18), нетрудно сформулировать условия, допускающие такое расширение. Если $f(x)$ такова, что J_c и J_s при всех x ограничены, то из (18) получаем

$$y_m \le 1 + O(\varepsilon) + \varepsilon^2 x_m y_m O(1),$$

откуда следует ограниченность y_m при $x_m = o\left(\varepsilon^{-2}\right)$. В результате

$$y(x) = \cos x + \varepsilon J_c(0, x) + \varepsilon^2 x O(1),\ x \in [0, x_m],\ x_m = o\left(\varepsilon^{-2}\right),$$

т.е. асимптотика (17) уточняется и одновременно продвигается в сторону больших x.

Для ограниченности интегралов (19) достаточно их периодичности. Это условие выполняется, например, при $f(x) = a\cos x + b\sin x$ и не выполняется при $f(x) = 1$, $\cos 2x$, $\sin 2x$.

Главным в методе является расщепление интегрального оператора на три асимптотически неравноправные части с неизвестным элементом лишь в наиболее слабой. Разумеется, дальнейшее расщепление ведёт к последовательному расширению с появлением сопутствующих условий.

6. Асимптотическое разделение переменных

Разделение переменных – заслуженный метод решения многомерных задач математической физики. Спасая от *проклятия размерности*, он не сужает область поисков на *пятачок под фонарём* хороших функций, так как сопутствующие разложения в ряды и интегралы представляют функции достаточно широкого класса.

Однако при решении сложных практических задач этот метод встречается значительно реже, чем в традиционных учебниках математической физики. Причина очевидно в том, что круг задач, допускающих каноническое разделение переменных, довольно узок: уравнения, границы и граничные условия должны удовлетворять жёстким требованиям разделимости.

Расширение этого круга на неканонические задачи [13] открыло возможность исследовать особенности решения в сложных областях при помощи асимптотики коэффициентов Фурье. При этом оказалось, что если ставить задачу на отыскание не полных коэффициентов Фурье, а только первых членов их асимптотики, то открываются возможности дальнейшего расширения сферы действия этого метода [14].

Рассмотрим, например, смешанную задачу для квазиволнового уравнения

$$u_{yy} - u_{xx} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{20}$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0,\ -\infty < y < \infty;$$

$$u(x, 0) = p(x),\ u_y(x, 0) = q(x),\ 0 \le x \le \pi$$

Искать решение в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$ здесь возможности нет, но ничто не мешает разложить $u(x, y)$ как функцию x в ряд по полной на $[0, \pi]$ системе $\{\sin nx\}$:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin nx, \tag{21}$$

где в силу (20) коэффициенты $Y_n(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$Y_n'' + n^2 Y_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\sin nx\,\mathrm{d}x,\ n = 1, 2, \ldots$$

Подставляя разложение (21) в аргументы функции f, имеем бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений для $Y_n(y)$.

Суть предлагаемого метода состоит в асимптотическом расщеплении этой системы при итерационном процессе решения. Если главный член асимптотики Y_n при больших n полностью содержится в решении однородного уравнения, то при построении следующих членов в итерационный процесс достаточно включать не весь ряд (21), а лишь ту его часть, которая суммируется в конечном виде из первых членов асимптотики Y_n.

В случае $f = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u$ с произвольными гладкими функциями a, b, c при условии $a(0,y) = a(\pi,y) = 0$ в работе [15] таким путём построены в явном виде два первых члена асимптотики $Y_n(y)$.

7. Метод порядковых уравнений

В методе малых возмущений неизбежно возникает вопрос об относительных порядках малости неизвестных величин. Предположение об одинаковости порядков оправдывается далеко не всегда и может приводить к ошибочным выводам, которые обычно предпочитают называть парадоксами.

Обоснованная постановка асимптотической задачи может быть сделана после предварительного определения порядков возмущений. Поэтому целесообразно сначала ставить и решать задачу на уровне порядковых соотношений и только потом рассматривать её на уровне асимптотических равенств. В результате достигается значительное облегчение задачи на первом этапе и уверенное упрощение её на втором, благодаря найденным порядкам.

Изложим суть этого метода на примере краевой задачи A_ε для системы квазилинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + b^k = 0, \quad k = 1,2,...,m; \tag{22}$$

$$a_{ij}^k = a_{ij}^k(u,x,\varepsilon), \quad b^k = b^k(u,x,\varepsilon); \quad u_i = u_i(x,\varepsilon);$$

$$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \quad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

с граничными условиями

$$f^k(u,\sigma,\varepsilon) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{23}$$

на границах Γ_ε^k, заданных в параметрической форме

$$x_j = x_j^k(\sigma,\varepsilon); \quad \sigma = \{\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n-1}\}, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

При $\varepsilon \to 0$ задача $A_\varepsilon \to A_0$, решение которой известно.

Введём порядки возмущений неизвестных функций и производных, считая их не зависящими от x:

$$u_i(x,\varepsilon) - u_i^0(x) = \varepsilon_i(\varepsilon) u_i^*(x,\varepsilon), \quad u_i^* \approx 1,$$

$$\partial u_i(x,\varepsilon)/\partial x_j - \partial u_i^0(x)/\partial x_j = \varepsilon_{ij}(\varepsilon) u_{ij}^*(x,\varepsilon), \quad u_{ij}^* \approx 1$$

Задача второго этапа состоит в определении этих $m + mn$ порядковых функций $\varepsilon_i(\varepsilon)$ и $\varepsilon_{ij}(\varepsilon)$. Чтобы найти их, нужно записать исходную задачу на уровне порядков всех величин. При этом $x_j^k, f^k, a_{ij}^k, b^k$ порождают известные порядковые функции, через которые и должны определяться $\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$. В частности, из (3) имеем

$$x_j^k(\sigma,\varepsilon) - x_j^{k0}(\sigma) = \xi_j^k(\varepsilon) x_j^{k^*}(\sigma,\varepsilon), \quad x_j^{k^*} \approx 1,$$

где $\xi_j^k(\varepsilon)$ известны, поскольку границы Γ_ε^k заданы.

Записывая возмущённые граничные условия на возмущённых границах для возмущённых функций $f^k\{u[x^k(\sigma,\varepsilon),\varepsilon],\sigma,\varepsilon\}$, видим, что ε здесь может входить тремя различными путями. Если на $\Gamma_0 \partial f^{k0}/\partial u_i \neq 0$ и $\partial u_i^{k0}/\partial x_j \neq 0$, то равенство (2) в главных членах возмущений имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f^{k0}}{\partial u_i}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i^{k0}}{\partial x_j}\xi_j^k(\varepsilon)x_j^{k0*}+\varepsilon_i(\varepsilon)u_i^{0*}\right\}+\varphi^k(\varepsilon)f^{k0*}=0\,,\quad k=1,2,\ldots,m\,, \tag{24}$$

где $\varphi^k(\varepsilon)$ – известные порядковые функции, характеризующие возмущения граничных условий. Система (24) формально полна относительно неизвестных порядковых функций $\varepsilon_i(\varepsilon)$.

Для оставшихся mn функций $\varepsilon_{ij}(\varepsilon)$, прежде всего, m порядковых уравнений можно получить из (22). Кроме того, дифференцируя граничные условия (23) по параметрам σ_r, имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f^k}{\partial u_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j^k}{\partial \sigma_r}+\frac{\partial f^k}{\partial \sigma_r}=0\,,\quad k=1,2,\ldots,m,\ r=1,2,\ldots,n-1$$

откуда находятся остальные $mn-m$ функций. При этом от производных $\partial f^k/\partial u_i$, $\partial f^k/\partial \sigma_r$, $\partial x_j^k/\partial \sigma_r$ появляются новые порядковые функции, которые должны быть известны.

В результате получаем полную систему алгебраических уравнений для определения точных порядков неизвестных функций u_i и их производных. Решение таких уравнений достигается достаточно просто, так как нужно следить только за порядками, а не за коэффициентами.

Продемонстрируем эффективность метода на задаче трансзвукового обтекания тонкого профиля [2]. Пусть число Маха $M_\infty^2 = 1+\eta,\ 0<\eta \ll 1$, и рассмотрим течение в области D между носовой ударной волной и характеристикой, выходящей из задней кромки. Компоненты скорости u и v, отнесённые к критическому значению a^*, удовлетворяют в области D уравнениям

$$u_y - v_x = 0,\quad \left(a^2-u^2\right)u_x - uv\left(u_y+v_x\right)+\left(a^2-v^2\right)v_y = 0\,, \tag{25}$$

где $a^2 = 1+\dfrac{\kappa-1}{2}\left(1-u^2-v^2\right)$, а также граничным условиям $v = uf'$ на профиле $y = f(x,\varepsilon)$ и

$$u = u_\infty\left[1-\frac{2}{\kappa+1}\left(\frac{1}{1+l'^2}-\frac{1}{M_\infty^2}\right)\right],\quad v = u_\infty\frac{2}{\kappa+1}l'\left(\frac{1}{1+l'^2}-\frac{1}{M_\infty^2}\right)$$

на ударной волне $x = l(y,\varepsilon)$.

Возмущения по η будем считать пренебрежительно малыми по сравнению с главными членами асимптотики по ε. Форма ударной волны неизвестна, но это компенсируется дополнительным условием на ней. Наша задача соответствует общей формулировке при $m=n=2$ и ε, входящем только через форму границы.

Невозмущённые значения u, v, l' равны 1, 0, 0 соответственно. В поисках порядков возмущений по ε запишем

$$u = 1+\varepsilon_i(\varepsilon)u_i,\quad v = \varepsilon_2(\varepsilon)u_2,\quad l' = \delta_1(\varepsilon)l_1;$$

$$u_x = \varepsilon_{11}u_{11},\quad u_y = \varepsilon_{12}u_{12},\quad v_x = \varepsilon_{21}u_{21},\quad v_y = \varepsilon_{22}u_{22},\quad l'' = \delta_2 l_2\,,$$

где $\varepsilon_i, \delta_i, \varepsilon_{ij}$ – неизвестные порядковые функции, зависящие только от ε.

Относительно профиля предполагаем, что

$$f = \xi_0(\varepsilon)f_0,\quad f' = \xi_1(\varepsilon)f_1,\quad f'' = \xi_2(\varepsilon)f_2$$

где ξ_0, ξ_1, ξ_2 – некоторые заданные порядковые функции от ε.

Граничные условия, записанные в главных членах возмущений, дают систему порядковых уравнений

$$\varepsilon_2 = \xi_1, \quad \varepsilon_1 = \delta_1^2, \quad \varepsilon_2 = \delta_1^3,$$

откуда
$$\varepsilon_1 = \xi_1^{2/3}, \quad \varepsilon_2 = \xi_1, \quad \delta_1 = \xi_1^{1/3}$$

Из (25) имеем

$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_1\varepsilon_{11} + \varepsilon_2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} = 0, \tag{26}$$

а из продифференцированных граничных условий получаем

$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}\xi_1 + \varepsilon_{11}\xi_1 + \xi_2 = 0, \quad \varepsilon_{11}\delta_1 + \varepsilon_{12} + \delta_1\delta_2 = 0, \quad \varepsilon_{21}\delta_1 + \varepsilon_{22} + \delta_1^2\delta_2 = 0 \tag{27}$$

Решая линейную алгебраическую систему порядковых уравнений (26), (27), находим

$$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \xi_2, \quad \varepsilon_{11} = \delta_2 = \xi_2\xi_1^{-1/3}, \quad \varepsilon_{22} = \xi_2\xi_1^{1/3}$$

В случае $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \varepsilon^{3/2}$ приходим к известному классическому варианту трансзвуковой теории возмущений [2]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon^{3/2},\ \delta_1 = \varepsilon^{1/2},\ \varepsilon_{11} = \varepsilon,\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon^{3/2},\ \varepsilon_{22} = \varepsilon^2, \delta_2 = \varepsilon$$

В нестационарной задаче о колебании тонкого крыла этот метод позволил обнаружить критические частоты, при переходе через которые порядки главных членов и сама постановка асимптотической задачи заметно меняются, что является весьма существенным для решения проблемы флаттера [16].

Следует подчеркнуть, что вид порядковых функций здесь не задаётся. Он может получиться любым в зависимости от известных в задаче порядков возмущений. Упрощённый вариант метода, когда порядковые функции заранее предполагаются степенными и ищутся только показатели степени, можно найти, например, в книге А.Д. Шамровского [17].

8. Улучшение сходимости рядов

Быстрота сходимости рядов определяется асимптотикой его членов при больших значениях индекса суммирования. Эта асимптотика позволяет улучшать сходимость рядов, выделяя слабо сходящиеся части, которые нередко суммируются в конечном виде. При этом автоматически находятся главные особенности решения, представляющие обычно основной физический интерес.

Пусть, например, решение некоторой задачи построено методом Фурье в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{28}$$

где при больших n

$$u_n(x) = a_1(x)\frac{\sin nx}{n} + a_2(x)\frac{\cos nx}{n^2} + O\left(n^{-3}\right) \tag{29}$$

Ясно, что ряд (6.10) сходится очень медленно, и для вычисления его значения с точностью до трёх знаков при непосредственном суммировании пришлось бы сложить порядка 10^3 членов. Если же подставить разложение (29) в (28) и воспользоваться известными формулами

$$S_1(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},\ \ 0 < x < 2\pi,\ \ S_1(0) = 0,\ \ S_1(x + 2k\pi) = S_1(x),$$

$$C_2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4},\ \ 0 < x < 2\pi,\ \ S_1(0) = 0,\ \ C_2(x + 2k\pi) = C_2(x),\ \ k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = a_1(x) S_1(x) + a_2(x) C_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(n^{-3}\right),$$

и в оставшемся ряде число слагаемых, обеспечивающих ту же точность, стало на два порядка меньше. При этом выделенные слабо сходящиеся части просуммированы в конечном виде и содержат в себе основные аналитические особенности (все разрывы – в S_1, все изломы – в C_2, в чём нетрудно убедиться, нарисовав графики этих функций). Чем лучше сходимость остатка, тем выше его гладкость.

Слабо сходящиеся части рядов Фурье часто имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} e^{inx} = E_\gamma(x) = C_\gamma(x) + jS_\gamma(x), \quad \gamma > 0$$

Асимптотический подход позволяет выделить главные особенности в виде сингулярных интегралов, привлекая интегральное представление Г-функции (специальной функции, обобщающей понятие факториала на дробные числа) [18]. Так, при $0 < \gamma < 1$ в интервале $[-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$E_\gamma(x) = |x|^{\gamma - 1} \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma)} \left[\sec\frac{\gamma\pi}{2} + j \operatorname{sign} x (\cos ec) \frac{\gamma\pi}{2} \right] + O(1), \text{ где } j = \sqrt{-1},$$

а при $\gamma = 1$

$$E_1(x) = -\ln\left| 2\sin\frac{x}{2} \right| + j\frac{\pi - x}{2},\ \ 0 < x < 2\pi$$

В случае переходной асимптотики, представимой функциями Эйри, особенности выделяются с помощью двукратных интегралов [18].

9. Внешняя и внутренняя асимптотики

Сравнивая понятия регулярной и сингулярной асимптотик, легко видеть, что первое ассоциируется с равномерностью, а второе − с неравномерностью. В асимптотической математике используется также термины внешняя и внутренняя асимптотики. На первый взгляд очевидно, что внешние – это регулярные и равномерные, а внутренние − сингулярные и неравномерные, и различие между этими вариантами оппозиций скорее художественное, чем научное. Но тогда нужно ли размножать столь близкие понятия? Строгий Оккам запрещал вводить новые сущности сверх необходимости.

Рассмотрим ситуацию подробнее на примере асимптотики решений дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0,\ \ \lambda \to \infty \tag{30}$$

При $q(x) > 0$ решение этого уравнения имеет колебательный характер, при $q(x) < 0$ – экспоненциальный. Точка x_0, в которой $q(x_0) = 0$ и эти решения меняются местами, называется точкой *перехода* или *поворота*. Пусть x_0 – единственный простой нуль функции $q(x)$ и $q'(x_0) > 0$. В окрестности точки перехода уравнение (30) можно упростить, полагая $q(x) \sim q'(x_0)(x - x_0)$. После замены $t = (x - x_0)[q'(x_0)]^{1/3}$ получаем так называемое *эталонное* уравнение

$$y'' + \lambda^2 t y = 0,$$

асимптотически эквивалентное исходному в области, содержащей точку перехода $t = 0$. Зависимость y от t и λ можно объединить, полагая

$$s = \lambda^{2/3} t, \quad y(t) = U(s),$$

в результате чего приходим к уравнению Эйри

$$U'' + sU = 0,$$

имеющему точные решения в виде специальных функций Эйри [18].

Решение уравнения Эйри дает асимптотики решения исходного уравнения (30). А именно, экспоненциальная (левая внешняя) асимптотика имеет место при $s \to -\infty$, а колебательная (правая внешняя) – при $s \to \infty$. В некотором интервале в окрестности нуля функция Эйри осуществляет превращение экспоненциальной асимптотики в колебательную. Её и хочется назвать внутренней (сингулярной, неравномерной) асимптотикой. Но внутри указанного интервала есть участок, где возможно дальнейшее упрощение – разложение функции Эйри в ряд Маклорена с учетом только нескольких первых членов разложения. Поэтому внутренней лучше называть эту простую асимптотику, а функция Эйри представляет собой асимптотику переходную, ибо в переходных слоях она не допускает дальнейшего упрощения.

Таким образом, понятия внешней и внутренней асимптотик имеют самостоятельное значение, не сводимое к другим, хотя и близким.

10. Интегральные асимптотические итерации с расходимостью

Асимптотические методы – эффективное средство решения нелинейных задач. Дифференциальный подход позволяет находить простые локальные асимптотики, но нуждается в их последующем объединении через переходные зоны. Интегральный подход схватывает все зоны, но платит за это соответствующим усложнением. Для изучения особенностей интегральный путь представляется более подходящим, так как позволяет раскрывать их естественную структуру, не прибегая к искусственным построениям. Если в интегральном операторе удаётся выделить асимптотически главную часть, которая допускает сравнительно простое решение, напрашивается метод итераций, развёртывающий асимптотическое разложение полного решения. Однако при этом возникают проблемы, связанные с асимптотической неравномерностью, которая проявляется в том, что нахождение очередной итерации не сводится к простому интегрированию предыдущего приближения. Типичная ситуация такова: перед интегралом стоит малый параметр, а интеграл от предельного решения расходится; иными словами, возникает неопределённость типа $0 \cdot \infty$, раскрывать которую нужно с использованием более точных выражений, содержащих искомые члены решения. В результате вместо явного асимптотического представления получается интегральное уравнение.

В настоящей заметке предлагается метод раскрытия сингулярности с помощью дополнительного разложения в точке расходимости. При этом интегральное уравнение вырождается в более простое, решение которого даёт точную асимптотику интегральной итерации.

* * *

Пусть имеется уравнение $y = Ay$, в котором интегральный оператор A расщепляется на предельную и возмущённую части, так что $y = (A_0 + \varepsilon A_\varepsilon) y$. Если предельное решение $y_0 = A_0 y_0$ известно, то возмущённое решение естественно искать в виде $y_1 = y_0 + \varepsilon A_\varepsilon y_0$. Однако оператор A_ε не обязан вести себя хорошо на предельном решении, и фактически часто появляется расходимость, так что приходится раскрывать неопределённость вида 0·∞. При этом нужно возвращаться к допредельному выражению y, и задача снова завязывается. Но источник расходимости обычно локализован, поэтому возможно редуцировать завязку в окрестность точки расходимости. Тогда уравнение существенно упрощается и вновь раскрывается для асимптотического решения.

Рассмотрим для примера уравнение вида $y = y_0 + \varepsilon\int\limits_0^x \frac{d\tau}{y(\tau,\varepsilon)}$ (1) Если при τ→ 0 $y(\tau,0)\sim\tau^{\alpha}$, $\alpha > 1$, то интеграл расходится. Чтобы раскрыть неопределённость 0·∞, нужно знать структуру поведения $y(\tau,\varepsilon)$ в окрестности нижнего предела интегрирования. Пусть

$$y \sim \varphi(\varepsilon) + \tau^{\alpha}, \tag{2}$$

где искомая функция $\varphi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. В точке $\tau_* = \varphi(\varepsilon)^{1/\alpha}$ оба слагаемых имеют одинаковый порядок малости; при переходе через неё относительный вес этих членов меняется. Выделим тонкий переходный слой (τ_-, τ_+), полагая $\tau_- = o(\tau_*)$, $\tau_* = o(\tau_+)$, и оценим наш интеграл по этому слою. После замены $\tau = t\varphi(\varepsilon)^{1/\alpha}$ получим

$$\int\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}+\varphi(\varepsilon)} \sim (\varphi(\varepsilon))^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} k(\alpha), \qquad \text{где} \quad k(\alpha) = \int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^{\alpha}}.$$

Интегралы по «хвостам» оцениваются как величины меньшего порядка. Возвращаясь к интегральному уравнению (1), имеем теперь асимптотическое уравнение для функции $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi(\varepsilon)\sim\varepsilon(\varphi(\varepsilon))^{(1-\alpha)/\alpha}k(\alpha)$, откуда

$$\varphi(\varepsilon) = \left[\varepsilon k(\alpha)\right]^{\alpha/(2\alpha-1)}.$$

Таким образом, неопределённость раскрыта, и начало асимптотики найдено. Путь к разложению открыт.

В случае α = 1 расходимость становится логарифмической, и для $\varphi(\varepsilon)$ получается трансцендентное уравнение $\varphi(\varepsilon)\sim -\varepsilon\ln\varphi(\varepsilon)$, которое легко решается в виде $\varphi(\varepsilon)\sim-\varepsilon\ln\varepsilon$.

Вид функции $y(\tau,\varepsilon)$ при малых τ и ε может быть более сложным, чем в формуле (2). В работе [19] исследуется класс интегралов, в которых

$$y = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\varepsilon)\tau^{\alpha_k} + \tau^{\alpha}, \qquad \varphi_k(\varepsilon)\to 0, \qquad 0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n<\alpha..$$

Сопоставление отдельных членов суммы с τ^{α} выделяет n переходных слоёв, стремящихся к нижнему пределу интегрирования с разной скоростью. При этом главный вклад в асимптотику интеграла (1) в случае α > 1 даёт самый "медленный" переходный слой.

В конкретных физических задачах такой способ борьбы с расходимостью фактически уже применялся. Например, в работе [4] таким путём строится неравномерная асимптотика гиперзвукового течения газа в окрестности носка затуплённого тела и вблизи точки отрыва предельного слоя.

От асимптотических методов – к асимптотологии

11. Проблема определения

Н.Г. де Брёйн, начиная свою монографию [20] с вопроса «Что такое асимптотика?», замечает, что если пытаться отвечать на него достаточно точно, то «в наше определение или не войдёт многое из того, что стоило бы называть асимптотическими оценками, или войдёт почти весь математический анализ» (с.9). И автор не находит ничего лучшего, кроме фразы: «Вообще наиболее надёжным и отнюдь не самым неясным является следующее определение: асимптотические оценки – это раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и рассмотренные в этой книге» (с.9–10).

К.О.Фридрихс [21] называет асимптотическими явлениями все те, в которых есть разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т.д. М.Д. Крускал [22] определяет асимптотику как науку, которая имеет дело с асимптотическими оценками интегралов или решений дифференциальных уравнений и т.д. в различных предельных случаях. Однако Крускал вводит ещё термин «асимптотология», понимая под этим нечто более широкое, чем асимптотика, но включающее её. До дальнейшего уточнения он коротко определяет асимптотологию как искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях. Отмечая, что в этом искусстве накоплен большой опыт, Крускал призывает к тому, чтобы формализовать и стандартизировать этот опыт («неявное знание заслуживает явной формулировки»), чтобы превратить искусство асимптотологии в науку.

Таким образом, хотя чёткое определение асимптотического разложения давно существует, с определением асимптотических методов дело затянулось. Перечисление с многоточием вряд ли можно признать за удовлетворительное определение. Ясно, что асимптотические методы не ограничиваются теми оценками, которые уже формализованы. Но как определить то, что принадлежит скорее к сфере искусства (хотя и математического), чем науки? Должно ли это определение включать в себя ту степень неопределённости, которая характерна для асимптотического опыта?

Рассматривая ситуацию с самых широких позиций, мы можем констатировать, что любой исследуемый объект, вообще говоря, не является однородным. Существуют области резкого изменения количества: разрыв, излом, обращение в нуль или бесконечность и т.д. Переход количества в качество воспринимается как особенность, и такие области естественно выделяются как особые. Они могут быть точками, линиями, поверхностями и вообще некоторыми многообразиями размерности m. Пусть $m < n$, где n – число независимых координат и параметров рассматриваемого объекта. Асимптотическая ситуация возникает, когда исследуются окрестности особых многообразий, причём не фиксированные, а сжимающиеся. Явления, характерные для такого подхода, принято называть асимптотическими. Соответственно и методы, приспособленные для исследования таких явлений, тоже называются асимптотическими.

Эти определения, очевидно, не претендуют на строгость, ибо включают понятия особенности и характерности, в значительной мере условные. Действительно, какое изменение количества считать качественным и какое поведение – характерным, остаётся не вполне ясным. Однако эта условность, на наш взгляд, естественна, и её не следует устранять, если хотим ухватить суть асимптотического подхода. Она столь же естественна, как условность, присущая любому живому языку. М. Крускал закончил свою статью [22] следующими словами: «Один из героев Мольера заметил, что более 50 лет разговаривает прозой, не зная об этом. Несомненно, он извлёк пользу из этого открытия, но я надеюсь, что вы будете более счастливы и не разочаруетесь, открыв, что асимптотология есть то, в чём вы практиковались всё время».

Действительно, асимптотическими методами мы фактически пользуемся не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач и вообще в процессе познания мира. Хотя всё в природе взаимосвязано, связи эти неодинаковы, и благодаря этой неравномерности появляется возможность выделения и изучения относительно изолированных систем. Но сами системы можно рассматривать как особенности в мире всеобщей связи. А выделение их – локализация в пространстве отношений. Так что постановка задачи выглядит как локализация особенности, а уточнённая постановка – как исследование окрестности этой особенности.

«Асимптотическое описание является не только удобным инструментом математического анализа природы, но имеет и более глубокое значение», – утверждал К. Фридрихс [21]. «Асимптотический подход – больше, чем ещё один приближённый метод, а скорее играет фундаментальную роль», – вторит ему Л. Сегел [23].

Таким образом, асимптотическая методология не находит достаточно строгого определения в рамках классической математики, потому что сущность её не охватывается традиционной научной парадигмой.

12. Точность – локальность – простота

Попытаемся подойти к определению асимптотических методов с широких позиций, руководствуясь, прежде всего, критерием адекватности реальному объекту, не стремясь загонять его в прокрустово ложе традиционной парадигмы.

В качестве первого приближения проще всего назвать асимптотическими методами те, что приспособлены для исследования асимптотических явлений. Однако их содержание таким путём ещё не раскрывается. Цель асимптотического подхода заключается в упрощении предмета исследования. Это упрощение достигается за счёт уменьшения окрестности рассматриваемой особенности. Причём характерно, что вместе с такой локализацией возрастает и точность асимптотических представлений. Точность и простота обычно встречаются как понятия противоположные, дополнительные. Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью; добиваясь точности, не ждём простоты. Однако при локализации эти антиподы сходятся, противоречие разрешается, снимается в синтезе, имя которому – асимптотика [24].

Итак, суть асимптотических методов состоит в том, что они осуществляют синтез простоты и точности за счёт локализации: в окрестности некоторого предельного состояния находится упрощённое решение задачи, которое тем точнее, чем меньше эта окрестность. Как отмечал ещё Лаплас, асимптотические методы тем точнее, чем нужнее. Действительно, потребность в них появляется там, где глобальные методы не срабатывают, но именно там, в окрестности особенностей, они и наиболее эффективны.

Локализация – имманентное свойство асимптотической методологии, характеризующее её динамичность, подвижность, живость. Останавливая движение, мы замораживаем размеры области и тем самым ограничиваем возможности как упрощения, так и уточнения. Иными словами, простота и точность связаны соотношением дополнительности, а мерой неопределённости является величина области. Такое соотношение имеет место для каждой пары из этих трёх компонент асимптотики, а третий параметр всегда выступает в роли регулятора.

Действительно, пусть имеется разложение функции f(x) по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),\quad x\to 0$$

Частную сумму этого ряда обозначим через $S_N(x)$, а точность аппроксимации будем характеризовать величиной $\Delta_N(x)=|f(x)-S_N(x)|$. Простота характеризуется здесь числом N, локальность – длиной интервала x. Рассмотрим попарно взаимосвязь величин x, N, Δ, опираясь на известные свойства асимптотических разложений. При заданном малом значении x разложение вначале сходится, так что точность и простота в какой-то мере совмещаются. Если зафиксировать N, то конкурентами становятся точность и величина области. А при заданном значении Δ простота достигается тем легче, чем меньше область.

Проиллюстрируем эти закономерности на примере. Рассмотрим интегральную показательную функцию

$$Ei(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\xi}\xi^{-1}\mathrm{d}\xi, \quad y < 0$$

Интегрируя по частям, получаем следующее асимптотическое разложение

$$Ei(y) \sim e^{y}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!\,y^{-n}, \quad y \to -\infty$$

Положим $f(x) = -e^{-y}Ei(y)$, $y = -x^{-1}$. Вычисляя частные суммы этого ряда, величину $\Delta_N(x)$ и значения $f(x)$ для разных значений x, составим таблицу:

x	$f(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
1/3	0.262	0.071	0.040	**0.034**	0.040	0.060	0.106	0.223
1/5	0.171	0.029	0.011	0.006	0.004	**0.0035**	0.0040	0.0043
1/7	0.127	0.016	0.005	0.002	0.001	0.0006	0.0005	**0.0004**

Видно, что при фиксированном x с ростом N точность сначала улучшается, а затем становится хуже, как и должно быть в силу расходимости. Эта *сходимость вначале* проявляется тем сильнее и дольше, чем меньше x. Заданная точность при фиксированном х если и достигается, то лишь на некотором конечном интервале N. Чем выше требования к точности, тем меньше область x, где она достижима. Таким образом, три величины: Δ, x, N, характеризующие соответственно точность, локальность и простоту асимптотики, связаны попарно соотношениями дополнительности [25]. Согласованное взаимодействие этих трёх компонент образует очевидную целостность. Следовательно, триаду ***точность-локальность-простота*** можно рассматривать как определение асимптотической методологии [26].

13. Системные триады

Тройственная структура дефиниции асимптотических методов отнюдь не случайна [27]. Стандартная процедура определения через указание рода и видового отличия работает лишь на пути дифференциации. При выходе в новые области семантического пространства целостная сущность выделяется путём интеграции. А минимальной ячейкой синтеза является как раз тернарная структура [28], причём не любая, а именно системная, которую следует отличать от вырожденной (одномерной) и переходной (гегелевской). Системная триада образуется равноправными элементами одного уровня общности.

Особого внимания заслуживает общее семантическое свойство системных триад, связанное со способностью человека мыслить одновременно и понятиями, и образами, и символами. Оно проявляется во всех основополагающих открытиях науки, в гениальных произведениях искусства, в жизнеспособных религиях мира. Одна компонента системной триады всегда представляет аналитическое начало (рацио), другая – качественное (эмоцио), третья – субстанциальное (интуицио). Например, истина-красота-добро, ум-чувство-воля, тело-душа-дух. Этот смысловой архетип замечали и раньше. В середине XIX века князь В.Ф. Одоевский отчётливо представлял, что в человеке слиты три стихии: познавательная, эстетическая и верующая, так что в основу философии должны быть положены не только наука, но также искусство и религия. «В целостном соединении их и заключается содержание культуры, а их развитие образует смысл истории» [29, с.151].

Семантическая формула системной триады ***рацио-эмоцио-интуицио*** позволяет изучать и образовывать целостные структуры, целенаправленно ориентируясь в трёхмерном смысловом пространстве. При этом целостность обеспечивается динамическим балансом тернарных отношений.

Плодотворная дефинитивная функция системной триады показана в работе [27]. Так, понятие системы может быть задано триадой элементность-связанность-целостность. Ценность – это польза-радость-правда. Обоснование складывается из объяснения факта, интерпретации поведения и оправдания поступка. А асимптотология есть синтез точности (рацио), локальности (эмоцио) и простоты (интуицио).

14. Асимптотика и синергетика

Синергетика как теория самоорганизации может быть определена триадой нелинейность-когерентность-открытость [30], где когерентность понимается как такая согласованность взаимодействия элементов, которая проявляется на уровне всей системы, а открытость подразумевает обмен веществом, энергией и информацией в пространстве, времени и масштабе, причём обмен не полностью контролируемый. Открытость синергетики гармонирует с мягкостью асимптотологии [31, 32]. Их роднит динамизм методов, устремлённых к жизни: от предела – к приближению, от бытия – к становлению, от полноты – к целостности [33, 34].

Центральная проблема, объединяющая асимптотику с синергетикой, - переходные слои. В синергетике они возникают между масштабными уровнями, на которых достигается относительно гомогенная целостность. Например, между молекулярным (микро), населённым атомными частицами, и континуальным (макро), где рассматривается сама система. В переходном слое происходит перестройка картины мира с одного масштаба на другой. Здесь встречаются разные законы, действуют смешанные языки, рождаются новые смыслы.

В асимптотологии переходные слои – неизбежное следствие упрощающей локализации. Простые асимптотики достигаются лишь в ограниченных областях. Неравномерность асимптотических разложений – не исключение, а суровая повседневность. Отсюда актуальность методов связывания, сращивания, соединения асимптотик в переходном слое. Но методология, направленная лишь на переход сквозь слой, на преодоление препятствия, не ищет и не ждёт от слоя ничего самородного.

Синергетический подход помогает выйти из тупика, в котором мы оказываемся при исчезновении малого параметра в переходном слое. Если вместо погони за точностью аппроксимации ставить задачи на оптимизацию перехода, то можно восстанавливать асимптотичность метода и по этому мостику выходить к новым смыслам. Различение горизонтальных, вертикальных и внешних слоёв, достигнутое в синергетике [35], расширяет поле деятельности и для асимптотологии.

В свою очередь, асимптотический взгляд на переходные слои в синергетике даёт возможность количественной оценки толщины слоя. Кроме того, существует разработанный аппарат теории катастроф, пригодный для изучения структуры полифуркаций. Наконец, имеется богатый опыт актуализации бесконечности, опыт работы в абстрагирующем постреальном слое, опыт осмысления внешних границ.

Таким образом, совместное исследование асимптотики и синергетики даёт возможность сопоставить подходы, обменяться опытом и обогатить постановку задач.

15. Кризис парадигмы

Синергетика обретает сейчас статус вестника новой парадигмы [36]. Разрешая фундаментальную оппозицию *порядок-хаос* через творчество саморазвития, она вводит в научный обиход представление о неоднозначности путей эволюции, о неполноте бытия, об открытой методологии [37].

Традиционные для классической науки требования определённости, объективности, полноты позволили достичь значительных успехов в познании неживой природы. Однако в биологии, психологии, социологии мы имеем дело с объектами, при изучении которых требуется иной подход. Полнота здесь недостижима, субъективный фактор становится естественным и неизбежным, неопределённость оказывается повсеместной и закономерной.

Допущение неопределённости, сделанное в физике, распространилось на остальные науки в виде принципа дополнительности. Однако привычка к детерминизму оказалась столь сильной, что убежища его сохраняются по сей день и надежда на *скрытые параметры* продолжает питать умы приверженцев классической парадигмы. В своём стремлении к идеалу полноты и точности традиционная наука отрывалась от реальной жизни с её гибкостью, открытостью, свободой воли. И оказалась банкротом перед лицом глобального кризиса, не сумев ни предсказать, ни разрешить назревшие проблемы. Кризис заставляет признать, что для изучения жизнеспособных, органических, развивающихся объектов нужна иная методология, новая парадигма.

Отставая от жизни, наука всё же стремится осознавать происходящие изменения. Обнаружив необходимость переосмысления понятия рациональности [38], философы начали понимать, что приходится иметь дело «с новым типом сложности, связанным с человеческой интуицией и человеческими эмоциями» [36, с.70]. Идеал полноты стал уступать место идеалу целостности [33,34].

Ситуация кризиса угрожает новыми опасностями, но и обещает новые возможности, которые надо успеть увидеть, осознать, использовать. И прежде всего, надо поверить в их существование. Наука XVII – XX веков не стала бы открывать законы естествознания, если бы не доверяла Природе. Пора распространить область доверия на ноосферу, сферу разума и духа, пространство смыслов [39].

16. На пути к мягкой математике

Знаменем классической парадигмы был рационализм, опирающийся на математику, которая исправно служила строгим критерием научности, отметая всякую мистику. Но, вторгаясь в сложную реальность скальпелем абсолютной точности, математика превращала живую натуру в абстрактную модель, порождая тем самым чудовища формализма, не менее опасные, чем химеры мистики [40, с.199].

Научные успехи Нового времени возвели математику на пьедестал высшей истины и породили иллюзию достижения совершенства. На рубеже XX века Д. Гильберт запланировал «окончательное выяснение сущности бесконечного», считая его «необходимым для чести самого человеческого разума» [41, с.341]. Крушение иллюзий началось в 1931 г. с теоремы К. Гёделя о неполноте формальных систем, а завершающее решение проблемы континуума, данное в 1963 г. П. Коэном, означало подрыв двузначной логики, ибо на вопрос, заданный в форме *либо-либо*, ответ получился в виде *ни-ни*. Программа Гильберта провалилась и «рай Кантора» стал превращаться в ад. Многозначные логики, нечёткие множества и теория вероятностей, спасая престиж математики, фактически уходили от существа проблемы, так как, оказавшись перед онтологической неточностью, описывать её стремились всё равно точно.

Потребность в *очеловечивании* математики возникает как *ересь*. А. Гротендик, обнаружив, что страсть к математике уводит от реальности, отдаляя от загадок человеческой души [42], вышел из группы Бурбаки. Р. Пенроуз, установив *невычислимость сознания*, говорит о необходимости новой физики [43]. Р. Хирш настаивает на включении математики в гуманитарную культуру [44].

Размышляя над теоремой Гёделя, А.Н. Паршин в ответ на иронические слова П. Коэна «Жизнь была бы гораздо *приятнее*, не будь гильбертова программа потрясена открытиями Гёделя», решительно заявляет: «Если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, её просто не было бы» [45, с.94]. И продолжает: «Должна существовать теорема Гёделя и в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах» (с.109).

Идея *мягкой математики* всё более обнаруживает свою привлекательность. Гуманитаризация математики обсуждается как тенденция развития современной науки [46]. Приобщение математики к *мягким наукам* видится как заманчивая перспектива за Геркулесовыми столбами жёстких канонов [47, 48]. *Мягкое исчисление* рассматривается как маркер новой парадигмы [49].

Как это часто бывает, искомое новое обнаруживается в затёртом старом. Требуется лишь посмотреть на него свежими глазами. Асимптотические методы сто лет терпеливо, как Золушка, трудились на кухне классической математики, униженные комплексом неполноценности. Отдавая им должное как искусству [50, 51], в настоящую науку их всё же не пускали: не позволяла неустранимая неточность. И вот в конце XX века этот *гадкий утёнок* неодолимо вырастает в *лебедя* новой парадигмы [52, 53, 54]. В нём есть всё, что искали: мягкость, гибкость, открытость. И контролируемая оценка точности. Правда, точность в конечной области всегда ограничена. Но это неизбежная плата за сохранение целостности, воплощаемой в балансе точности, локальности и простоты.

В классической математике x фиксировано, $N \to \infty$ и говорится о сходимости; в асимптотической математике N фиксировано, $x \to 0$ и говорится об эффективности приближения, выражающейся в оптимальном сочетании простоты и точности. Греческий термин asymptotos означает *несовпадающий*, подчёркивая тем самым, что асимптотическое приближение не превращается в совпадение. Также и целостность не превращается в полноту. Динамизм, на котором держится неустойчивая, нелинейная, недетерминированная жизнь, разрешает тупиковые противоречия отмирающей парадигмы, жертвуя несуществующей полнотой, но сохраняя сущностную целостность. В новую парадигму целостность приходит через синергетику, в математику – через асимптотологию.

Литература

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963. 244 с.
2. Баранцев Р.Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 216 с.
3. Баранцев Р.Г. Гиперзвуковая аэродинамика идеального газа. Л.: изд-во ЛГУ, 1983. 116 с.
4. Баранцев Р.Г., Энгельгарт В.Н. Асимптотические методы в гиперзвуковой аэродинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 88 с.
5. Баранцев Р.Г. Аналитические методы в динамике разреженных газов // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Том 14. М.: ВИНИТИ, 1981, с. 3-65.
6. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 344 с.
7. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне; т. 1, 1974, 390 с.; т. 2, 1977, 464 с.; 1981, т. 3, 370 с.
8. Риекстыньш Э.Я. Оценки остатков в асимптотических разложениях. Рига: Зинатне, 1986. 360 с.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
10. Фреман Н., Фреман П.У. ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. 168 с.
11. Martin P., Baker G.A. Jr. Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error// J. Math. Phys., 1991, т. 32, № 6, с. 1470-1477.
12. Баранцев Р.Г. Асимптотические итерации с расширением области действия // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1974, вып. 6, с.138-140.
13. Баранцев Р.Г. Метод разделения переменных в волновой задаче с произвольной границей // Вестник ЛГУ, 1965, № 1, с. 66-76.

14. Баранцев Р.Г. Асимптотическое разделение переменных //Асимптотические методы в теории систем, Иркутск, 1990, с.107-113.
15. Баранцев Р.Г., Горбунова Е.Г. Асимптотика коэффициентов Фурье в смешанной задаче для линейного квазиволнового уравнения // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1994, ч.1, с. 29-33.
16. Баранцев Р.Г., Радзевич С.Б. Асимптотическая постановка задач о колебаниях крыла в трансзвуковом потоке на различных интервалах частот // Асимптотические методы в динамике систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1985, с. 174-178.
17. Шамровский А.Д. Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. Запорожье: Изд-во Запорожской государственной инженерной академии, 1977. 170 с.
18. Баранцев Р.Г., Энгельгарт В.Н. Асимптотические методы в механике жидкости и газа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 89 с.
19. Баранцев Р.Г., Распорский В.А., Энгельгарт В.Н. Интегралы, возникающие в методе асимптотических итераций // Вестник ЛГУ, 1981, №19. С.106-108.
20. Брёйн Н.Г. де. Асимптотические методы в анализе. М.: Наука, 1961. 248 с.
21. Фридрихс К.О. Асимптотические явления в математической физике // Математика (сб. переводов иностр. статей), 1952, №2, с.79-84.
22. Kruskal M.D. Asymptotology// Proceedings of Conference on Mathematical Models on Physical Sciences. Englewood Cliffs, HJ: Prentice-Hall, 1963 c. 17-48.
23. Segel L.A.The importance of asymptotic analysis in Applied Mathematics// Amer. Math. Monthly, 1966, т. 73, с.7-14.
24. Баранцев Р.Г. Об асимптотологии // Вестн. Ленингр. ун-та, 1976, № 1, с. 69-77.
25. Баранцев Р.Г. Принцип неопределённости в асимптотической математике // Методы возмущений в механике. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1984, с.107-113.
26. Баранцев Р.Г. Дефиниция асимптотики и системные триады // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1980, с.70-81.
27. Баранцев Р.Г. Системная триада дефиниции // Международный форум по информации и документации. М.: 1982, т.7, № 1, с. 9-13.
28. Баранцев Р.Г. Системная триада – структурная ячейка синтеза //Системные исследования. Ежегодник 1988. М.: 1989, с. 193-210.
29. Зеньковский В.В. История русской философии. Л.: Эго. 1991, т.1, ч.1. 221 с.
30. Баранцев Р.Г. Нелинейность-когерентность-открытость как системная триада синергетики // Мост, 1999, № 29, с. 54-55.
31. Баранцев Р.Г. Асимптотика и синергетика // Современные проблемы механики. М.: МГУ, 1999, с. 19-20.
32. Баранцев Р.Г. Синергетика и асимптотика // Полигнозис, 2000, № 4, с.135-137.
33. Баранцев Р.Г. От полноты – к целостности // Проблемы цивилизации, СПб: 1992, с.5-11.
34. Баранцев Р.Г. Целостность против полноты // Русская философия и современный мир. СПб: 1995, с. 29-31.
35. Баранцев Р.Г. Имманентные проблемы синергетики // Вопросы философии, 2002, № 9, с. 91-101.
36. Синергетическая парадигма. М.: Прогресс-Традиция, 2000. 536 с.
37. Баранцев Р.Г. Открытым системам – открытые методы // Синергетика и методы науки. СПб: 1998, с. 28-40.
38. Рациональность на перепутье. М.: РОССПЭН. 1999, кн.1, 368 с.; кн. 2, 464 с.
39. Налимов В.В. Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. М.: Прогресс–Традиция, 2000. 344 с.

40. Свасьян К.А. Становление европейской науки. Ереван: 1990. 377 с.
41. Гильберт Д. Основания геометрии. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. 492 с.
42. Гротендик А. Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика. М.-Ижевск Регулярная и хаотическая динамика. 2002. 288 с.
43. Penrose R. Shadows of the mind: A search for the missing science of consciousness. Oxford: Oxford University Press, 1995. 457 c.
44. Hersh R. What is Mathematics, Really? Oxford: Oxford University Press, 1997. 343 c.
45. Паршин А.Н. Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии, 2000, № 6, с. 92-109.
46. Панов М.И. Гуманитаризация математики – тенденция развития науки XX века: (можно ли считать математику сплавом культуры, философии, религии?). Обзор // РЖ, сер.3, философия, 1991, № 6,с. 21-30.
47. Davis Ph. Beyond the pillars of Hercules: Soft mathematics // SIAM News, 1998, № 6.
48. Devlin K. Goodbye, Descartes: The End of Logic and the Search for a New Cosmology of the Mind. N.Y.: 1997. 320 c.
49. Кондратьев В.Г., Солодухина М.А. Мягкое исчисление как новая парадигма. Обзор // РЖ, сер.3, философия, 2000, № 3, с. 34-41.
50. Kruskal M.D. Asymptotology// Proceedings of Conference on Mathematical Models on Physical Sciences. Englewood Cliffs, HJ: Prentice-Hall, 1963 c. 17-48.
51. Бабич В.М., Булдырев В.С. Искусство асимптотики // Вестн. Ленингр. ун-та, 1977, № 13, с. 5-12.
52. Barantsev R.G. Asymptotic versus classical mathematics // Topics in Math. Analysis. Singapore e.a.: 1989, c.49-64.
53. Баранцев Р.Г. Перспективы асимптотической математики // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л.: 1990, с. 108-120.
54. Баранцев Р.Г. Неизбежность асимптотической математики // Математика. Компьютер. Образование. М.: 2000, т.7, ч. 1. с. 27-33.

Статья поступила в редакцию 30 марта 2011 г.