

МЕТОД РАСЧЕТА СТРУЙ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ ПРИ СТАРТЕ

Сафронов А.В. (a_safron@korolev-net.ru)

ЦНИИМАШ, г. Королев, Моск. обл.

Разработан экономичный метод расчета сверхзвуковых неизобарических затопленных осесимметричных струй ракетных двигателей с учетом вязко-невязкого взаимодействия турбулентного слоя смешения с ударно-волновым ядром струи и догорания горючих компонент, содержащихся в истекающих газах. Применен зональный подход на базе стыковки параболизированных уравнений Навье-Стокса, представляющих течение в сверхзвуковой неизобарической зоне струи, и уравнений пограничного слоя, описывающих течение в дозвуковой изобарической части слоя смешения. Особенности алгоритма являются способ стыковки локальных решений, позволяющий проводить выделение границ расчетной области исходя из локальных градиентов параметров, а также решение уравнений с помощью монотонной схемы второго порядка аппроксимации. Результаты подтверждены сравнением расчетов параметров изобарических и неизобарических струй продуктов сгорания топлива с экспериментальными данными.

The mathematical model of account of the supersonic not isobaric flooded axisymmetrical jets of rocket engines with allowance for interaction of a turbulent stratum of merging with a shock - wave nucleus of a jet and burning of combustible components contained in expiring gases represented. The economic zone approach on basis of a docking the Navier-Stokeses equations representing current in a supersonic not isobaric zone of a jet, and equations of a boundary layer circumscribing current in subsonic isobaric of a part of a stratum of merging is offered. Features of algorithm are a solution of the equations with the help of monotone scheme of the second order of approximation, and also a method of a docking of local solutions permitting to conduct selection of the boundaries of settlement area during calculations, proceeding from local gradients of parameters.

Введение

Газодинамика струйных течений определяет облик стартового сооружения, отводящего высокотемпературные газы от изделия и подвергающегося интенсивному силовому и тепловому воздействию. Струйные течения при старте характеризуются ударно-волновой структурой в ядре струи и турбулентным смешением газов истекающей струи

с воздухом. Процесс турбулентного смешения приводит к постепенному выравниванию давления в струе и сопровождается догоранием топлива.

Разработка методов расчета затопленных неизобарических струй осложняется тем, что наряду со сверхзвуковым ударно-волновым ядром струи, значительную часть слоя смешения занимает область с дозвуковыми скоростями, в которой задача становится эллиптической (см. рис. 1). В общем случае, расчет таких течений необходимо проводить в рамках уравнений Навье-Стокса, решаемых методом установления. Однако, большое расхождение в величинах линейных масштабов (протяжённость расчетной области составляет многие десятки калибров струи) и параметров течения в различных зонах приводит в этом случае к значительным затратам машинного времени. Кроме того следует отметить проблему корректной постановки условий на свободных границах расчетной области, где возникает дозвуковой входящий поток в связи с процессом эжекции при истечении турбулентной струи.

Более экономичным является раздельный расчет течений в разных зонах (зональный подход) с помощью соответствующих моделей и алгоритмов, позволяющих решать задачу эволюционными (маршевыми) численными методами. Решение для всей рассматриваемой области получается стыковкой решений в отдельных зонах. Основными допущениями, принимаемыми для достижения эволюционности задачи, являются исключение вязкого переноса количества движения и энергии в продольном направлении, а также не учет возмущений, передаваемых через давление вверх по потоку в дозвуковых зонах. Эффективность зональных методов определяется адекватностью моделей в каждой из зон, а также способами стыковки локальных решений.

В ряде практических задач, например, для расчета параметров в дальнем поле сверхзвуковой неизобарической струи или для расчета сверхзвуковых изобарических струй применяется модель на базе уравнений пограничного слоя, позволяющая использовать маршевые конечно-разностные методы [1]. Этот подход требует небольших затрат машинного времени, а следовательно, дает возможность более точного моделирования процессов турбулентного смешения, физико-химических превращений, движения частиц в турбулентном потоке и т.п., чем в моделях учитывающих неизобаричность течения. Обзор литературы и важные результаты работ в этой области содержатся в [2].

Для расчета параметров в ближнем поле неизобарической струи используется подход с разделением течения на перекрывающиеся зоны: сверхзвуковое невязкое внутреннее течение и турбулентный слой смешения. Влияние переменных градиентов давления в слое смешения учитывается по расчетам в невязкой области [3,4].

В настоящей работе развивается подход, предложенный в работах [5,6], с разделением течения в струе на сверхзвуковую и дозвуковую зоны. Данный подход применим для расчета всего поля струи. Для достижения эволюционности задачи принимается допущение о постоянстве давления в дозвуковой части слоя смешения. Течение в сверхзвуковой неизобарической зоне струи рассчитывается на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса (ПУНС). Течение в дозвуковой части слоя смешения описывается уравнениями пограничного слоя (УПС).

В модели [5] принимается допущение о постоянстве температуры торможения во всем поле течения, что ограничивает область использования расчетом только «холодных» струй. Кроме этого, уравнения решаются в неконсервативном виде, что приводит к проблемам при расчете задач с разрывами. В работе [5] эти проблемы снимаются введением искусственной вязкости с «размазыванием» разрыва на ~ 30 ячеек сетки, что влечет за собой использование количества узлов сетки на порядок больше чем при консервативной форме уравнений.

В работе [6], уравнения решаются в консервативном виде, однако используется численная схема Мак-Кармака имеющая осцилляции при сквозном счете разрывов. Кроме того, выделение внешней границы расчетной области проводится с помощью приближенных соотношений.

В настоящей работе используется монотонная численная схема 2-го порядка аппроксимации на основе приближенного решения задачи распада стационарного разрыва (о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков) [7].

Предложены процедура стыковки локальных решений и метод решения уравнений пограничного слоя позволяющие вычислять положение внешней границы расчетной области исходя из локальных градиентов течения.

Для расчета процессов догорания в струе используется упрощенная равновесная химическая модель. Влияние изменения состава на давление учитывается на основе простой модели диффузионного факела без учета диссоциации [5]. Температура потока и теплофизические характеристики определяются с помощью экстраполяции из табличных значений, полученных расчетами по программе "Астра" [8] для равновесных смесей продуктов сгорания рассматриваемого топлива с воздухом. При этом достигается существенная экономия машинного времени связанная с исключением необходимости решения нелинейной системы уравнений в каждой ячейке сетки с полным учетом химических реакций.

На основе стыковки результатов расчетов зависимостей длин начального и сверхзвукового участка турбулентных струй от числа Маха на срезе сопла с экспериментальными данными различных авторов, предложен выбор эмпирического коэффициента, связывающего масштаб турбулентного вихря ("пути смешения") с толщиной слоя смешения в модели турбулентной вязкости Прандтля.

Приведены сравнения результатов расчетов параметров неизобарических струй продуктов сгорания топлива с экспериментальными данными.

Физическая и математическая модели

При расчете используется система координат (x, η) , где $\eta = y / \varphi(x)$, $\varphi(x)$ - внешняя граница слоя смешения (рис.1). Основные уравнения запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \nu \frac{G}{\eta} = \frac{1}{\eta^\nu} \frac{\partial(\eta^\nu B)}{\partial \eta} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \varphi \hat{E}, & F &= \hat{F} - \eta \varphi' \hat{E}, & B &= \frac{\mu}{\sigma_f} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \hat{E} &= \{\rho U, \rho U^2 + \omega P, \rho UV, \rho UH, \rho U\Phi\}^T, \\ \hat{F} &= \{\rho V, \rho UV, \rho V^2 + P, \rho VH, \rho V\Phi\}^T, \\ G &= \{\rho V, \rho UV, \rho V^2, \rho VH, \rho V\Phi\}^T, \\ f &= \{1, U, V, H + (Pr-1)U^2/2, \Phi\}^T, \\ \sigma_f &= \{1, 1, 3/4, Pr, Pr\}^T, \end{aligned}$$

здесь $\rho, U, V, H, \Phi, \mu, Pr$ – плотность, компоненты скорости по оси x и y , полная энтальпия, массовая концентрация газа струи, турбулентная вязкость, число Прандтля; $\nu = 0, 1$ для плоского или осесимметричного случаев соответственно.

Граничные условия на внешней границе имеют вид:

$$U = U_e, \quad P = P_e, \quad H = H_e, \quad \Phi = 0, \quad \partial U / \partial y = 0, \quad \text{при } y = \varphi(x) \quad (2)$$

На оси x задаются условия симметрии:

$$V = 0, \quad \partial U / \partial y = 0, \quad \partial P / \partial y = 0, \quad \partial H / \partial y = 0, \quad \partial \Phi / \partial y = 0, \quad \text{при } y = 0 \quad (3)$$

Здесь индекс "е" относится к параметрам внешней среды.

Уравнения (1) замыкаются уравнением состояния, выражениям для полной энтальпии, моделью турбулентной вязкости, а также соотношениями, определяющими состав смеси.

Полная энтальпия определяется следующим образом:

$$H=h+U^2/2+\omega V^2/2, \quad (4)$$

$$h = \sum \alpha_j h_j(T), \quad h_j = \int_0^T C_{pj}(T) dT + h_j^0, \quad (5)$$

где h - статическая энтальпия смеси,

α_j , h_j , h_j^0 , C_{pj} - массовая концентрация, статическая энтальпия, энтальпия образования, теплоемкость j -ой компоненты соответственно.

Зависимости энтальпий и теплоемкостей компонент от температуры аппроксимируются полиномами из справочника [9].

Уравнение состояния используется в виде:

$$P=\rho RT, \quad (6)$$

$$R=\sum \alpha_j R_j$$

где T - температура,

R - газовая постоянная смеси,

R_j - газовые постоянные компонент,

С учетом уравнений (4-6) приращение давления определяется следующим образом:

$$dP = \frac{P}{\rho} d\rho + \frac{R}{C_p - R} (dh - U dU - V dV) - Z P d\Phi \quad (7)$$

здесь

$$C_p = \sum \alpha_j C_{pj},$$

$$Z = \sum \frac{\partial \alpha_j}{\partial \Phi} \left(\frac{h_j}{C_p T} - \frac{R_j}{R} \right), \quad (7a)$$

где C_p - теплоёмкость смеси.

Для расчета влияния изменения состава, связанного с процессами догорания в струе, используется упрощенная равновесная химическая модель. На первом этапе, рассчитывается энтальпия смеси и концентрация газа струи, на основе простой модели диффузионного факела [5]. Модель [5] основана на стехиометрических соотношениях реакций горения водорода (H_2) и окиси углерода (CO) без учета диссоциации, причем для определения состава смеси достаточно только значения концентрации газа струи. В этом приближении рассчитывается влияние изменения состава на приращение давления (7) через параметр Z (7a). Затем определяются температура потока, газовая постоянная теплоём-

кость смеси с помощью экстраполяции из их табличных зависимостей от энтальпии смеси и концентрации газа струи, полученных по программе "Астра" [8] для смесей продуктов сгорания рассматриваемого топлива с воздухом. В основу алгоритма программного комплекса "Астра" положен универсальный термодинамический метод определения характеристик равновесия произвольных гетерогенных систем, основанный на принципе максимума энтропии.

Применимость такого упрощённого подхода связана с тем, что в расчетах параметров струи участвует статическая температура, погрешность расчета которой на фронте факела без диссоциации в условиях старта ракет составляет 10-15% по сравнению с равновесной моделью учитывающей диссоциацию. При этом достигается существенная экономия машинного времени связанная с исключением необходимости решения нелинейной системы уравнений в каждой ячейке сетки в случае полного учета химических реакций.

Параметр ω равен единице для сверхзвуковой области. В этом случае уравнения (1) представляют собой ПУНС. Для дозвуковой зоны ω равно нулю, давление принимается равным давлению внешней среды, из решения исключается уравнение сохранения импульсов в поперечном направлении и уравнения (1) переходят в УПС.

Алгоритм решения УПС и стыковки решений основан на вычислении поперечной компоненты скорости V в изобарической дозвуковой зоне струи (см. рис.1) с помощью уравнения полученного подстановкой в уравнение неразрывности градиентов $\partial p/\partial x, \partial p/\partial y, \partial U/\partial x$, определяемых с помощью соотношения (7) (при $dP=0$) из уравнений сохранения продольного импульса и энергии системы (1).

Уравнение для вычисления скорости V в дозвуковой зоне имеет вид:

$$\rho U \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \frac{V}{U} \right) = - \frac{1 + (\gamma - 1) M^2}{U} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) - Z \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^v}{Pr} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{C_p T} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^v \mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(H + \frac{Pr - 1}{2} U^2 \right) \right], \quad (8)$$

где M - число Маха.

Аналогичное соотношение, полученное при допущении о постоянстве температуры торможения, используется в работе [5] в дозвуковой зоне вместо уравнения неразрывности.

Компонента скорости V в дозвуковой зоне (вплоть до значения V_e на границе струи), вычисляется с помощью уравнения (8) от значения на границе сверхзвуковой зо-

ны (рис.1), которое определяется из ближайшей ячейки сетки сверхзвуковой зоны решением модельной задачи о повороте сверхзвукового потока при заданном перепаде давлений. В случае, когда звуковая линия достигнет оси струи, или в расчете изобарических струй, вычисления V -компоненты проводятся от оси струи, на которой $V=0$.

В расчете струйных течений одним из определяющих факторов является модель турбулентной вязкости. Как показал анализ, проведенный в работе [10], различные модели, в том числе и 2-х параметрические требуют соответствующих поправок или подбора констант для адекватного описания процессов турбулентного смешения в струях в диапазоне изменения числа Маха $Ma=1\div 5$. Соответствующая поправка внесена в работе [5] также для известной однопараметрической дифференциальной модели [11]. Вместе с этим, физически информативным параметром в струйных течениях является толщина слоя смешения (рис.1), вычисляемая в процессе расчета. Поэтому оказался приемлемым более простой подход на базе модели Прандтля с соответствующим подбором эмпирического коэффициента, связывающего масштаб турбулентного вихря ("пути смешения") с толщиной слоя смешения:

$$\mu = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (9)$$

где путь смешения ℓ линейно зависит от толщины слоя смешения:

$$\ell = \beta \delta \quad (10)$$

Толщина слоя смешения определяется как расстояние между точками в которых функция Φ/Φ_m (Φ_m - значение концентрации газа струи Φ на оси) принимает значение 0.05 и 0.95 :

$$\delta = (y_{0.05} - y_{0.95}) \quad (11)$$

Как известно [2], по мере увеличения числа Маха потока происходит заметное уменьшение интенсивности смешения, а толщина слоя смешения сокращается. При удалении от среза сопла, скорость течения и число Маха уменьшается, поэтому эмпирический коэффициент β различен для ближнего и дальнего поля струи, изменяясь в диапазоне 0.05÷ 0.08 [2].

Рассмотрим более детально выбор коэффициента модели Прандтля.

В качестве опорных данных для подбора коэффициента модели Прандтля приняты зависимости длин начального и сверхзвукового участков изобарических струй от числа Маха, которые получены обобщением многочисленных экспериментальных данных в работах [15-17].

Согласно [11] область течения разбивается на три участка, в каждом из которых по-своему определяется коэффициент β :

$$\beta = \begin{cases} \beta_1(M_a), & x \leq x_H, \\ \beta_2 = (2 - x/x_H)\beta_1 + (x/x_H - 1)\beta_3, & 2x_H > x > x_H \\ \beta_3 = 0.08, & x \geq 2x_H \end{cases} \quad (12)$$

где x_H - длина начального участка струи (рис. 1).

Зависимость коэффициента $\beta_1(M_a)$, используемая в модели турбулентной вязкости, на начальном участке струи, полученная с помощью стыковки результатов расчетов с экспериментальными данными [16,17] дана в табл.1.

Табл.1 Зависимость коэффициента модели Прандтля от числа Маха на срезе.

M_a	0	1	2	2.5	3	4	5
β_1	0.0742	0.069	0.056	0.0525	0.051	0.047	0.045

Промежуточные значения определяются линейной экстраполяцией.

На рисунке 2 приведено сравнение результатов расчетов длин начального (X_n) и сверхзвукового (X_s) участков «холодной» ($T_0=300K$) изобарической струи с эмпирическими зависимостями работ [16-17]- X_n , [15]- X_s . Как видно модель (9-12), табл.1 описывает экспериментальные данные.

При расчете неизобарических струй в зависимость табл.1 подставляется число Маха M_j на срезе эквивалентного по расходу, импульсу и теплосодержанию расчетного сопла.

Таким образом, выбор коэффициента пути смешения β в модели турбулентной вязкости (9-10) заключается в формуле (12) и данных табл.1.

Определение компоненты скорости V_e (скорости эжекции) на внешней границе слоя смешения с помощью уравнения (7), в котором отсутствуют продольные градиенты параметров, дает возможность вычислять в процессе счета изменение внешней границы струи до получения параметров на следующем шаге счета.

Формула для вычисления изменения внешней границы слоя смешения $\varphi(x)$ полученная аналогично [12] из аппроксимации уравнения сохранения продольного импульса в граничных точках с учетом граничных условий $\partial U / \partial y = 0$ и $U=U_e$ имеет вид:

$$d\varphi/dx = V_e/U_e + 2\mu_{im-1/2}/(\rho_e U_e \Delta y) \quad (14)$$

здесь $i=im$ в крайнем узле сетки, V_e - скорость эжекции, ρ_e, U_e -плотность и скорость внешней среды, Δy – размер ячейки сетки по оси y , $\mu_{im-1/2}$ – вязкость на грани ячеек im и $im-1$,

$$\mu_{im-1/2} = \rho_e \ell^2 \left| \frac{U_e - U_{im-1}}{\Delta y} \right|$$

Следует отметить, что граничное условие $\partial U / \partial y = 0$ при $y = \varphi(x)$ используется в работе [7] и в настоящей работе наряду с применением модели турбулентной вязкости Прандтля (9). В случае иной модели, например «новой» модели Прандтля $\mu \sim \rho \delta (u_{\max} - u_{\min})$ граничное условие имеет вид $u = u_e$ при $y \rightarrow \infty$. См. аналитические решения Толмина и Гертлера для слоя смешения [2]. В решении Толмина с моделью (9) и условием $\partial U / \partial y = 0$ при $y = \varphi(x)$, положение границы определено однозначно.

В работе [6] уравнение типа (8) не используется, поэтому в расчетном сечении V_e не известно, в этой связи положение внешней границы задаётся из приближенных соотношений, а V -компонента скорости в дозвуковой зоне находится из уравнения неразрывности после определения плотности и продольной скорости на следующем шаге счета.

Численный метод

Введем в рассмотрение матрицу $A = \frac{\partial E}{\partial W}$,

где: $W = \varphi \hat{W}$, $\hat{W} = \{ \rho U, \rho U^2, \rho UV, \rho UH, \rho U\Phi \}^T$.

Матрица A определяется с помощью соотношения (7) и введена с целью упрощения вычислений газодинамических параметров из вектора потоков (E) при априори неизвестном характере течения (сверх- или дозвуковое) в расчетной ячейке на следующем шаге счета.

В работе используется конечно-разностная схема решения уравнений (1) состоящая из двух шагов:

первый шаг

$$A_i \Delta W_i = - \frac{\Delta x}{\Delta \eta} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) - \Delta x v \frac{G}{\eta} + \frac{\Delta x}{\Delta \eta \eta_i^v} (\eta_{i+1/2}^v B_{i+1/2} - \eta_{i-1/2}^v B_{i-1/2})$$

$$\bar{W}_i = W_i(x) + \Delta W_i \quad (15)$$

второй шаг

$$\bar{A}_i \Delta \bar{W}_i = - \frac{\Delta x}{\Delta \eta} (\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}) - \Delta x v \frac{\bar{G}}{\eta} + \frac{\Delta x}{\Delta \eta \eta_i^v} (\eta_{i+1/2}^v \bar{B}_{i+1/2} - \eta_{i-1/2}^v \bar{B}_{i-1/2})$$

$$W_i(x + \Delta x) = W_i(x) + (\Delta W_i + \Delta \bar{W}_i) / 2 \quad (16)$$

Индекс « i » относится к узлам сетки по оси y , а индексом « $i+1/2$ » обозначены параметры на границе между соответствующими ячейками.

Вязкие члены аппроксимируются с помощью центральных разностей:

$$B_{i+1/2} = \frac{\mu_{i+1/2}(f_{i+1} - f_i)}{\sigma_f \varphi \Delta \eta}, \quad (17)$$

где турбулентная вязкость, согласно (9) вычисляется следующим образом

$$\mu_{i+1/2} = \rho_{i+1/2} \ell^2 \frac{|U_{i+1} - U_i|}{\varphi \Delta \eta}. \quad (18)$$

Схема явная, шаг счета Δx выбирался следующим образом [6]:

$$1/\Delta x = 1/\Delta x_{\text{CFL}} + 1/\Delta x_{\text{vis}},$$

где

Δx_{CFL} – шаг счета из условия Куранта для невязкой задачи,

Δx_{vis} – шаг счета из условия устойчивости расчета вязкой задачи.

В первой версии алгоритма [13] конвективные члены (вектор F) аппроксимировались аналогично работе [6] с помощью схемы Мак-Кормака, имеющей второй порядок. Однако, как известно эта схема немонотонна и возникающие осцилляции параметров при сквозном расчете течения с разрывами (особенно на начальном участке струи) несмотря на использование методов сглаживания существенно ограничивали диапазон применения сквозного алгоритма. С целью повышения надежности алгоритма, в работе [14] предложена процедура аппроксимация невязких членов, состоящая из двух шагов по схеме Колгана. Экстраполяцией с монотонным ограничением «minmod» находятся параметры сверху и снизу (по оси y) границы расчетной ячейки, которые берутся в качестве входных данных в задаче распада стационарного разрыва, решение которой используется для аппроксимации параметров на границе ячейки. Данные процедуры применяются на первом и втором шаге счета, поэтому полученная схема монотонна и имеет второй порядок аппроксимации по продольному (ось x) и поперечному (ось y) направлениям.

В настоящей работе, для аппроксимации параметров на границах ячейки, используется экономичный приближенный способ решения задачи распада стационарного разрыва, с помощью соотношений выражающих законы сохранения массы импульса и энергии на поверхности разрыва [7] (см. Приложение 1) Стационарный разрыв газа схематизировано распадается на три волны: два разрыва типа косых скачков и контактный разрыв между ними. Решение задачи зависит от двух параметров - массовых скоростей газа через "крайние" волны, которые задаются исходя из максимальных оценок по состояниям газа в соседних ячейках сетки [7]. Это отличает предложенную схему от сеточно-

характеристических схем, в которых необходимо задавать три параметра – наклоны трёх волн разрыва, причём, как известно, при смене их знака возникают проблемы счета.

Для повышения устойчивости вычислений при сквозном счете зон взаимодействия скачков с границами сверхзвуковой области, крайние узлы сетки располагаются не на границах [6], а на расстоянии от них равном половине шага сетки и параметры на границах вычисляются из решения соответствующих модельных задач.

Приведенная численная схема в процессе расчета параметров сверхзвуковой затопленной струи надежно работает при решении как уравнений Эйлера (в невязком сверхзвуковом ядре струи), так и параболизированных уравнений Навье-Стокса (в сверхзвуковой зоне слоя смешения). При решении уравнений пограничного слоя (в дозвуковой зоне слоя смешения) используются разности против потока.

Алгоритм расчета заключается в следующем:

- находятся параметры на оси струи из решения модельной задачи о повороте сверхзвукового потока с параметрами равными параметрам в первом узле $i=1$ на угол $\text{tg}(V_1/U_1)$, причем при $V_1/U_1 > 0$ решение определяется течением Прандтля-Майера, а в противном случае из задачи обтекания клина ;

- звуковая линия выделяется с точностью шага сетки, то есть находится узел сетки $i=i_s$, в котором число Маха $M_{i_s} < 1$, а в предыдущем узле $M_{i_s-1} > 1$;

- определяется угол наклона вектора скорости $V_{s-1/2}/U_{s-1/2}$ между узлами i_s-1 и i_s из решения модельной невязкой задачи о повороте сверхзвукового потока с параметрами равными параметрам в узле $i=i_s-1$ при заданном перепаде давлений P_e/P_{i_s-1} (P_e - давление внешней среды);

- интегрированием правой части уравнения (8) от $i=i_s$ до крайнего узла $i=i_m$ в дозвуковой зоне находятся углы наклона вектора скорости V/U на границах ячеек, включая V_e/U_e на границе $y = \varphi(x)$;

- находится наклон внешней границы $\varphi'(x)$ по формуле (8);

- интегрируя систему уравнений (1) с помощью разностной схемы (15-18) находим параметры в следующем сечении x , после чего вычисления повторяются.

На основе изложенного алгоритма разработана фортран-программа. Время счета типового варианта не превышает 10 мин. РС Pentium IV.

Как показали численные расчеты, сходимость по сетке для расчета параметров на расстояниях больше 2-3 калибров от среза сопла при степенях нерасчетности $n=0.5 \div 5$ и

числах Маха на срезе сопла $Ma=1\div 4$ достигается практически при 60-80 поперечных разбиениях.

Результаты

Для демонстрации метода проведено сравнение расчетов с измерениями перерасширенных «горячих» струи модели 1:5 «Зенит», проведенными ЦНИИМАШ, КБТМ. Температура в камере сгорания с наполнителем ВИК-2Д, температура в камере $T_0=2950\text{K}$, параметры на срезе сопла $Ma=4$, $n=0.65$. Сравнение данных расчетов избыточного давления торможения на оси струи с измерениями дано на рис. 3. Как видно расчеты хорошо согласуются с измерениями, включающими как начальный неизобарический, так и основной участок струи.

С целью иллюстрации влияния догорания топлива, на рис. 4 показаны данные измерений и расчетов параметров струи с учетом и без учета химических реакций. Эксперименты проводились на установке УТТ ЦНИИМАШ с наполнителем НМФ-2. Массовая концентрация горючих компонент СО и H_2 на срезе сопла составляет соответственно 0.46 и 0.02. Температура в камере $T_0=2300\text{K}$, параметры на срезе сопла $Ma=2.8$, $n=3.2$. Диаметр среза сопла $Da=67.4$ мм. Как видно, расчеты с учетом догорания согласуются с экспериментальными данными, причем догорание существенно, до 2.5 раза увеличивает на температуру на фронте факела. Этот эффект необходимо учитывать при оценке теплового воздействия струи на элементы конструкций в начальный период движения.

Таким образом, представленный экономичный метод расчета параметров струйных течений в условиях старта ракет адекватно учитывает основные процессы: турбулентное смешение, вязко-невязкое взаимодействие, ударно-волновую структуру, догорание топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B.E. Launder, D.B. Spalding.* The Numerical Computation of Turbulent Flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 3, 1974, pp. 269-289.
2. Теория турбулентных струй. Под редакцией Г.Н. Абрамовича. М.: Наука. 1984.
3. *S.M. Dash, R.G. Wilmoth and H.S. Pergament.* An Overlaid Viscous/Inviscid Model for the Prediction Jet Entrainment. AIAA Journal, Vol. 17, Sept. 1979.
4. V.N. Vatsa, M.J. Werle and O.L. Andersen. Solution of Slightly Underexpanded Axisymmetric Co-Flowing Jet Flows. AIAA Paper №80-0006, 1980.
5. *Козлов В.Е.* Метод расчета слабонедорасширенной сверхзвуковой турбулентной струи в дозвуковом спутном потоке. В кн. Сверхзвуковые газовые струи. Новосибирск: Наука СО, 1983, стр.64-72
6. *S.M. Dash, D.E. Wolf.* Shock-Capturing Parabolized Navier-Stokes Model(SCIPVIS) For the Analysis of Turbulent Underexpanded Jets. AIAA Paper N 83-704, 1983
7. *Сафронов А.В.* Разностный метод расчета стационарных сверхзвуковых течений газа из соотношений на разрывах. ТМатериалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006) 26 июня-1 июля 2006г. Санкт-Петербург.-М.:Вузовская книга,2006.
8. *Б.Г.Трусов.* Термодинамический метод анализа высокотемпературных состояний и процессов и его практическая реализация – М.: МГТУ. Дисс. д.т.н.,1984.
9. Термодинамические и теплофизические свойства продуктов сгорания. Справочник под ред. *В.П. Глушко.* т.1. М: ВИНТИ АН СССР, 1976.
10. Аэродинамика ракет. Под редакцией *М. Хемша и Дж. Нильсена.* Кн.2. Москва «Мир» 1989.
11. *Секундов А.Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений. МЖГ №5, 1971.
12. *C.N.Chen.* Calculations of Far-field and Near-field Jet Noise. AIAA Paper N 75-93, 1975.
13. *Сафронов А.В., Никишин Б.А* Расчет сверхзвуковых неизобарических турбулентных затопленных струй. В кн. Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации, 1990,1991 гг.-М.: Наука, 1991, стр.92.
14. *В.В Кудрявцев, А.В. Сафронов.* Численное моделирование параметров затопленных струй продуктов сгорания на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса. Тезисы докладов Третьей международной конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2000), Истра-Москва, 3-7 июля 2000г.-М.:МГИУ,2000.
15. *Погорелов В.И.* Параметры определяющие дальнобойность сверхзвуковой газовой струи. ЖТФ т.47 №2, 1977
16. *Lou J.C.* Mach number and temperature effects on jets.- AIAA J. 1980 v.18 №6.
17. *Красоткин В.С., Мышанов А.И., Шалаев С.П., Широков Н.Н. и Юделович М.Я.* Исследования сверхзвуковых изобарических турбулентных струй. МЖГ №4,1988

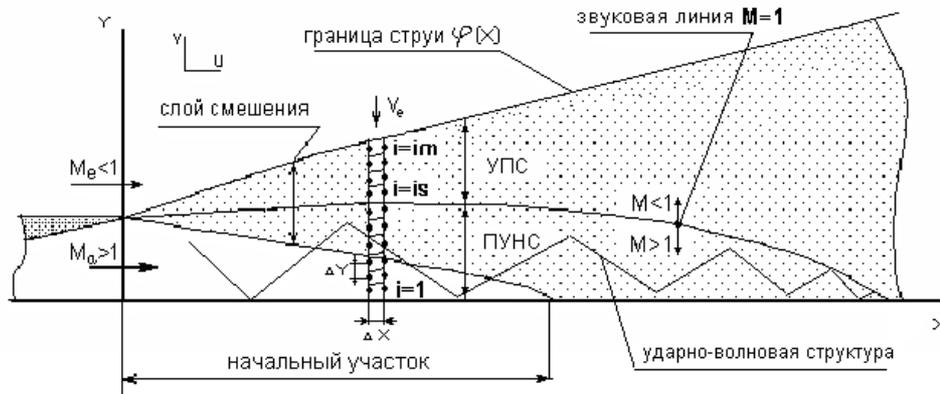


Рис. 1. Схема течения. Разностная сетка.

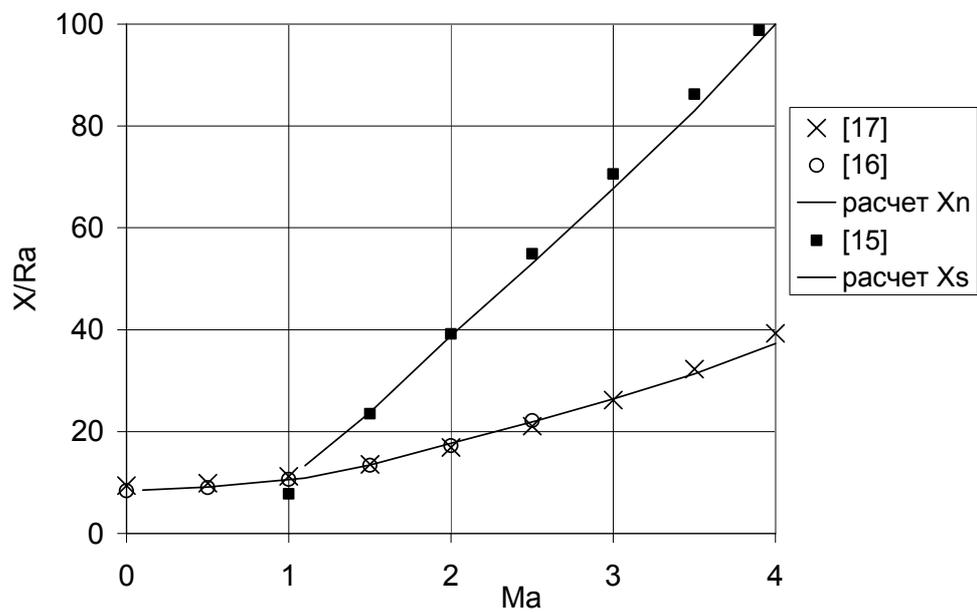


Рис. 2. Зависимости длин начального и сверхзвукового участка струи от числа Маха

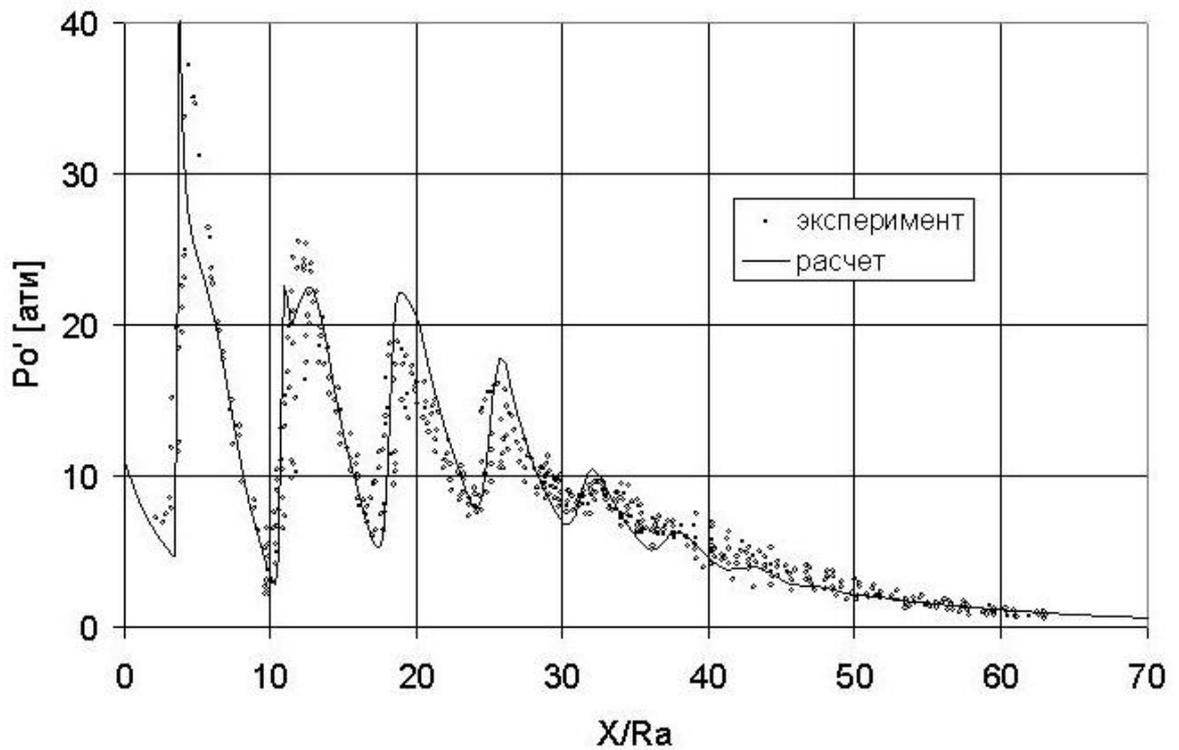


Рис. 3. Сравнение расчетного и измеренного давления на оси струи
 $T_0=2860\text{K}$, $Ma=4$, $Pa=0.65$.

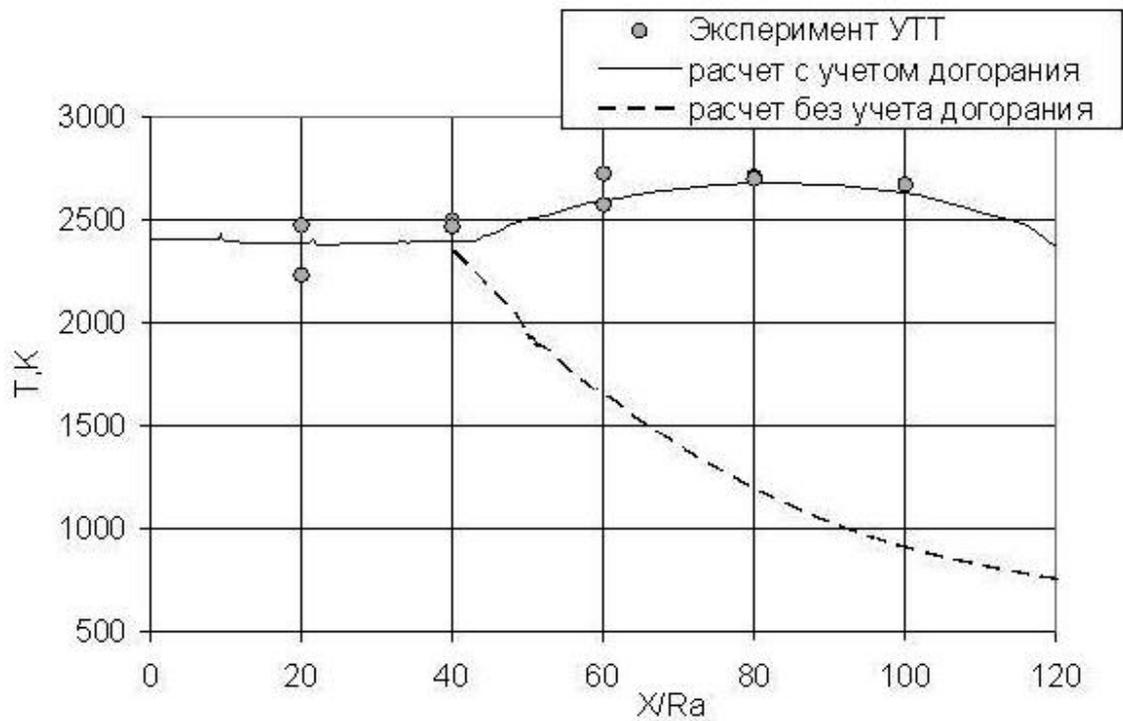


Рис. 4. Влияние догорания топлива на температуру торможения на оси струи НМФ-2. $Ma=2.8$, $n=3.2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

1. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ ИЗ СООТНОШЕНИЙ НА РАЗРЫВАХ¹

Представлена новая экономичная схема расчета сложных разрывных течений на основе приближенного решения задачи Римана распада разрыва.

Рассмотрим описание схемы на примере уравнений одномерной газовой динамики:

$$U_t + F_x = 0,$$

$$U = [\rho, \rho u, \rho E]^T,$$

$$F = [\rho u, \rho u^2 + P, \rho u E + Pu]^T,$$

здесь ρ -плотность газа, u -скорость, P -давление,

$E = P/\rho(\gamma-1) + u^2/2$ -внутренняя энергия,

γ -показатель адиабаты.

Разностную схему запишем в консервативном виде:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}),$$

Где n -номер шага по времени с интервалом Δt , i -номер ячейки сетки по оси x с разбиением Δx .

Поток на границе ячеек $F_{i+1/2}$ вычисляется из приближенного решения задачи распада разрыва.

Основная идея предложенного метода [1] состоит в решении задачи Римана на основе законов сохранения массы импульса и энергии на поверхности разрыва:

$$\Delta m = 0, \tag{1}$$

$$m \Delta u + \Delta P = 0, \tag{2}$$

$$m \Delta E + \Delta(Pu) = 0 \tag{3}$$

Где $m = \rho(u-w)$ – массовая скорость, w -скорость распространения разрыва.

Произвольный разрыв газа распадается на три волны: на левую волну, контактный разрыв и правую волну. На ударных волнах условимся считать m положительной. На контактном разрыве $m=0$, поэтому решение задачи с использованием соотношений (1-3) зависит от двух параметров: массовых скоростей распространения левой и правой волн (m_1 и m_2). Это является отличительной особенностью предложенной схемы, поскольку в известных схемах на основе приближенного решения задачи Римана необходимо задавать три параметра: скорости распространения трех волн распада разрыва.



Обозначим индексами: 1- параметры в левой ячейке сетки, 2- в правой, 3- между левой волной и контактным разрывом, 4- между контактным разрывом и правой волной (рис.1). Решение задачи имеет вид:

$$w_1 = u_1 - m_1/\rho_1$$

$$w_2 = u_2 + m_2/\rho_2$$

$$u_3 = u_4 = u = (u_2 m_2 + u_1 m_1 - P_2 + P_1) / (m_1 + m_2)$$

$$P_3 = P_4 = P = (P_2 m_1 + P_1 m_2 - m_1 m_2 (u_2 - u_1)) / (m_1 + m_2)$$

$$1/\rho_3 = 1/\rho_1 + (u - u_1)/m_1$$

¹ Международная конференция «Пятое Окуневские чтения». 26-30 июня 2006г., Санкт-Петербург: Тезисы докладов./Балт. гос. техн. ун-т-СПб., 2006.

$$\begin{aligned} 1/\rho_4 &= 1/\rho_2 - (u - u_1)/m_2 \\ E_3 &= E_1 - (Pu - P_1 u_1)/m_1 \\ E_4 &= E_2 + (Pu - P_2 u_2)/m_2 \end{aligned}$$

Здесь индексы соответствуют номеру зоны.

В случае $u \geq 0$, при $w_1 \geq 0$ параметры на границе ячеек равны параметрам в зоне 1, а при $w_1 < 0$ параметрам в зоне 3. Случай $u < 0$ аналогичен.

В силу выполнения уравнений (1-3) точное вычисление параметров m_1 и m_2 не требуется. Схема не имеет осцилляций на разрывах, проблем расчета зон разрежения и «звуковой точки» в случаях определения их по максимальному значению массовой скорости в соседних ячейках:

$$m_1 = m_2 = \max(\rho_1 c_1, \rho_2 c_2),$$

или по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho_1 (u_1 - \min(u_1 - c_1, u_2 - c_2)), \\ m_2 &= \rho_2 (\max(u_2 + c_2, u_1 + c_1) - u_2). \end{aligned}$$

Где c_1, c_2 - скорость звука, в ячейках 1 и 2.

Из полученных соотношений определяются параметры газа ρ, u, P, E по которым непосредственно вычисляется вектор потока на границе ячеек $F_{i+1/2}$ без привлечения уравнения состояния, что является достоинством схемы и облегчает её использование в случае переменных свойств газа.

Обобщение на пространственный случай аналогично схеме Годунова.

Численное решение различных одномерных и пространственных задач показало эффективность схемы. Снижение числа Куранта на сильных разрывах не требуется. Результаты расчетов близки к схеме Годунова основанной на точном итерационном решении задачи Римана, при этом время счета в 3-3.5 раза меньше. Новый метод проще в реализации, надежнее и имеет более широкий диапазон применимости, чем другие схемы на основе приближенного решения задачи Римана.

Подход из соотношений на разрывах успешно применялся для расчета стационарных струйных течений реагирующих газов на основе решения параболизированных уравнений Навье-Стокса [2].

Библиографический список

1. *А.В. Сафронов.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах вектора потока. Материалы XVII Школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов». ЦАГИ 2006.
2. *А.В. Сафронов, В.И. Лапыгин, В.А. Хотулев.* Методы математического моделирования в исследованиях проблем старта ракет-носителей. ЦНИИМАШ. Космонавтика и ракетостроение. Вып. 17, 1999.

2. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ИЗ СООТНОШЕНИЙ НА РАЗРЫВАХ ²

Представлена новая экономичная схема расчета установившихся сверхзвуковых разрывных течений газа, являющаяся обобщением нестационарной схемы [1].

Приведем описание схемы на примере двумерных уравнений газовой динамики:

$$E_x + F_y = 0,$$

$$E = [\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uH]^T, \quad (1)$$

$$F = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vH]^T,$$

здесь ρ -плотность газа, u, v -компоненты скорости по координатам x и y соответственно, P -давление, H -полная энтальпия.

Рассматривается сверхзвуковое течение вдоль оси x . В этом случае уравнения (1) имеют x - гиперболический тип. Разностную схему запишем в консервативном виде:

$$E_i^{n+1} = E_i^n - \frac{\Delta x}{\Delta y} (F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) \quad (2)$$

Где n -номер сечения по оси x шагом Δx , i -номер ячейки сетки по оси y с шагом Δy . Поток на границе ячеек $F_{i+1/2}$ вычисляется из приближенного решения задачи распада разрыва. Основная идея метода состоит в решении этой задачи на основе законов сохранения массы импульса и энергии на поверхности стационарного разрыва:

$$\Delta m = 0, \quad (3)$$

$$m \Delta u - w \Delta P = 0, \quad (4)$$

$$m \Delta v + \Delta P = 0, \quad (5)$$

$$m \Delta H = 0 \quad (6)$$

Где $m = \rho u(v/u - w)$ – массовая скорость, w -направление распространения разрыва.



Рис.1. Схема течения

Стационарный разрыв газа распадается на три волны: на «верхнюю» волну (ВВ), контактный разрыв (КР) и «нижнюю» волну (НВ) – рис.1. На КР $m=0$, поэтому решение задачи с использованием соотношений (3-6) зависит от двух параметров: массовых скоростей на НВ и ВВ - m_1 и m_2 . Это является отличительной особенностью предложенной схемы от характеристических схем, в которых необходимо задавать три параметра: направления распространения трех волн при распаде [2]. Обозначим индексами: 1- параметры в нижней

ячейке сетки, 2- в верхней, 3- между НВ и КР, 4- между КР и ВВ (рис.1). Из уравнений (3-6) получим:

На КР: $P_3 = P_4 = P$, (7)

$$v_3/u_3 = v_4/u_4 = q \quad (8)$$

На НВ: $P + m_1 v_3 = P_1 + m_1 v_1 = a_1$, (9)

$$m_1 u_3 - w_1 P = m_1 u_1 - w_1 P_1 = b_1, \quad (10)$$

$$H_3 = H_1 \quad (11)$$

На ВВ: $P - m_2 v_4 = P_2 - m_2 v_2 = a_2$, (12)

$$m_2 u_4 + w_2 P = m_2 u_2 + w_2 P_2 = b_2, \quad (13)$$

$$H_4 = H_2 \quad (14)$$

Обозначения a_1, a_2, b_1, b_2 введены для компактности записи.

² Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2006) 26 июня-1 июля 2006г. Санкт-Петербург.-М.:Вузовская книга,2006.

Из уравнений (8-10,12-13) следует:

$$\begin{aligned} q &= (a_1 - P) / (b_1 + w_1 P) = (P - a_2) / (b_2 - w_2 P), \\ \text{отсюда: } P &= B - (B^2 - C)^{1/2}, \\ \text{где } B &= (b_2 + a_1 w_2 + b_1 - a_2 w_1) / (w_2 - w_1) / 2, \\ C &= (a_1 b_2 + b_1 a_2) / (w_2 - w_1). \end{aligned} \quad (15)$$

После определения давления P из (15), неизвестные скорости находятся из уравнений (9,10,12,13), а плотности из выражений для массовых скоростей.

В случае $q \geq 0$, при $w_1 = (v_1 - m_1 / \rho_1) / u_1 \geq 0$ параметры на границе ячеек равны параметрам в зоне 1, а при $w_1 < 0$ - параметрам в зоне 3. Случай $q < 0$ аналогичен, $w_2 = (m_2 / \rho_2 - v_2) / u_2$.

В силу выполнения уравнений (3-6) точное вычисление параметров m_1 и m_2 не требуется. Схема не имеет осцилляций на скачках и проблем расчета зон разрежения при определении их, аналогично [1] по максимальным наклонам характеристик в соседних ячейках:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho_1 u_1 (v_1 / u_1 - w_1), \\ m_2 &= \rho_2 u_2 (w_2 - v_2 / u_2) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= \min [(u_1 v_1 - c_1 d_1) / (u_1^2 - c_1^2), (u_2 v_2 - c_2 d_2) / (u_2^2 - c_2^2)], \\ w_2 &= \max [(u_1 v_1 + c_1 d_1) / (u_1^2 - c_1^2), (u_2 v_2 + c_2 d_2) / (u_2^2 - c_2^2)], \\ \text{здесь } d &= (u^2 + v^2 - c^2), \quad c_1, c_2 - \text{ скорость звука, в ячейках 1 и 2.} \end{aligned}$$

Таким образом, вектор потока на границе ячеек $F_{i+1/2}$ вычисляется без привлечения уравнения состояния, что дает преимущество схемы в случае переменных свойств газа.

Численное решение различных задач показало эффективность схемы. Снижение числа Куранта на сильных разрывах не требуется. Результаты расчетов близки к схеме Годунова основанной на точном итерационном решении задачи, при этом время счета в 2-2.5 раза меньше. Новый метод проще в реализации, надежнее и имеет более широкий диапазон применимости, чем сеточно-характеристические схемы, в которых уравнения (3) так или иначе, рассматриваются в линеаризованном виде. Подход из соотношений на разрывах успешно применялся для расчета стационарных струйных течений реагирующих газов на основе решения уравнений Навье-Стокса [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А.В. Сафронов*. Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах вектора потока. Материалы XVII Школы-семинара «Аэродинамика летательных аппаратов». ЦАГИ 2006
2. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва. Физматлит. 2001.
3. *В.В. Кудрявцев, А.В. Сафронов*. Численное моделирование параметров затопленных струй продуктов сгорания на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса. Тезисы докладов Третьей международной конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2000), Истра-Москва, 3-7 июля 2000г.-М.:МГИУ,2000.