

# СТРУКТУРА СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В СТАЦИОНАРНО НЕРАВНОВЕСНОЙ СРЕДЕ

Макарян В. Г., Молевич Н. Е.

*Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева,  
Самарский филиал им. Н.Г. Басова физического института им. П.Н. Лебедева РАН,  
molevich@mb.ssau.ru*

Рассмотрено влияние новых дисперсионно-вязкостных свойств неравновесной среды на структуру стационарных ударных волн. Показано, что неравновесность среды в большей степени влияет на волны меньшей амплитуды. Найдена предельная амплитуда и скорость ударной волны, ниже которых ударная волна становится неустойчивой и распадается на периодическую последовательность автоволновых сильно асимметричных импульсов. Возмущение конечной площади в неравновесной среде распадается с образованием тех же автоволновых импульсов и периодической автоволны. Кроме того, в неравновесной среде с отрицательным низкочастотным коэффициентом нелинейности найдено условие расщепления ударной волны на ступенькообразную автоволну и стационарную ударную волну разрежения. Параметры всех трёх автоволн (импульса, периодической волны и ступеньки) зависят только от характеристик неравновесной среды и не зависят от амплитуды и скорости начального возмущения.

## Введение

Акустика термодинамически неравновесных сред, таких как колебательно возбуждённый газ, неизотермическая плазма, химически активные смеси, среды с неравновесным состоянием фаз и т.д., значительно отличается от акустики равновесных сред [1-27]. В неравновесных средах коэффициент второй (объёмной вязкости)  $\xi$  и акустическая дисперсия могут быть отрицательными:  $\xi < 0$  и  $u_0 > u_\infty$ . Здесь,  $u_0, u_\infty$  – равновесная (низкочастотная) и замороженная (высокочастотная) скорости звука, соответственно. Среда с отрицательной вязкостью являются акустически активными. Кроме того, только замороженный коэффициент газодинамической нелинейности определяется как обычно  $\Psi_\infty = (\gamma_\infty + 1)/2$ . Равновесный коэффициент газодинамической нелинейности  $\Psi_0 \neq (\gamma_0 + 1)/2$  и является сложной функцией стационарной степени неравновесности. При некоторых степенях неравновесности  $\Psi_0 < 0$ . Эти новые акустические свойства неравновесных сред следует принимать во внимание при исследовании различных газодинамических явлений. Многочисленные эксперименты, проведённые в неравновесных средах, свидетельствуют о существенной перестройке структуры газодинамического возмущения. В частности, в неравновесных газоплазменных средах наблюдается расщепление фронта ударной волны, изменение её скорости, амплитуды и ширины фронта, образование предвестников [28-35]. Теория этих явлений до сих пор не создана. Одна группа авторов пытается объяснить все наблюдаемые явления неоднородностью среды [35-37]. Другая группа авторов утверждает, что подобные явления наблюдаются, в том числе, и в однородных квазистационарных неравновесных средах. Таким образом, сама неравновесность среды должна каким-то образом изменять структуру ударной волны [38-41].

Настоящая работа демонстрирует один из возможных механизмов воздействия неравновесной газовой среды на структуру ударных волн малой амплитуды, обусловленный её новыми дисперсионно-вязкостными свойствами. Эти новые свойства кратко рассмотрены в разделе 1. В разделе 2 с помощью простого анализа вида ударных адиабат исследуется влияние новых свойств неравновесной среды на стационарную структуру и устойчивость слабых ударных волн. В разделе 3 показано, что стационарная структура слабых ударных волн может быть описана аналитически на основе решения общего акустического уравнения. В разделах 4,5 с помощью этого уравнения рассмотрена нестационарная эволюция газодинамиче-

ских возмущений при разных знаках  $\Psi_0$  с образованием автоволновых структур импульсного и ступенькообразного типа.

## 1. Дисперсионно-вязкостные свойства неравновесных газовых сред

Простейшей моделью, демонстрирующей новые дисперсионно-вязкостные свойства неравновесных сред, является модель колебательно-возбуждённого газа с экспоненциальной моделью релаксации. Исходная система газодинамических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P, \quad P = \frac{\rho T}{M} \\ C_{V\infty} \frac{dT}{dt} + \frac{dE}{dt} - \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= Q - I \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{E_e - E}{\tau(T, \rho)} + Q \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E$  – колебательная энергия в расчёте на одну молекулу,  $E_e$  – её равновесное значение,  $\tau$  – время колебательной релаксации,  $Q, I$  – мощности источника накачки и теплоотвода (в расчёте на одну молекулу),  $\rho, T, P$  – плотность, температура и давление,  $v$  – скорость,  $C_{V\infty}$  – теплоёмкость равновесных степеней свободы при постоянном объёме. Ниже полагается, что среда стационарная и однородная, а мощности источника накачки и теплоотвода не зависят от температуры и плотности среды. Несмотря на явную идеализацию реальной неравновесной среды, эта модель широко используется из-за ее простоты. На основе этой модели легко продемонстрировать качественное изменение вязкостно-дисперсионных свойств в зависимости от степени неравновесности среды, которое необходимо принимать во внимание и в более сложных системах.

После линеаризации исходной системы получается простой закон дисперсии

$$\frac{T_0 k^2}{M \omega^2} = \frac{C_V}{C_P} = \frac{1}{\gamma(\omega)} \quad (2)$$

с комплексными теплоемкостями следующего вида:

$$\begin{aligned} C_V &= \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_V = C_{V\infty} + \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{C_{V0} - i\omega\tau_0 C_{V\infty}}{1 - i\omega\tau_0}, \\ C_P &= \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = C_{P\infty} + \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_P = \frac{C_{P0} - i\omega\tau_0 C_{P\infty}}{1 - i\omega\tau_0}. \end{aligned}$$

Очень важно, что низкочастотные теплоемкости  $C_{V0}, C_{P0}$  зависят от степени неравновесности среды  $S$  и ее релаксационных свойств [6]:  $C_{V0} = C_{V\infty} + C_K + S\tau_T$ ,  $C_{P0} = C_{P\infty} + C_K + S(\tau_T - \tau_\rho)$ , где

$$S = \frac{Q\tau_0}{T_0}, \quad \tau_T = \frac{T_0}{\tau_0} \frac{\partial \tau}{\partial T}, \quad \tau_\rho = \frac{\rho_0}{\tau_0} \frac{\partial \tau}{\partial \rho}.$$

Полученное дисперсионное отношение (2) позволяет определить акустический декремент  $\alpha$  и скорость звука  $c_s$  в простой форме:

$$\alpha = k'' = \frac{\omega^2 \xi}{2c_s^3 \rho_0} = \begin{cases} \alpha_0 = \omega^2 \xi_0 / 2c_0^3 \rho_0, & \omega \ll \omega_0 \\ \alpha_\infty = \xi_0 C_{V0}^2 / 2c_\infty^3 \rho_0 \tau_0^2 C_{V\infty}^2 & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$c_s = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{C_{V0}^2 c_0^2 + \omega^2 \tau_0^2 C_{V\infty}^2 c_\infty^2}{C_{V0}^2 + \omega^2 \tau_0^2 C_{V\infty}^2}}$$

где  $\omega_0 \equiv \tau_0^{-1} \sqrt{C_{P0} C_{V0} / C_{P\infty} C_{V\infty}}$ ,

$$\xi = -\frac{P_0}{\omega} \gamma''(\omega) = \frac{\xi_0 C_{V0}^2}{C_{V0}^2 + \omega^2 \tau_0^2 C_{V\infty}^2}$$

является коэффициентом второй вязкости (точнее реальной частью комплексного коэффициента второй вязкости [45]), а

$$\xi_0 = \frac{\rho_0 \tau_0 C_{V\infty} (c_\infty^2 - c_0^2)}{C_{V0}} = -\frac{\rho_0 \tau_0 C_{V\infty} m c_\infty^2}{C_{V0}}$$

– низкочастотным коэффициентом второй вязкости. Этот коэффициент пропорционален разности квадратов высокочастотной  $c_\infty = \sqrt{\gamma_\infty T_0 / M}$  и низкочастотной  $c_0 = \sqrt{\gamma_0 T_0 / M}$  скоростей звука в газе;  $\gamma_0 = C_{P0} / C_{V0}$  и  $\gamma_\infty = C_{P\infty} / C_{V\infty}$  – низкочастотный и высокочастотный показатели адиабаты,  $m = \frac{c_0^2 - c_\infty^2}{c_\infty^2}$ .

Низкочастотный коэффициент второй вязкости можно представить в виде суммы

$$\xi = \frac{C_{V0}^2 (\xi_{01} + \xi_{02})}{C_{V0}^2 + \omega^2 \tau_0^2 C_{V\infty}^2}, \quad \xi_{01} = \frac{P_0 \tau_0 (C_{V\infty} \tau_\rho + \tau_T) S}{C_{V0}^2}, \quad \xi_{02} = \frac{P_0 \tau_0 C_K}{C_{V0}^2},$$

где  $\xi_{01}$  – неравновесный коэффициент, величина и знак которого зависит от степени неравновесности и  $\tau(T, \rho)$ ;  $\xi_{02}$  – квазиравновесный коэффициент, который всегда положителен. При выполнении условия  $(C_{V\infty} \tau_\rho + \tau_T) S + C_K < 0$  происходит изменение знака второй вязкости [46]. Это условие соответствует наличию положительной обратной связи между газодинамическим возмущением и неравновесным тепловыделением, когда в максимумах возмущения тепловыделение растет и реализуется известный критерий Рэлеевской акустической неустойчивости.

Если учесть также сдвиговую вязкость и теплопроводность с коэффициентами  $\eta, \chi$ , то среда будет акустически неустойчивой при выполнении следующего условия

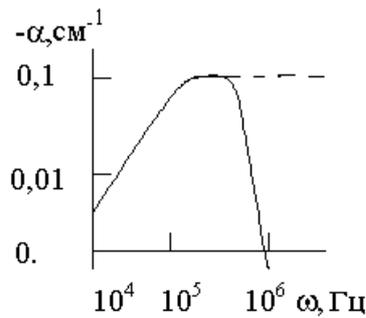
$$\alpha = \frac{\omega^2 (\xi + \mu)}{2\rho_0 c_s^3} < 0, \quad (3)$$

т.е. отрицательности полной вязкости  $\xi(\omega) + \mu < 0$ , где

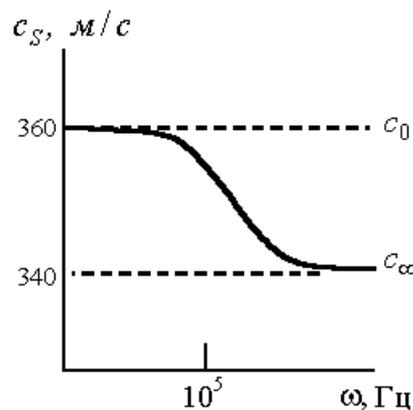
$$\mu = \frac{4\eta}{3} + \chi M \operatorname{Re} \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right).$$

Форма акустического инкремента (3) является общей и для более сложных моделей релаксации, в том числе и для моделей с несколькими характерными временами релаксации. Меняются только вид частотных зависимостей скорости звука и коэффициента второй вязкости.

На рис. 1, 2 приведены рассчитанные частотные зависимости акустического инкремента и скорости звука в типичной лазерной  $\text{CO}_2$ -содержащей среде ( $\text{CO}_2 : \text{N}_2 : \text{He} = 1 : 2 : 3$ ,  $P = 1 \text{ атм}$ ,  $Q\rho_0 / M = 1 \text{ кВт} / \text{см}^3$ ,  $S = 0,1$ ).



**Рис.1.** Частотная зависимость акустического инкремента (3) в неравновесной  $\text{CO}_2$ -содержащей среде. Пунктирная линия соответствует случаю  $\mu = 0$



**Рис.2.** Частотная зависимость скорости звука в неравновесной  $\text{CO}_2$ -содержащей среде

Заметим, что уже при таких относительно малых степенях неравновесности, отрицательная вторая вязкость значительно превышает по абсолютной величине сдвиговую вязкость  $r_0 = \xi_0 / \eta \approx -10^4$ . Кроме того, рис. 2 соответствует отрицательной акустической дисперсии. Напротив, в равновесной среде высокочастотная скорость звука всегда больше низкочастотной, т.е. акустическая дисперсия всегда положительная.

На рис. 3 представлена типичная зависимость низкочастотной скорости звука от степени неравновесности при экспоненциальной модели релаксации [6]. Возможно существование четырёх характерных областей неравновесности.

В области I ( $0 < S < S_{th}$ , где  $S_{th} = C_K / |C_{V\infty}\tau_p + \tau_T|$ ) дисперсия и объемная вязкость положительны. В других областях объемная вязкость отрицательна и среда может быть акустически активной. В области II ( $S_{th} \leq S < S_V$ ,  $S_V = -(C_{V\infty} + C_K) / \tau_T$ ) дисперсия отрицательна и равновесная скорость звука может существенно превышать замороженную. В остальных областях дисперсия положительна. Причем в области III ( $S_V \leq S < S_p$ ) низкочастотный звук

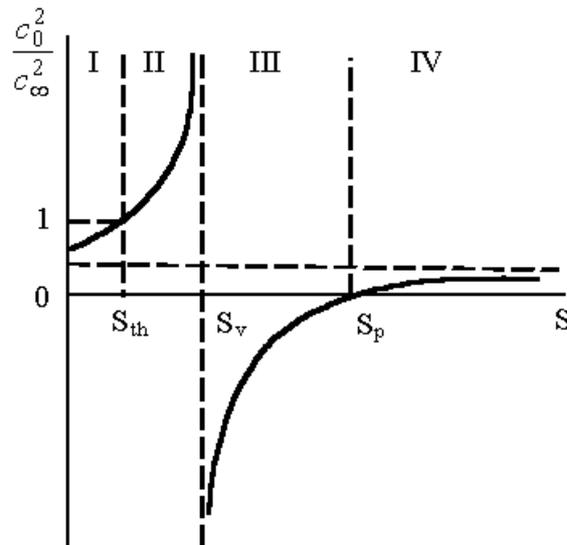


Рис. 3. Зависимость квадрата низкочастотной скорости от степени неравновесности среды

распространяться не может, а в области IV ( $S > S_p = -(C_{P\infty} + C_K) / (\tau_T - \tau_p)$ ) дополнительно возможна тепловая неустойчивость.

Рассмотренная совокупность новых дисперсионно-вязкостных свойств неравновесных сред существенно влияет на распространение газодинамических возмущений. Обзор послед-

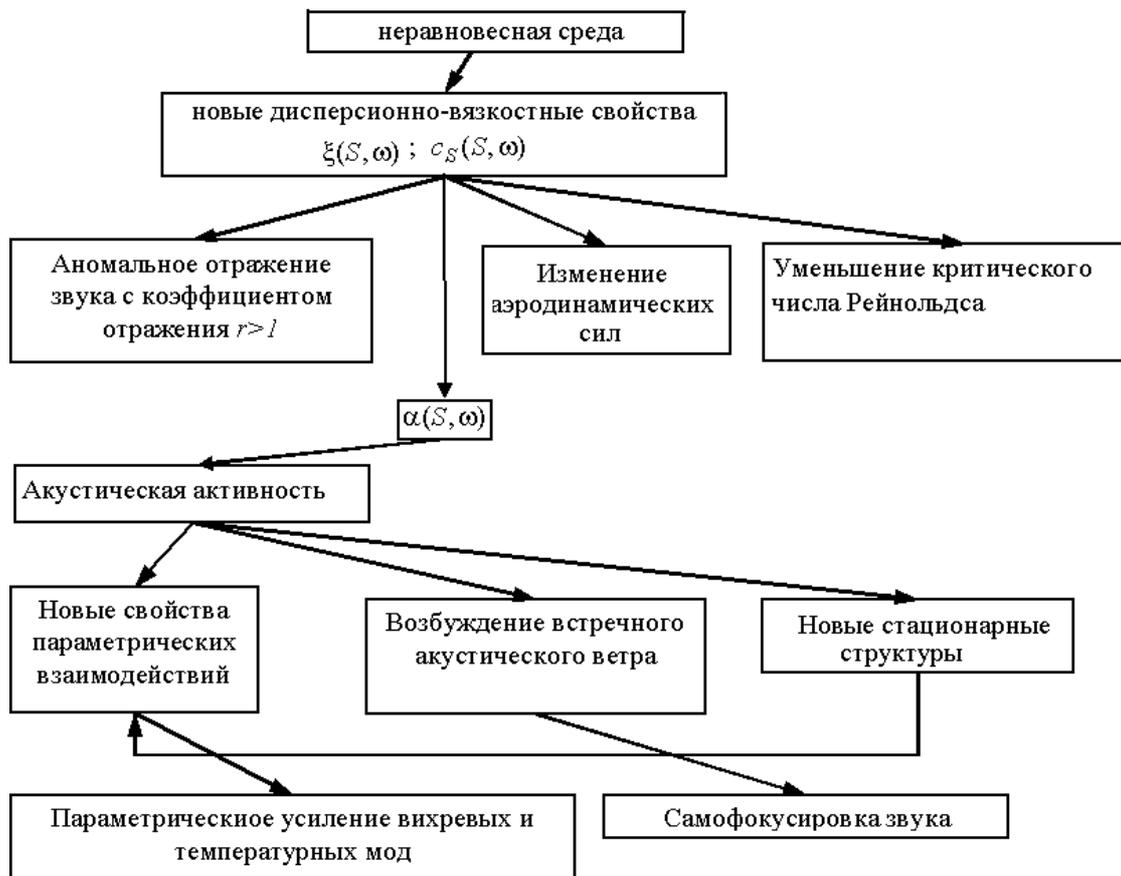


Рис.4. Влияние новых дисперсионно-вязкостных свойств на газодинамику неравновесных среды

ствий этого влияния приведен в работе [26]. Часть их них отражена на диаграмме (рис. 4): подобные среды акустически активны, отражение на границе с неравновесным газом может

происходить с коэффициентом отражения большим единицы [47, 48]; возникают новые свойства параметрических взаимодействий, в частности с вихревыми и тепловыми модами [49-52]; появляется встречный акустический ветер [53, 54]; изменяется критическое число Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в потоках неравновесного газа [55, 56] и структура пограничных слоёв [57, 58], а также аэродинамические коэффициенты [59, 60] и здесь следует ожидать существенного изменения структуры ударных волн.

Структура ударных волн, о которых мы будем говорить дальше, исследована нами для области отрицательной дисперсии  $\Pi$ .

## 2. Слабые ударные волны в неравновесном газе

В релаксационной газодинамике рассматриваются две ударные адиабаты, проведенные через заданную начальную точку 1 (рис. 5), соответствующую состоянию газа перед ударной

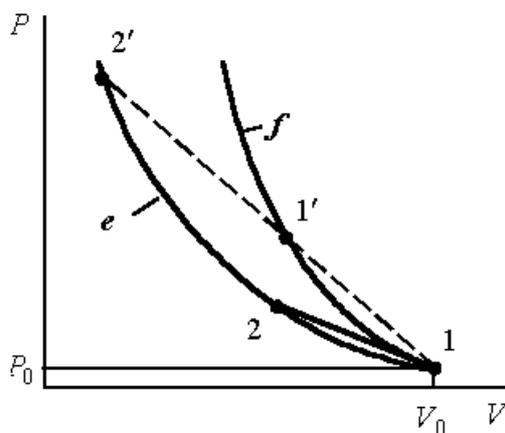


Рис. 5. Ударные адиабаты в релаксирующем газе с положительной акустической дисперсией

волной ( $P_0, V_0$ ). Точки, лежащие на ударных адиабатах, соответствуют возможным состояниям газа за ударной волной. Одна адиабата предполагает полную равновесность конечных состояний газа и называется равновесной адиабатой (кривая  $e$ , рис. 5). Другая ударная адиабата называется замороженной (кривая  $f$ , рис. 5). Она получается в предположении, что релаксационные процессы не происходят вовсе. В силу положительной акустической дисперсии замороженная адиабата всегда лежит выше равновесной адиабаты.

При таком виде ударных адиабат возможны следующие два вида ударных волн [45, 61] (рис. 6). Первому случаю, когда хорда 12 (рис. 5) пересекает только равновесную адиабату, соответствует УВ с плавным нарастанием амплитуды без образования скачка уплотнения (кривая 1, рис. 6). Причём ширина фронта подобной ударной волны пропорциональна положительному коэффициенту второй вязкости. При более высоких скоростях УВ, чему соответствует больший наклон хорды 11'2' (рис. 5), газ в УВ сначала сжимается скачком до со-

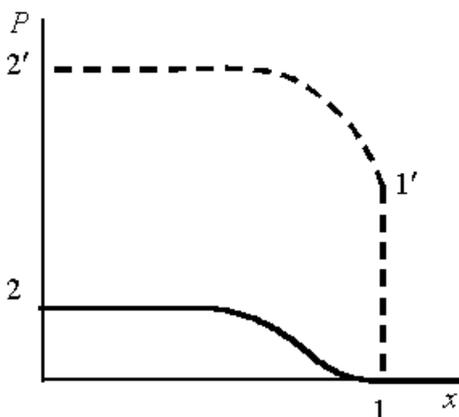


Рис.6. Ударные волны в релаксирующем газе с положительной акустической дисперсией

стояния  $1'$ , а затем происходит его сжатие до конечного состояния  $2'$ , при этом все промежуточные состояния газа лежат на отрезке  $1'2'$  (кривая 2, рис. 6).

Для волн малой амплитуды равновесная и замороженная адиабаты могут быть записаны с точностью до величин второго порядка малости относительно изменения объема  $\Delta V$  в следующем виде:

$$\Delta P = \rho_0 c_0^2 \left[ -\frac{\Delta V}{V_0} + \Psi_0 \left( \frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 \right], \quad \Delta P = \rho_0 c_\infty^2 \left[ -\frac{\Delta V}{V_0} + \Psi_\infty \left( \frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где для равновесной среды  $\Psi_\infty = (\gamma_\infty + 1)/2$ ,  $\Psi_0 = (\gamma_0 + 1)/2$  – соответствующие коэффициенты нелинейности. При этом выражения (4) совпадают (с точностью до второго порядка) с обычными адиабатами Пуассона.

В [62-64] были построены ударные адиабаты в неравновесном газе для так называемой «полузамороженной» модели неравновесного газа. В этой модели в газе, по которому распространяется стационарная ударная волна, выделялись три зоны. В первой зоне впереди фронта ударной волны находился однородный неравновесный газ. Неравновесное состояние поддерживается каким-то источником. Вторая зона отделена от первой скачком уплотнения. Здесь источник отключён и происходит релаксация. В третьей зоне источник тоже отключён, газ считается однородным и равновесным, его состояние определяется только одной поступательной температурой. Поскольку в этой модели имеется разная зависимость внутренней энергии от температуры и плотности перед ударной волной и за ударной волной, то равновесная и замороженная адиабаты не проходят через одну исходную точку (рис. 7). Подобная

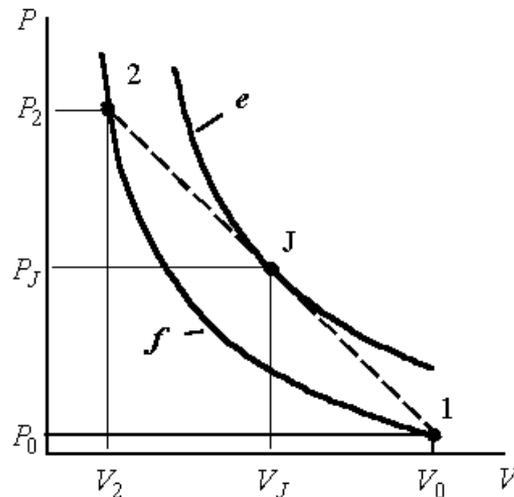


Рис. 7. Ударные адиабаты в «полузамороженной» модели неравновесного газа

ситуация является типичной для теории детонации. В этой модели было получено, что устойчивыми могут быть только стационарные ударные волны, распространяющиеся со скоростями  $D \geq D_j$ . Режим  $D = D_j$  (хорда  $1J2$  совпадает с касательной к равновесной адиабате) аналогичен режиму нормальной детонации, распространяющейся со скоростью Жуге [45, 61]. Соответствующая структура ударной волны приведена на рис. 8. При  $D < D_j$  ударная волна является неустойчивой.

В настоящей работе представлены результаты, полученные для модели стационарно неравновесного газа. В этой модели среда неравновесна во всех зонах. Степень неравновесности меняется как  $S = Q\tau(T, \rho)/T$ . Поэтому для сильных ударных волн с большим нагревом за фронтом волны степень неравновесности становится малой, и можно использовать

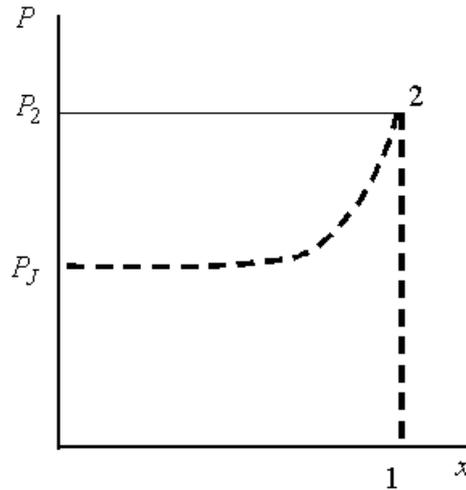


Рис. 8. Структура ударной волны, распространяющейся со скоростью  $D = D_J$

«полузамороженную» модель неравновесного газа. Для слабых ударных волн эти две модели описывают разные ситуации. Зависимость внутренней энергии от температуры и плотности перед ударной волной (в первой зоне) и после ударной волны (в третьей зоне) в модели стационарно неравновесного газа одна. В результате получаются ударные адиабаты вида (4), проходящие через одну начальную точку 1. Отличие от ударных адиабат в равновесном газе будет только из-за зависимости низкочастотных величин от степени неравновесности  $S$ . Зависимости  $c_0(S)$ ,  $C_{V0}(S)$  приведены в разделе 1, зависимость  $\Psi_0(S)$  получена в [46, 65] и имеет вид

$$\Psi_0 = \frac{S(1+S)}{C_{P0}C_{V0}}\tau_T + \frac{1+2C_{V0}}{2C_{V0}} - \frac{S(1+S)^2}{2C_{P0}C_{V0}^2}\tau_{TT}, \quad \tau_{TT} = \frac{T_0^2}{\tau_0} \frac{\partial^2 \tau}{\partial T^2}.$$

Как показано в [65], в неравновесной среде низкочастотный коэффициент нелинейности является знакопеременным. Случай  $\Psi_0 < 0$  будет рассмотрен в разделе 5. При положительном коэффициенте  $\Psi_0$  обе адиабаты обращены выпуклостью вниз (рис. 9 [66]). Здесь

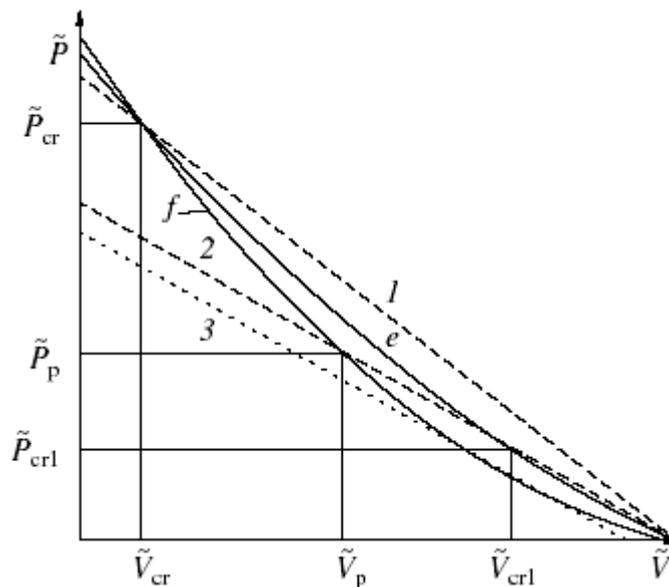


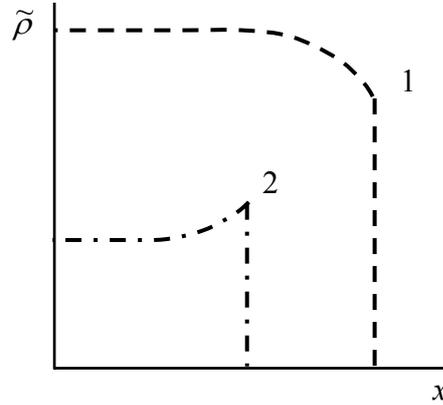
Рис.9. Ударные волны в релаксирующем газе с отрицательной акустической дисперсией

$\tilde{P} = \Delta P / \rho_0 c_\infty^2$ ,  $\tilde{V} = \Delta V / V_0$ . При малых сжатиях равновесная адиабата в среде с отрицательной дисперсией лежит выше замороженной. При больших сжатиях равновесная адиабата лежит ниже замороженной, как для обычной газовой среды с положительной дисперсией. Поэтому точка пересечения адиабат  $(\tilde{P}_{cr}, \tilde{V}_{cr})$ , где  $\tilde{V}_{cr} = -m / (\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0)$ ,  $\tilde{\Psi}_0 = \Psi_0 \gamma_0 / \gamma_\infty$ , разделяет возможную структуру ударных волн на два класса. Наклон хорды, проведённой в точку пересечения равновесной и замороженной адиабат (рис. 9, прямая 1) определяет критическую скорость ударной волны

$$\tilde{D}_{cr} \equiv \frac{D_{cr}}{c_\infty} = \sqrt{1 + \Psi_\infty \tilde{\rho}_{cr}} \approx 1 + \frac{\Psi_\infty m}{2(\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0)}, \quad (5)$$

где  $\tilde{\rho}_{cr} = -\tilde{V}_{cr}$ .

При  $\tilde{D} > \tilde{D}_{cr}$  структура УВ имеет вид, который типичен для равновесных сред: сжатие газа сначала происходит скачком до точки пересечения соответствующей хорды с замороженной адиабатой, затем уже происходит постепенное сжатие до конечного состояния, определяемого точкой пересечения с равновесной адиабатой (рис. 10, кривая 1).



**Рис. 10.** Ударные волны в релаксирующем газе с отрицательной акустической дисперсией

При  $\tilde{D} < \tilde{D}_{cr}$  структура УВ будет совершенно другой, так как в этой области замороженная адиабата лежит ниже равновесной адиабаты. Опять происходит быстрое сжатие, до величины, определяемой пересечением соответствующей хорды (рис. 9, прямая 2) с замороженной адиабатой. Затем происходит постепенное расширение газа до конечного состояния, определяемого пересечением данной хорды с равновесной адиабатой. В результате возникает новая структура ударной волны (рис. 10, кривая 2).

Для устойчивого распространения УВ скорость ударной волны должна быть меньше скорости бесконечно малого возмущения (т.е. скорости звука), распространяющегося за её фронтом. Поэтому ударные волны со скоростями

$$\tilde{D} \leq \tilde{D}_{cr1} = \sqrt{1 + m + \tilde{\Psi}_0 \tilde{\rho}_{cr1}} \approx 1 + \frac{\Psi_\infty m}{2(\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0)}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\rho}_{cr1} \approx m / (2\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0)$ , будут эволюционно неустойчивыми. Величина  $\tilde{\rho}_{cr1}$  определена из условия  $\tilde{D}_{cr1}^2 = (d\tilde{P} / d\tilde{V})_{f, V=V_{cr1}} = 1 + 2\Psi_\infty \rho_{cr1}$  (хорда 2 параллельна касательной к замороженной адиабате в точке  $(\tilde{P}_{cr1}, \tilde{V}_{cr1})$ )[66].

Критическая скорость  $\tilde{D}_{cr1}$  может рассматриваться как качественный аналог скорости Жуге в теории детонации. Принципиально новым результатом является эволюция неустойчивой волны, рассмотренная ниже в разделе 4. Если в “полузамороженной” модели неустойчивая волна всегда усиливается до стационарного режима, соответствующего точке Жуге [67,68], то в рассматриваемой модели этого не происходит, а вместо этого возникает новый автоволновой режим.

### 3. Общее акустическое уравнение и его стационарные решения

Для рассмотрения нестационарной эволюции ударных волн применялось общее акустическое уравнение

$$\begin{aligned} & C_{V\infty} \tau_0 \left( \rho_{tt} - c_\infty^2 \rho_{xx} - c_\infty^2 \Psi_\infty \rho^2_{xx} - \frac{\mu_\infty}{\rho_0} \rho_{xxt} \right)_t + \\ & + C_{V0} \left( \rho_{tt} - c_0^2 \rho_{xx} - c_0^2 \Psi_0 \rho^2_{xx} - \frac{\mu_0}{\rho_0} \rho_{xxt} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\mu_\infty = \frac{4\eta}{3} + \chi M \operatorname{Re} \left( \frac{1}{C_{V\infty}} - \frac{1}{C_{P\infty}} \right), \quad \mu_0 = \frac{4\eta}{3} + \chi M \operatorname{Re} \left( \frac{1}{C_{V0}} - \frac{1}{C_{P0}} \right).$$

Уравнение (7) получено в [69] с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде, в приближении слабой дисперсии  $m = (c_0^2 - c_\infty^2) / c_\infty^2 \sim \theta$  и малой диссипации  $\mu_{0,\infty} / \tau c_\infty^2 \rho_0 \sim \theta$  для неравновесной среды с экспоненциальной моделью релаксации. Здесь низкочастотные теплоемкость, скорость звука и коэффициент нелинейности зависят от стационарной степени неравновесности газа, как обсуждалось выше. Для волн, бегущих в одном направлении, уравнение (7) преобразуется к безразмерному виду

$$\left( \tilde{\rho}_y + \frac{\Psi_\infty}{2} \tilde{\rho}_\zeta^2 - \eta_\infty \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} \right)_\zeta - \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}} \left( \tilde{\rho}_y + \frac{m}{2} \tilde{\rho}_\zeta + \frac{\tilde{\Psi}_0}{2} \tilde{\rho}_\zeta^2 - \eta_0 \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} \right) = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad \zeta = \frac{x - c_\infty t}{c_\infty \tau_0}, \quad y = \frac{t}{\tau_0}, \quad \eta_0 = \frac{\mu_0}{2\tau_0 c_\infty^2 \rho_0}, \quad \eta_\infty = \frac{\mu_\infty}{2\tau_0 c_\infty^2 \rho_0}.$$

Заметим, что уравнение (8) может быть сведено к известным уравнениям, описывающим эволюцию низкочастотных или высокочастотных возмущений. В низкочастотном приближении ( $\partial \tilde{\rho} / \partial y \sim \theta \tilde{\rho}$ ) уравнение (8) сводится к модифицированному уравнению Курамото-Сивашинского:

$$\tilde{\rho}_y + \tilde{\Psi}_0 \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta = \mu_\Sigma \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} + \beta_0 \tilde{\rho}_{\zeta\zeta\zeta} + \kappa \tilde{\rho}_{\zeta\zeta\zeta\zeta}, \quad (9)$$

где  $\mu_\Sigma = \eta_0 + \tilde{\xi}$  – безразмерный коэффициент полной вязкости,  $\tilde{\xi} = \xi_0 / 2\rho_0 \tau_0 c_0^2$  – безразмерный коэффициент низкочастотной второй вязкости,  $\kappa = C_{V\infty} \beta_0 / C_{V0} = C_{V\infty}^2 \tilde{\xi} / C_{V0}^2$ .

Уравнение (9) использовалось ранее для описания волновых процессов в плёнках жидкости, стекающих по наклонной плоскости, возмущений концентраций реагирующих веществ при химических реакциях и горении, волн электростатического потенциала в торои-

дальних системах и т.д. [70] Здесь оно получено применительно к колебательно-возбуждённому газу.

В высокочастотном приближении ( $\partial\tilde{\rho}/\partial y \sim \theta^{-1}\tilde{\rho}$ ) уравнение (8) сводится к уравнению Бюргерса с источником и интегральной дисперсией:

$$\tilde{\rho}_y + \Psi_\infty \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta = \eta_\infty \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} - \alpha_\infty \tilde{\rho} - \beta_\infty \int \tilde{\rho} d\zeta,$$

где

$$\alpha_\infty = \frac{\xi_0 C_{V0}^2}{2C_{V\infty}^2 \rho_0 \tau_0 c_\infty^2}, \quad \beta_\infty \approx \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}} \alpha_\infty.$$

Недостатком низкочастотного и высокочастотного уравнений является то, что на их основе нельзя описать нестационарную эволюцию возмущений с произвольным спектром. Кроме того, спектр стационарных структур, ими описываемых, обычно оказывается шире области применимости этих уравнений. Большим недостатком стационарных решений высокочастотного уравнения оказывается их эволюционная неустойчивость по отношению к низкочастотным возмущениям.

Уравнение (8) описывает эволюцию возмущения с произвольным спектром, поэтому его можно назвать общим акустическим эволюционным уравнением. При  $S=0$  уравнение (8) почти совпадает с известным уравнением нелинейной акустики [71, 72], но в последнем не учитывалось отличие  $\eta_0$  от  $\eta_\infty$  и  $\Psi_0$  от  $\Psi_\infty$ , которое сохраняется и в равновесной среде.

Сначала покажем, что стационарные структуры, описываемые уравнением (8), совпадают с теми, что получены методом ударных адиабат. Стационарная форма уравнения (8) имеет вид

$$\eta_\infty \tilde{\rho}_{zz} + \tilde{\rho}_z \left[ \left( w - \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}} \eta_0 \right) - \Psi_\infty \tilde{\rho} \right] + \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}} \left[ - \left( w - \frac{m}{2} \right) \tilde{\rho} + \frac{\tilde{\Psi}_0}{2} \tilde{\rho}^2 \right] = c, \quad (10)$$

где  $z = \zeta - wy$  – автомодельная переменная,  $w = \tilde{D} - 1$  – безразмерная скорость стационарной волны в системе координат, движущейся со скоростью  $c_\infty$ .

При  $\eta_\infty = 0$  уравнение (10) имеет аналитическое решение, полученное в [73]. При  $c=0$ , что соответствует отсутствию потока через фронт возмущения, это решение имеет вид

$$z = z_0 + \sigma \frac{w}{\Psi_\infty \tilde{\rho}_i} \ln|\tilde{\rho}| + \sigma \frac{(\tilde{\rho}_i - w/\Psi_\infty)}{\tilde{\rho}_i} \ln|(\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_i)| \quad (11)$$

где

$$\sigma = \frac{2\Psi_\infty}{v\tilde{\Psi}_0}, \quad v = \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}, \quad \tilde{\rho}_i = \frac{2(w + v\mu_\Sigma)}{\tilde{\Psi}_0}.$$

При отрицательной дисперсии, отрицательной полной вязкости и  $\tilde{\Psi}_0 > 0$ , зависимость (11) описывает два вида интегральных кривых, приведённых на рис. 11. Этим интегральным кривым соответствуют три типа разрывных решений.

Решения, показанные на рис. 12, описываются интегральными кривыми (рис. 11a) с разрывами на средней или верхней ветви. Место разрыва определяется величиной скачка газодинамического возмущения

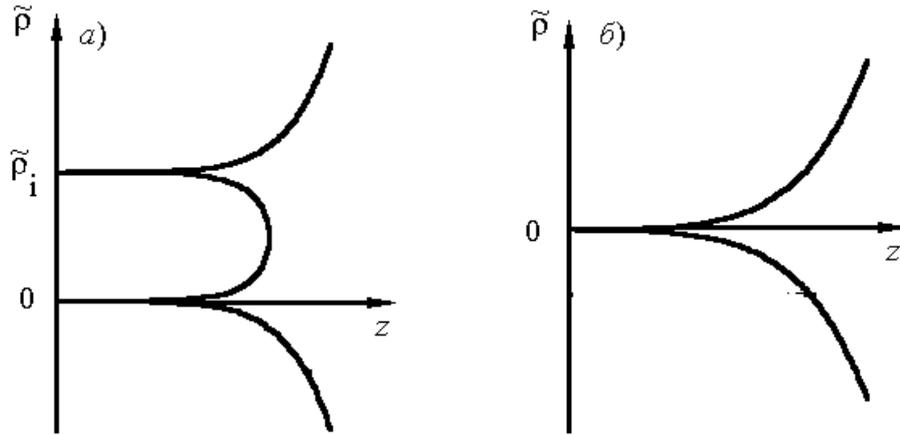


Рис. 11. Интегральные кривые уравнения (10)

$$\tilde{\rho}_d = \frac{2w}{\Psi_\infty} = \frac{\tilde{\Psi}_0 \tilde{\rho}_i - 2\nu\mu_\Sigma}{\Psi_\infty}. \quad (12)$$

Условие существования структуры, показанной на рис. 12а, соответствует

$$\tilde{\rho}_i > \tilde{\rho}_{cr} = -\frac{2\nu\mu_\Sigma}{\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0}. \quad (13)$$

Структура детонационного типа, показанная на рис. 12б, существует при условии

$$\tilde{\rho}_{cr1} < \tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_{cr}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{\rho}_{cr1} \approx -\frac{2\nu\mu_\Sigma}{2\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0}.$$

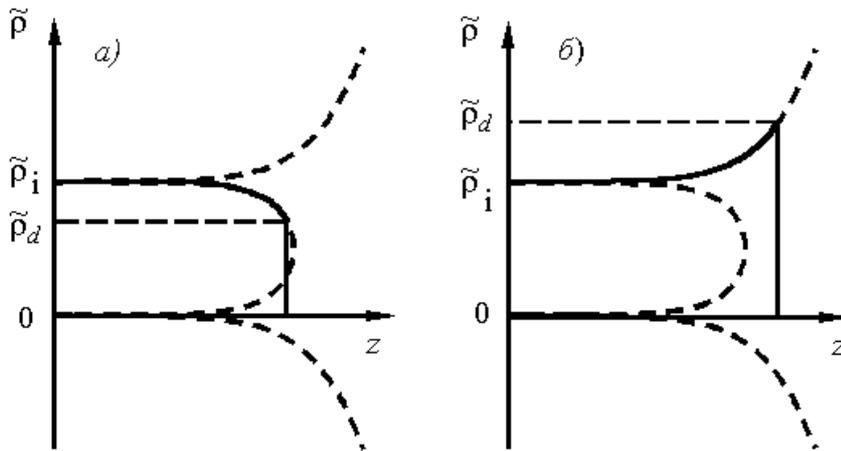


Рис. 12. Стационарные решения общего эволюционного акустического уравнения, описываемые интегральными кривыми (рис. 11а)

Эти структуры в точности соответствуют ударноволновым структурам (рис. 10), определенным из анализа ударных адиабат в разделе 1, с тем отличием, что теперь профиль ударной волны можно описать количественно. В пренебрежении коэффициентом низкочастотной вязкости  $\eta_0$  условия существования структур, полученные двумя методами, также полностью совпадают.

Кроме структур ступенькообразного вида уравнение (10) при отрицательной дисперсии и отрицательной полной вязкости имеет ещё одно очень важное решение. Это сильно асимметричный импульс с экспоненциальным задним фронтом (рис. 13а):

$$\tilde{\rho}(z) = \rho_p \exp\left[\frac{(z - z_0)v\tilde{\Psi}_0}{2\Psi_\infty}\right], \quad (15)$$

где амплитуда импульса

$$\rho_p = 2\tilde{\rho}_{cr1}. \quad (16)$$

Если построить фазовую плоскость, то этому импульсу соответствует сепаратрисное движение (рис. 13б) [73]. Полученный импульс является совершенно новой стационарной структурой. Он имеет широкий спектр, поэтому не мог быть описан используемыми ранее высокочастотными или низкочастотными уравнениями.

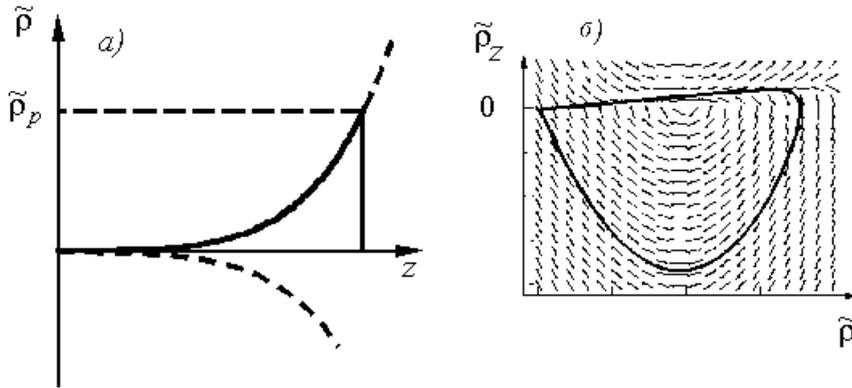


Рис. 13. Стационарный импульс и описывающая его сепаратриса

Этот импульс распространяется со скоростью

$$w_p = -\frac{2\nu\mu_\Sigma\Psi_\infty}{2\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0},$$

что, с точностью до величины  $\eta_0$ , совпадает с полученным ранее в разделе 1 значением скорости предельно устойчивой ударной волны. Далее будет показано, что неустойчивая ударная волна распадается именно на такие импульсы.

#### 4. Численное моделирование эволюции возмущений малой амплитуды в неравновесной среде

Нестационарная эволюция возмущений типа «ступенька» в среде с отрицательной полной вязкостью  $\mu_\Sigma < 0$  и отрицательной дисперсией исследовалась численно с помощью метода расщепления. В «расщепленном» виде общее эволюционное акустическое уравнение (8) сводилось к решению системы двух уравнений [73]

$$f_\zeta - \nu f = \nu \left[ \frac{m}{2} \tilde{\rho}_\zeta - (\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0) \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta + (\eta_\infty - \eta_0) \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} \right], \quad (17)$$

$$\tilde{\rho}_y + \Psi_\infty \tilde{\rho} \tilde{\rho}_\zeta - \eta_\infty \tilde{\rho}_{\zeta\zeta} = f. \quad (18)$$

Численное решение системы (17), (18) рассчитывалось следующим образом. Начальное возмущение  $\tilde{\rho}(\zeta, y = 0)$  в виде ступеньки амплитуды  $\tilde{\rho}_i$  подставлялось в правую часть уравнения (17), для решения которого использовалась схема первого порядка. Затем находилось решение уравнения (18) с известной правой частью по неявной схеме второго порядка ап-

проксимации по  $\zeta$  методом прогонки. После этого известное решение уравнения (18) подставлялось в правую часть уравнения (17), и находилась функция  $f$ . Данный процесс продолжался до определенных значений «времени»  $y$ . Значения параметров системы (17), (18) приведены выше, в разд. 1 для  $\text{CO}_2$ -содержащей лазерной смеси.

При выполнении условия (13) начальное возмущение в виде ступеньки в процессе эволюции стремилось к стационарной структуре с плавным нарастанием амплитуды за скачком уплотнения, показанной на рис. 10 (кривая 1). Скорость и амплитуда получаемой структуры полностью совпадают с ранее полученными из анализа ударных адиабат и аналитического решения стационарного уравнения (10).

При выполнении условия (14) начальное возмущение эволюционировало в стационарную структуру детонационного типа с плавным убыванием амплитуды за скачком уплотнения (рис. 10, кривая 2).

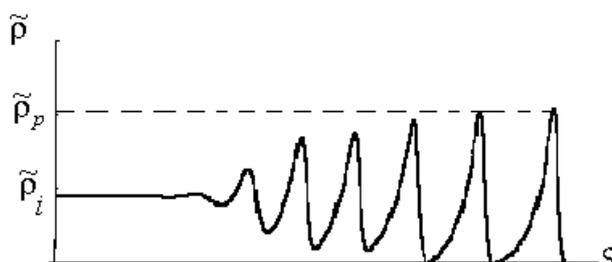


Рис. 14. Эволюция возмущения типа «ступенька» при  $\tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_{cr1}$

При  $\tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_{cr1}$  «ступенька» становилась неустойчивой и распадалась на последовательность стационарных импульсов (рис. 14). При  $\mu_\gamma \gg \eta_\infty$ , амплитуда стационарного импульса  $\rho_p$  совпадает с (15). Импульс имеет экспоненциальный «хвост», описываемый зависимостью (14). Ширина переднего фронта  $\sim \eta_\infty / \mu_\gamma$ . Полученный импульс является автоволной, т.к. его амплитуда, скорость и форма определяется только параметрами неравновесной среды.

Как показано на рис. 15, тот же автоволновой импульс возникает и при эволюции возмущения типа «колокол». При этом получен ещё один класс автоволновых решений – периодическая волна с ненулевым средним, амплитуда и период которой также не зависят от амплитуды или площади начального возмущения. Аналитические выражения для амплитуды и периода этой периодической автоволны пока не получены.

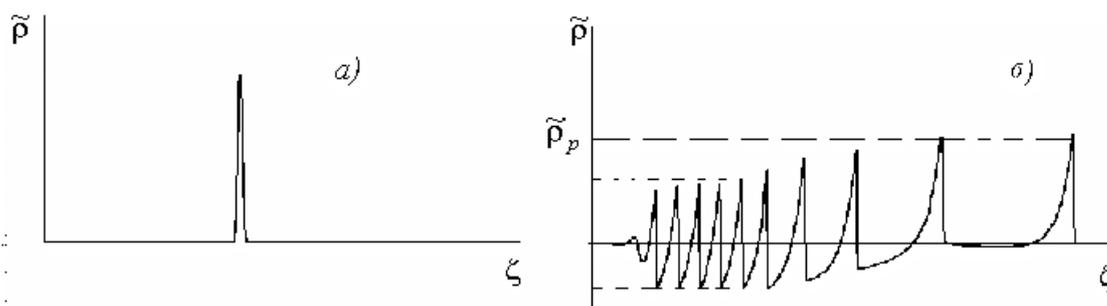


Рис. 15. Эволюция возмущения типа «колокол»

## 5. Стационарные структуры в неравновесной среде с отрицательным коэффициентом нелинейности

До сих пор речь велась о положительном низкочастотном коэффициенте нелинейности. В неравновесной среде вполне возможен отрицательный знак этого коэффициента. Известно, что в средах с отрицательным коэффициентом нелинейности существуют стационарные ударные волны разрежения и постепенно расширяющиеся волны сжатия [61]. В рассматри-

ваемых неравновесных средах ситуация оказывается сложнее, так как только  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ , а  $\Psi_\infty > 0$ . Как впервые показано в [66], при  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ ,  $\Psi_\infty > 0$  возможно три новых режима эволюции начального возмущения типа «ступенька» с амплитудой  $\tilde{\rho}_i$ .

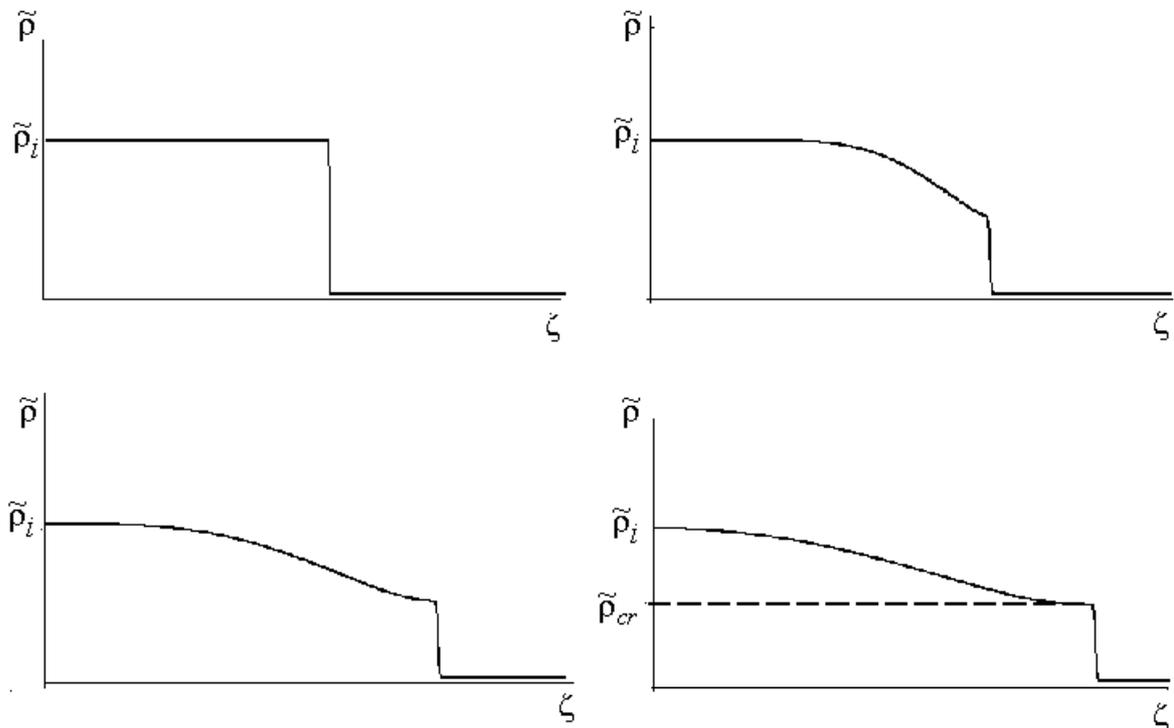


Рис. 16. Эволюция «ступеньки» при  $\tilde{\rho}_i > \tilde{\rho}_{cr}$

1. При выполнении условия (13) начальное возмущение в процессе эволюции превращалось в нестационарную структуру (рис. 16). Впереди распространяется стационарная автоволна в форме ступеньки с амплитудой  $\tilde{\rho}_{cr}$ . За ней распространяется постепенно расширяющаяся волна сжатия.

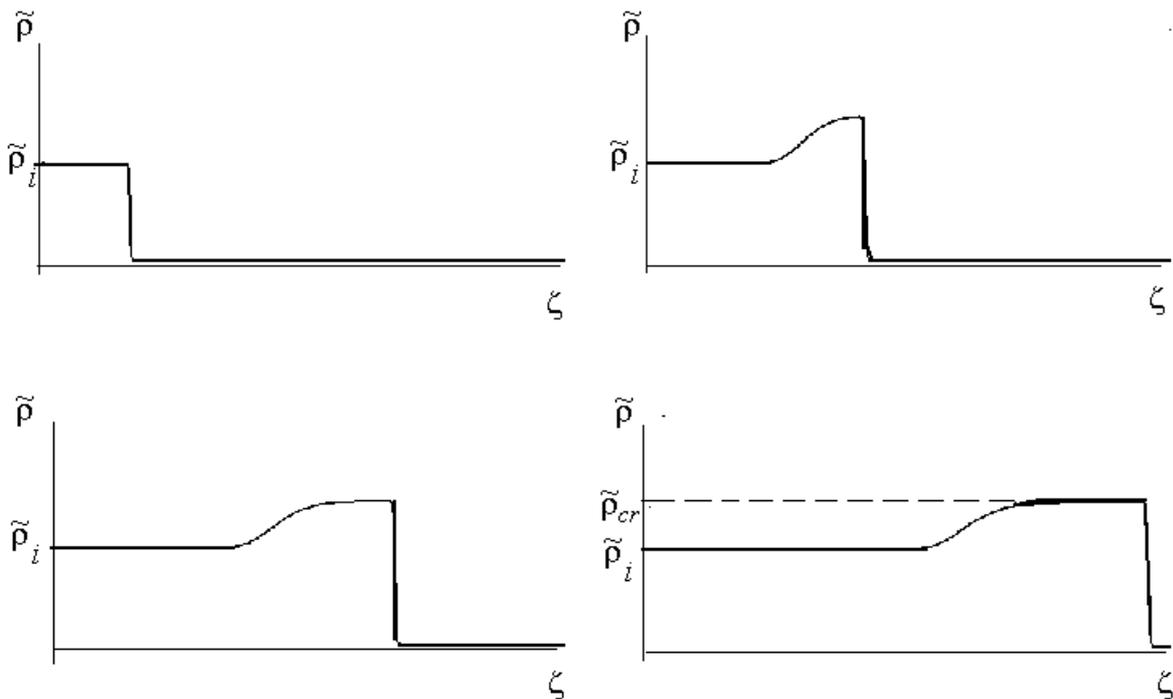


Рис. 17. Эволюция «ступеньки» при  $\tilde{\rho}_{cr} > \tilde{\rho}_i > \tilde{\rho}_{cr2}$

2. При выполнении условия  $\tilde{\rho}_{cr} > \tilde{\rho}_i > \tilde{\rho}_{cr2} = \Psi_\infty \tilde{\rho}_{cr} / (2\Psi_\infty - \tilde{\Psi}_0)$  начальное возмущение эволюционировало в структуру, состоящую из двух стационарных волн (рис. 17): автоволновой ступеньки с амплитудой  $\tilde{\rho}_{cr}$  и стационарной ударной волны разрежения с плавным убыванием амплитуды от  $\tilde{\rho}_{cr}$  до  $\tilde{\rho}_i$ . Волна разрежения движется со скоростью  $w_r = \Psi_\infty \tilde{\rho}_{cr} / 2 + \tilde{\Psi}_0 \tilde{\rho}_i / 2$ , автоволновая ступенька со скоростью  $w = \Psi_\infty \tilde{\rho}_{cr} / 2$ . Так как  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ , то  $w_r < w$  и ударная волна разрежения постепенно отстаёт от ступеньки.

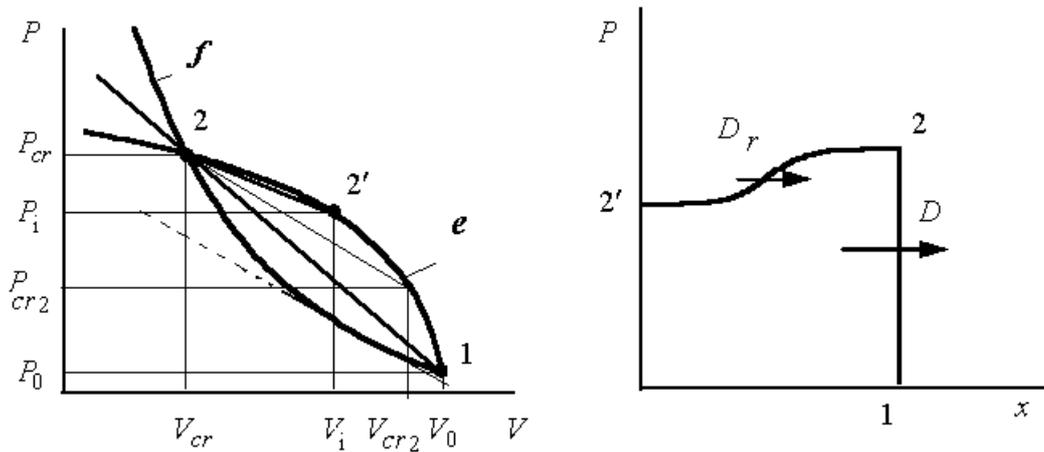


Рис. 18. Ударные адиабаты и расщепление ударной волны на автоволну сжатия и ударную волну разрежения в релаксирующем газе с отрицательной акустической дисперсией и  $\tilde{\Psi}_0 < 0$

Расщепление ударной волны на две стационарные структуры проиллюстрировано также с помощью картины ударных адиабат (рис. 18). Поскольку рассматривается случай  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ , то равновесная адиабата обращена выпуклостью вверх. Наклон хорды 12, проведённой в точку пересечения адиабат определяет скорость распространения автоволны. Наклон хорды 22' определяет скорость распространения стационарной ударной волны разрежения, бегущей по газу, предварительно сжатому автоволной. Наклон хорды, соединяющей точку пересечения адиабат и точку  $(V_{cr2}, P_{cr2})$ , определяет критическую скорость ударной волны разрежения, выше которой ударная волна разрежения становится эволюционно неустойчивой

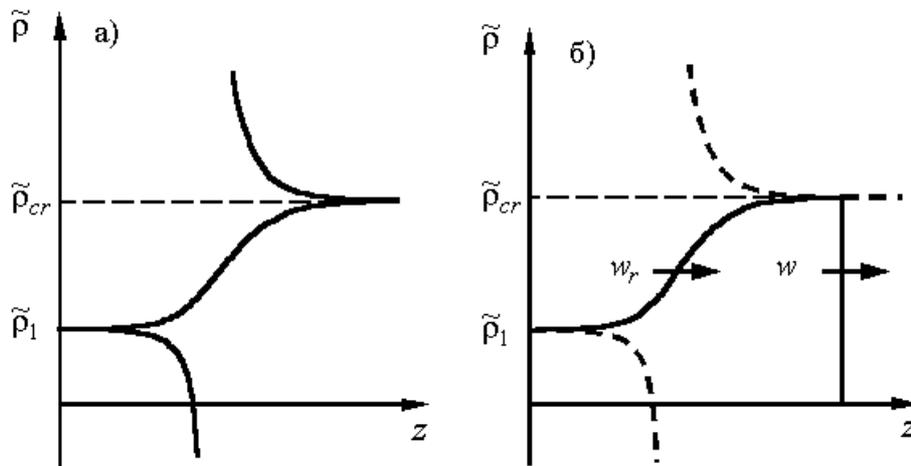


Рис.19. Интегральные кривые уравнения (10) при  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ , позволяющие описать расщепление ударной волны на две стационарные структуры

(скорость высокочастотного звука позади фронта оказывается меньше скорости ударной волны).

Аналитически обе стационарные структуры описываются с помощью решения уравнения (10), полученного при  $\tilde{\Psi}_0 < 0$ . Соответствующие интегральные кривые и стационарные структуры приведены на рис. 19 а,б. При  $\Delta\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{cr} - \tilde{\rho}_i \ll \tilde{\rho}_{cr}$  ударная волна разрежения имеет вид симметричного (относительно среднего уровня) скачка  $\tilde{\rho} \sim th(\zeta/2\Delta)$ ,  $\Delta \sim 2\tilde{\mu}_\Sigma / \tilde{\Psi}_0 \Delta\tilde{\rho}$ . С ростом  $\Delta\tilde{\rho}$  форма скачка искажается и становится несимметричной относительно среднего уровня.

3. Эволюционная неустойчивость ударной волны разрежения большой амплитуды приводило к нестационарному распаду начального возмущения малой амплитуды, такой что  $\tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_{cr2}$ . Начальная стадия распада показана на рис. 20 и завершалась численной неустойчивостью.

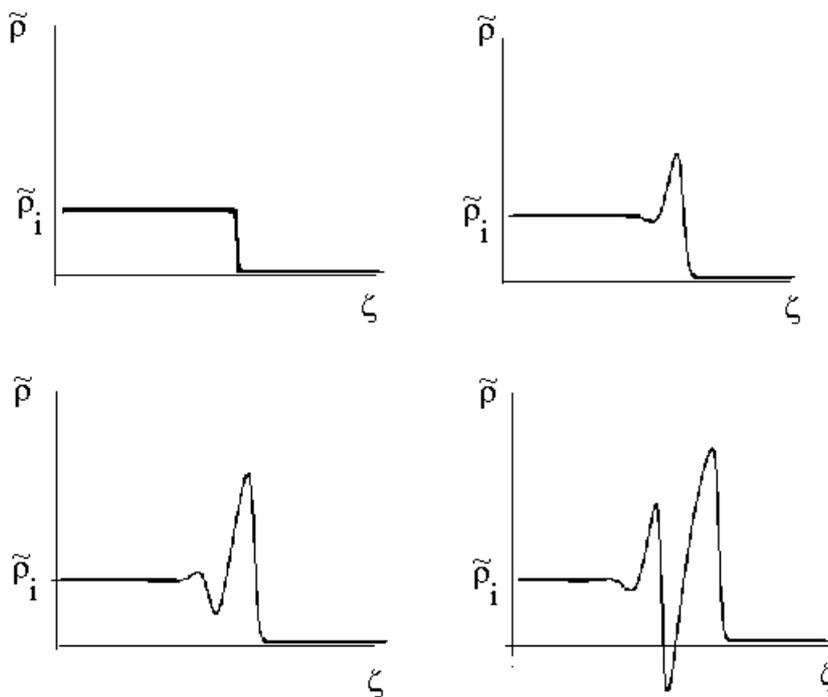


Рис. 20. Начальная стадия эволюции ступеньки с амплитудой  $\tilde{\rho}_i < \tilde{\rho}_{cr2}$

### Заключение

В настоящей работе исследовано изменение структуры ударной волны в зависимости от её амплитуды и скорости распространения в неравновесной газовой среде с экспоненциальной моделью релаксации. Найдена предельная скорость устойчивой ударной волны в среде отрицательной полной вязкостью и дисперсией. Показано, что ударная волна со скоростью меньшей, чем предельная, распадается на периодическую последовательность автоволновых сильно ассиметричных импульсов с экспоненциальным задним фронтом. Найдено условие расщепления ударной волны на ступенькообразную автоволну и стационарную ударную волну разрежения. Возможность существования полученных стационарных структур обусловлена проявлением качественно новых вязкостно-дисперсионных свойств неравновесной среды, прежде всего отрицательной второй вязкости и отрицательной дисперсии. Полученные новые стационарные структуры описываются аналитически, поэтому они могут

быть также использованы в качестве эталонных при отладке сложных численных схем, моделирующих газодинамику реальных неравновесных сред.

### Благодарности

Работа выполнена в рамках российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование», при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области, Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bauer H.J., Bass H.E. Sound amplification from controlled excitation reactions // *Phys. Fluid.* 1973, Vol. 16, №7, p. 988-996.
2. Борисов А.А. Длинноволновые возмущения в реагирующих средах. – В сб. Исследования по гидродинамике и теплообмену. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР. 1976, с. 94-95.
3. Кириллов И.А., Потапкин Б.В., Русаков В.Д. и др. Дисперсия и усиление звуковых волн в химически активной плазме колебательно-возбужденных молекул // *ХВЭ.* 1983, том 17, №6, с. 519-522.
4. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Возбуждение волн в неравновесном газе с VRT-механизмом релаксации // *ЖТФ,* 1985, том 55, №4, с. 754-756.
5. Коган Е.Я., Моисеев С.С., Молевич Н.Е., Тур А.В. Возбуждение вихревых структур в неравновесном молекулярном газе // *ЖТФ,* 1985, том 55, №10, с. 2036-2038.
6. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Звуковые волны в неравновесном молекулярном газе // *Известия Вузов СССР. Физика.* 1986, том 29, № 7, с. 53-58.
7. Коган Е.Я., Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Влияние отрицательной второй вязкости на распространение звуковых волн In: *Proc. XI Int. Symp. Nonlinear Acoustics* (Ed. by V.K. Kedrinskii) Novosibirsk, USSR, 1987, Vol. 1, p. 458-462.
8. Осипов А.И., Уваров А.В. Вторая вязкость в колебательно-неравновесном газе // *Вестник МГУ. Физика. Астрономия.* 1987, том 28, № 6, с. 52-56.
9. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах // *ЖЭТФ.* 1988, том 94, № 3, с. 128-132.
10. Завершинский И.П., Коган Е.Я. Ионизационная вторая вязкость в плазме и эволюция акустических волн // *Письма ЖТФ.* 1988, том 14, № 16, с. 1483-1486.
11. Дунаевский Н.А., Жданок С.А., Напартович А.П., Старостин А.Н. Дисперсия и поглощение ультразвука в колебательно-возбужденном газе ангармонических молекул // *ПМТФ.* 1988, № 4, с. 33-39.
12. Борисов А.А., Шарыпов О.В. О формировании волны пузырьковой детонации // *Изв. СО АН СССР. Сер. Тех. Наук.* 1990, № 2, с. 50-59.
13. Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. О механизме усиления звука в слабоионизованном газе // *ЖЭТФ.* 1991, том 99, № 8, с. 422-427.
14. Галечян Г.А., Завершинский И.П., Коган Е.Я., Мкртчян А.Р., Молевич Н.Е. О механизме формирования анизотропии коэффициентов усиления звука в газоразрядной плазме // *Препринт №1.* Ереван: Институт прикладных проблем физики АН РА, 1991, 20 с.
15. Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Акустические волны в частично ионизованном газе // *Акуст. журн.* 1992, том 38, № 4, с. 702-709.
16. Осипов А.И., Уваров А.В. Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // *УФН.* 1992, том 162, № 11, с. 1-42.
17. Malnev V.N. Waves in vibration nonequilibrium media // *Preprint ITP. Kiev.* 1992, 21E.

18. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Волны в среде с отрицательной второй вязкостью // Труды ФИАН СССР. 1992, том 222, с. 45-95.
19. Tankeshwar K. Generalized negative bulk viscosity in liquids// Journal of Physics: Condensed Matter. 1994, Vol. 6, №44, p. 9295-9300.
20. Malnev V.N., Nedospasov A.V. About some peculiarities of streamline of bodies by flows of vibration nonequilibrium gases. In: Perspectives of MHD and plasma technologies in aerospace applications. M.: IVTAN, 1999, p. 128-130.
21. Молевич Н.Е., Ненашев В.Е. Влияние объемной вязкости на распространение звука в неравновесных газозвесах //Акустический журнал. 2000. том 46, №4, с. 539-544.
22. Lensky N.G., Lyakhovsky V., Navon O. Expansion dynamics of volatile-supersaturated liquids and bulk viscosity of bubbly magmas// J. Fluid Mech, 2002, Vol. 460, p. 39-56.
23. Молевич Н.Е. Отрицательная вторая вязкость в динамике неравновесных газовых сред. Диссертация на соиск. д.ф.-м.н. М: МИФИ. 2002.
24. Torosyan, O. S, Mkrtychyan, A. R. Theory of the acoustic instability and behavior of the phase velocity of acoustic waves in weakly ionized plasma, Plasm. Phys. Rep. 2003, Vol. 29, p. 346-354.
25. Молевич Н.Е. Дисперсия скорости звука и вторая вязкость в средах с неравновесными химическими реакциями // Акустический журнал. 2003, том 49, №2, с.229-232.
26. Molevich, N. E. Acoustical properties of nonequilibrium media, Paper AIAA- 2004- 1020.
27. Molevich N.E., Klimov A. I., Makaryan V.G. Influence of thermodynamical nonequilibrium on acoustical properties of gases//Int. J. Aeroacoustics, 2005, Vol. 4, № 3&4. p.345-355.
28. Климов А.И., Мишин Г.И., Федотов А.Б., Шаховатов В.А. Распространение ударной волны в нестационарном тлеющем разряде // Письма ЖТФ. 1989, том 15, № 20, с. 31-36.
29. Быстров С.А., Иванов В.И., Шугаев Ф.В. Распространение плоской ударной волны в слабоионизированной плазме // Физ.плазмы. 1989, том 15, № 5, с. 558-562.
30. Басаргин И.В., Мишин Г.И. Предвестник ударной волны в плазме тлеющего разряда // Письма ЖТФ. 1989, том 15, № 8, с. 55-60.
31. Мишин Г.И., Климов А.И., Гридин А.Ю. Измерения давления и плотности в ударных волнах в газоразрядной плазме // Письма ЖТФ. 1991, том 17, №16, с. 84-89.
32. Гридин А.Ю., Климов А.И., Молевич Н.Е. Распространение ударных волн в плазме тлеющего разряда // ЖТФ. 1993, том 63, №3, с. 157-162.
33. Ganguly B. N., Bletzinger P. and Garscadden A. Shock wave damping and dispersion in non-equilibrium low pressure argon plasmas, Phys. Lett. A, 1997, Vol. 230, p. 218-222.
34. Bailey, W. F. and Hilbun, W. M., Baseline of thermal effects on shock propagation in glow discharge, in: Proceedings of the 1st Weakly Ionized Gases Workshop, U.S. Air Force Academy, 1997, GG3–GG18.
35. Macheret, S. O., Ionikh, Yu. Z., Chernysheva, N. V., Yalin, A. P., Martinelli, L. and Miles, R. V., Shock wave propagation and dispersion in glow discharge plasmas // Phys. Fluids, 2001, Vol. 13, p. 2693-2705.
36. Евтюхин Н.В., Марголин А.Д., Шмелёв В.И. О природе ускорения ударных волн в плазме тлеющего разряда // Хим. физ. 1984, том 3, № 9, с. 1322-1327.
37. Бабаева Н.Ю. О структуре ударных и взрывных волн в неоднородной плазме газового разряда // Хим. Физ. 1993, том 12, № 3, с. 357–360.
38. Mishin, G. I. Акустические и ударные волны в газоразрядной плазме // Препринт ФТИ. №1357. Ленинград. 1989.
39. Мишин Г.И. Уравнение состояния слабоионизированной газоразрядной плазмы // Письма ЖТФ. 1997, том 23, № 14, с. 81-88.
40. Мишин Г.И. Структура газоразрядной слабоионизированной плазмы // Письма ЖТФ. 1998, том 24, № 11, с. 80-86.

41. Leonov S., Bityurin V., Brovkin V., Klimov A., Kolesnichenko Yu., Savelkin K., Van Wie D. Features of shock wave propagation through a longitudinal pulse discharge. In: 2<sup>nd</sup> Workshop on Magneto-plasma aerodynamics in aerospace applications. M.: IVTAN, 2000, p. 263-268.
42. Бедин А.П. Об особенностях течений низкотемпературной газоразрядной плазмы // Письма ЖТФ. 1997, том 23, № 16, с. 88-93.
43. Бедин А.П. Газодинамические явления при движении ударных волн и тел в низкотемпературной неравновесной плазме // Письма ЖТФ. 1998, том 24, № 18, с. 44-49.
44. Барышников А.С., Басаргин И.В., Чистякова М.В. Экспериментальное и теоретическое изучение распространения ударных волн в реагирующих газах для режимов перестройки структуры течения // ЖТФ. 2001, том 71, № 3, с. 17-21.
45. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986, 736 с.
46. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газ // ЖТФ. 1986, том 56, № 5, с. 941-943.
47. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Отражение звука от границы равновесного и неравновесного колебательно-возбужденного газа // Акустический журнал. 1987, том 33, № 2, с. 252-255.
48. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. Отражение звука от слабонеоднородной усиливающей среды // Акустический журнал. 1988, том 34, №3, с. 547-550.
49. Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Параметрическое взаимодействие акустических волн с возмущениями плоскопараллельных течений неравновесных газов // Акустический журнал. 1999, том 45, №1, с. 69-73.
50. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. ВРМБ в среде с отрицательной второй вязкостью // Квантовая электроника. 1987, том 14, №8, с. 1678-1684.
51. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. ВТР в термодинамически неравновесном газе // Квантовая электроника. 1988, том 15, №4, с. 844-846.
52. Молевич Н.Е. Усиление вихревых и тепловых волн в процессе вынужденного рассеяния звука в термодинамически неравновесных средах // ТВТ. 2001, том 39, № 4, с. 1-5.
53. Молевич Н.Е. Возбуждение встречных акустических течений в термодинамически неравновесных газовых средах // Письма ЖТФ. 2001, том 27, № 21, с. 26-28.
54. Молевич Н.Е. Нестационарная самофокусировка звуковых пучков в колебательно-возбужденном молекулярном газе// Акустический журнал. 2002, том 48, №32, с. 248-252.
55. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Звуковые волны в потоках с отрицательной второй вязкостью // Акустический журнал. 1995, том 41, № 4. с. 613-616.
56. Молевич Н.Е. Асимптотический анализ устойчивости плоскопараллельного пограничного слоя сжимаемого релаксирующего газа // Известия РАН. МЖГ. 1999, №5, с. 82-88.
57. Bertolotti F.P. The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary layer stability// J. Fluid Mech. 1998, Vol. 372, p. 93-118.
58. Knestyarin V.N., Zavershinsky I.P. Nonlinear critical layer of non-equilibrium gas. In: Proc. 15<sup>th</sup> Int. Conf. MHD Energy Conversion and 6th Workshop on Magneto-plasma aerodynamics. M.: IVTAN, 2005, Vol. 2, p. 651-655.
59. Кларк Дж., Макчесни М. Динамика реальных газов. М.: Мир, 1967, 566 с.
60. Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Сверхзвуковое обтекание пластины потоком колебательно-возбужденного газа // Материалы III Всероссийского семинара Моделирование неравновесных систем-2000. Красноярск: КГТУ. Октябрь 2000, с. 151-152.
61. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963, 632 с.
62. Буянова Е.А., Ловецкий Е.Е., Силаков В.П., Фетисов В.С. Стационарные ударные волны в неравновесном двухатомном газе // Хим. физ. 1982, том 1, № 12, с. 1701-1703.
63. Осипов А.И., Уваров А.В. Структура ударных волн в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Хим. физ. 1984, том 3, № 11, с. 1612-1615.

64. Евтюхин Н.В., Марголин А.Д., Шмелёв В.И. Взаимодействие ударных волн с колебательно-возбуждённым газом // Хим. физ. 1985, том 4, № 9, с. 1276-1280.
65. Коган Е.Я., Молевич Н.Е. Ударные волны разрежения в неравновесном колебательно-возбужденном газе // Акустический журнал. 1993, том 39, №5, с. 951-954.
66. Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Слабые ударные волны в неравновесных средах с отрицательной дисперсией // ЖТФ. 2005, том 75, №6, С.13-18.
67. Рухадзе А.А., Силаков В.П., Чеботарев А.А. Распространение нестационарных ударных волн в колебательно-возбуждённом азоте // Краткие сообщ. физ. 1983, № 6, с. 18-23.
68. Встовский Г.В., Козлов Г.И. Распространение слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе // ЖТФ. 1986, том 56, № 8, с. 1536-1542.
69. Молевич Н.Е. Нелинейные уравнения в теории сред с отрицательной второй вязкостью // Сибирский физико-технический журнал. 1991, №1, с. 133-136.
70. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997, 496 с.
71. Остроумов Г.А. Основы нелинейной акустики. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1967, 132 с.
72. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 288 с.
73. Макарян В.Г., Молевич Н.Е. Структура газодинамического возмущения в термодинамически неравновесной среде с экспоненциальной моделью релаксации // Известия РАН. МЖГ. 2004, №5, с. 181-191.