

# Computer Simulation of the Supersonic Flow of a Viscous Compressible Gas around a Model Body on the Basis of the Quasi-Gas-Dynamic Algorithm

I. A. Shirokov<sup>1</sup>, T. G. Elizarova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991, Russia*

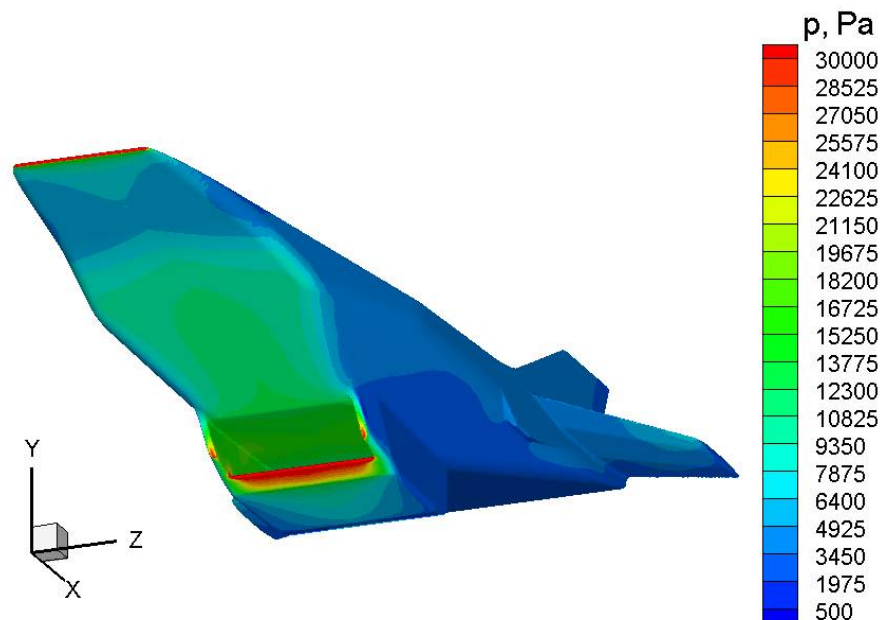
<sup>2</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, 125047, Russia*

ivanshirokov@inbox.ru

## Abstract

Results of the computer simulation of the air flow around a model body are presented. The calculations are carried out within the framework of the quasi-gas-dynamic algorithm. For the numerical modeling authors use the software package, developed for simulation of non-stationary viscous gas-dynamic flow around a body of arbitrary shape on tetrahedral unstructured spatial grids. The software package provides an opportunity to set an arbitrary angle of attack, to determine the distribution of aerodynamic characteristics on the model surface and to calculate the forces applied to the model. The forces are defined as a distribution on the surface of a model body, and integrally also. The values of drag and lift coefficients are obtained.

Keywords: hypersonic cruise vehicle, quasi-gas-dynamic algorithm, unstructured grids.



Pressure distribution on the surface of the model body

УДК 519.6.533.5

# Компьютерное моделирование обтекания модели сверхзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа на основе квазигазодинамического алгоритма

И.А. Широков<sup>1</sup>, Т.Г. Елизарова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ф-т ВМК, Россия, Москва, 119991, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52*

<sup>2</sup> *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия, Москва, 125047, Миусская пл. 4а*

[ivanshirokov@inbox.ru](mailto:ivanshirokov@inbox.ru)

## Аннотация

Представлены результаты, полученные при расчете обтекания модели сверхзвуковым потоком воздуха. Расчеты проводятся в рамках квазигазодинамического алгоритма. Для численного моделирования используется программный комплекс, позволяющий проводить расчеты нестационарных вязких газодинамических течений для тел произвольной формы с использованием тетраэдральных неструктурированных пространственных сеток. Программный комплекс позволяет задавать произвольный угол атаки, определять распределения аэродинамических характеристик по поверхности модели и вычислять силы, действующие на модель. Силы определяются как в виде распределения по поверхности, так и интегрально. Получены значения аэродинамических коэффициентов сопротивления и подъемной силы.

Ключевые слова: гиперзвуковой летательный аппарат, квазигазодинамические уравнения, неструктурированные сетки.

## 1. Введение

В работе приводятся результаты прямого численного моделирования обтекания трехмерной модели гиперзвукового летательного аппарата и вычисляются наиболее важные аэродинамические характеристики этой модели. Расчет течения впервые производится с использованием квазигазодинамических (КГД) уравнений [1] без применения традиционных для подобных задач вычислительных процедур (лимитеров или ограничителей потоков). КГД уравнения ориентированы на расчет нестационарных течений. В [2] было показано, что численный алгоритм, основанный на КГД уравнениях, позволяет моделировать турбулентные течения при небольших числах Рейнольдса и Маха без привлечения дополнительных моделей турбулентности, таких, как алгебраические модели или модели LES. В представленных далее расчетах модели турбулентности также не применяются.

Система КГД уравнений в виде законов сохранения приведена, например, в [1] и [2]. В приведенных далее расчетах используется вид этой системы, записанной в декартовых координатах для вязкого политропного газа в отсутствии внешних сил и источников энергии. Конкретный вид используемой системы уравнений приведен в [1, с. 95] и [2].

КГД система уравнений отличается от системы уравнений Навье–Стокса (НС) наличием дополнительных КГД слагаемых, пропорциональных малому параметру  $\tau$  размерности времени. КГД слагаемые обеспечивают дополнительную диссипацию, присущую этой системе по сравнению с системой уравнений НС. Указанные слагаемые являются сильно нелинейными и имеют вид вторых пространственных производных от параметров течения: скорости, плотности и давления. В результате появляется возможность использовать про-

пространственные аппроксимации системы с помощью центральных разностей с сохранением условия устойчивости Куранта для явной по времени разностной схемы.

В представленной работе алгоритм, построенный на основе КГД системы (КГД алгоритм) позволил получить адекватную структуру течения при обтекании модели сверхзвуковым потоком вязкого газа и получить интегральные аэродинамические характеристики.

## 2. Постановка задачи и численный алгоритм

Рассматривается задача численного моделирования обтекания трехмерной модели гиперзвукового летательного аппарата X-43 ([3], [4]) расположенной под углом атаки  $2^\circ$ . Общий вид модели показан на рис. 1, *а*. Схема расчетной области изображена на рис. 1, *б*. Набегающий воздушный поток направлен в сторону отрицательных значений оси X. Для экономии машинного времени используется расчетная область, содержащая половину реальной области обтекания, ограниченная плоскостью симметрии  $z=0$ .

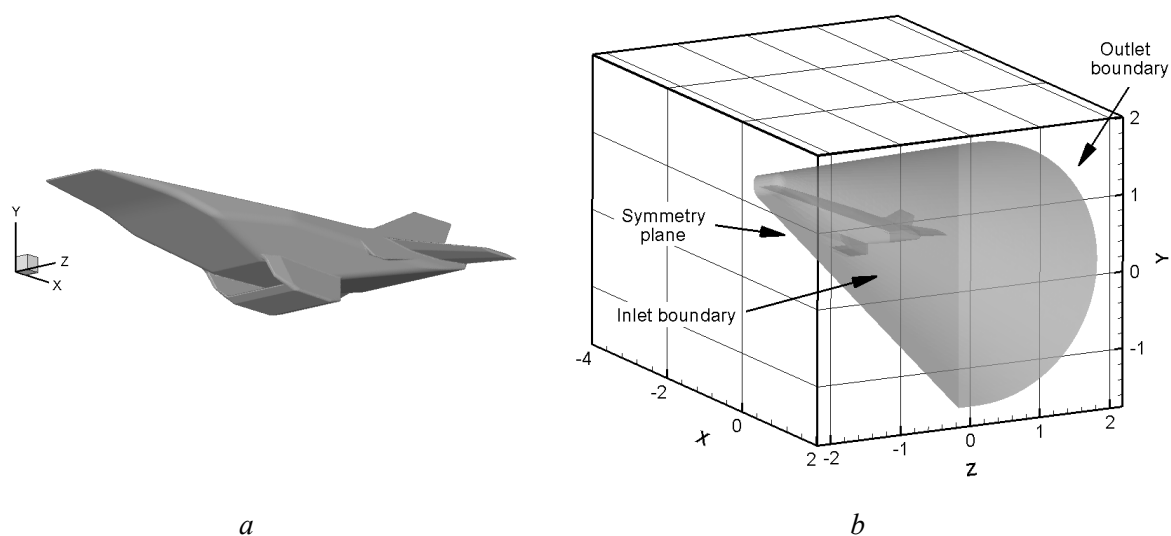


Рис. 1. Общий вид модели (*а*), схема расчетной области (*б*)

Основой реализации КГД алгоритма служит программный комплекс, созданный в ИПМ им. М.В. Келдыша А.А. Свердлыным и Э.М. Кононовым [5]. Для возможности гибкого задания начальных данных, а также с целью вычисления параметров обтекания программный комплекс был доработан. Моделирование течения газа на основе КГД алгоритма проводится по следующей схеме.

Газодинамические параметры (плотность, скорость, давление, температура, энергия) приводятся к безразмерному виду. В качестве размерных параметров выбраны характерная длина (1 м), плотность и скорость звука в набегающем невозмущенном потоке. Расчетная сетка строится в формате свободно распространяемой библиотеки TetGen [6] (файлы .ele, .face, .node). На рис. 2–3 приведен общий вид расчетной сетки в сечении плоскости симметрии, фрагменты сетки в окрестности носовой и хвостовой частей модели, и фрагмент сетки на поверхности модели. Общее число узлов сетки 2205898, число тетраэдральных элементов 12452064, число узлов на поверхности модели 433170. Для устойчивости и точности расчета течения в окрестности носовой части модели, где градиенты газодинамических параметров очень велики, следует использовать максимально (насколько это возможно) равномерную пространственную сетку, для которой контрольные объемы имеют достаточно правильную форму (рис. 2, *б*). Следует отметить, что при использовании авторами сеток меньшей размерности для модели X-43 не удавалось получить адекватную картину течения.

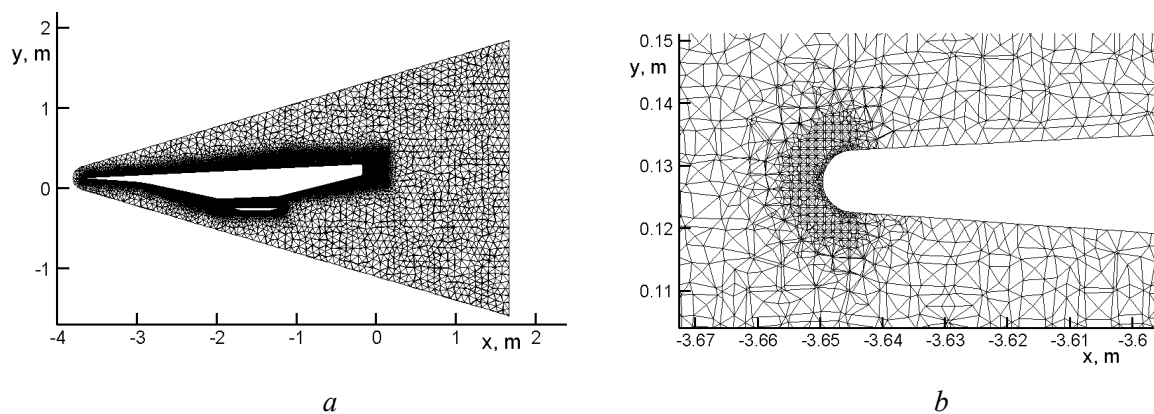


Рис. 2. Общий вид расчетной сетки (а), фрагмент сетки в окрестности носовой части модели (б)

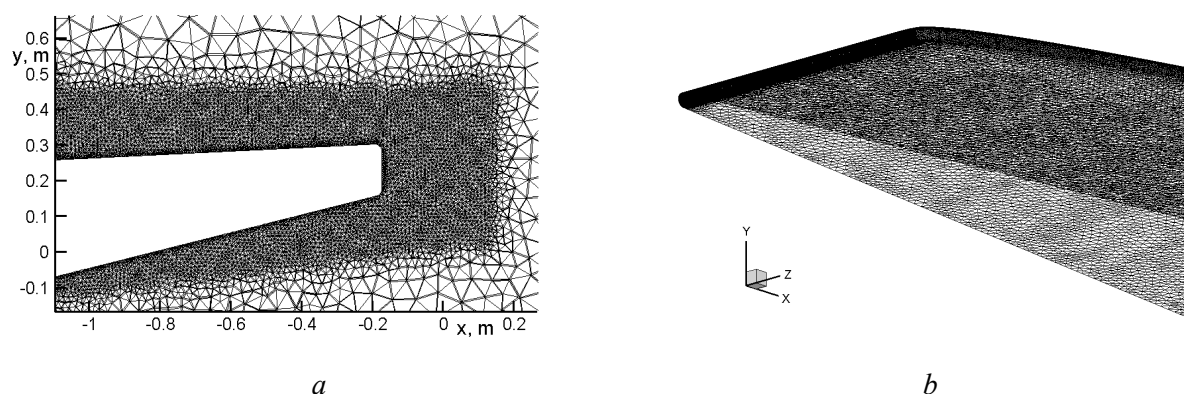


Рис. 3. фрагмент сетки в окрестности хвостовой части модели (а), фрагмент сетки на поверхности модели (б)

Значения газодинамических параметров определяются в узлах сетки. Значения газодинамических переменных в точках расчетной области, расположенных между узлами сетки, определяются как среднее арифметическое значений в узлах. Конечно-разностная аппроксимация макроскопических КГД уравнений строится методом контрольных объемов. Баричесентрический контрольный объем строится вокруг каждого узла сетки. Решение начально-краевой задачи для сеточных аналогов КГД уравнений находится по явной по времени конечно-разностной схеме. Пространственные производные аппроксимируются со вторым порядком точности, производные по времени с первым порядком точности.

Как показывает практика численных расчетов, для моделирования течений с ударными волнами или большими числами Рейнольдса часто оказывается, что молекулярной вязкости и КГД диссипации не хватает для обеспечения монотонности схемы в окрестности резких градиентов решения, например, ударных волн. Для обеспечения этой монотонности удобно ввести дополнительную искусственную диссипацию следующим способом.

Входящий в КГД алгоритм коэффициент  $\tau$  связывается с шагом пространственной сетки и в безразмерном виде вычисляется как

$$\tau = \frac{\text{Ma}}{\text{Re}} T^\omega \frac{1}{\rho \text{Sc}} + \alpha \frac{h}{c},$$

где  $\text{Ma}$  – число Маха;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $T$  – локальная температура;  $\omega$  – показатель межмолекулярного взаимодействия;  $\rho$  – локальное давление;  $\text{Sc}$  – число Шмидта;  $\alpha$  – настроечный параметр КГД алгоритма ( $0 < \alpha \leq 2$ );  $h$  – характерный локальный размер пространственной сетки;  $c = \sqrt{T}$  – локальная скорость звука [1], [2]. Заметим, что локальные величины определяются положением расчетной ячейки и моментом времени.

Коэффициент динамической вязкости определяется как

$$\mu = \frac{\text{Ma}}{\text{Re}} T^\omega + \delta \tau p \text{Sc}$$

В этой формуле первое слагаемое представляет собой молекулярную вязкость, а второе является регуляризирующей добавкой. Включенная в алгоритм искусственная диссипация с настроенными коэффициентами  $\alpha$  и  $\delta$  выбирается вычислителем вручную в соответствии с желаемой точностью и устойчивостью разностного решения задачи. Эта особенность КГД алгоритма делает его настройки прозрачными и понятными пользователю. Базовыми значениями коэффициентов являются  $\alpha = \delta = 1$ . Уменьшение этих коэффициентов приводит к уточнению численного решения. В отдельных случаях настроенные коэффициенты могут зависеть от параметров течения. В дальнейших расчетах коэффициент  $\alpha$  считался постоянным, а при вычислении коэффициента  $\delta$  использовалась следующая зависимость от локального числа Маха: при  $\text{Ma} \geq 3$   $\delta = 1$ , при  $\text{Ma} \leq 2$   $\delta = 0.5$ , в промежутке между значениями числа Маха 2 и 3 коэффициент  $\delta$  линейно возрастает с числом Маха. Аналогичный способ зависимости искусственной вязкости от локального числа Маха описан в [2], глава 5. Коэффициент теплопроводности, входящий в навье-стоксовский тепловой поток, в безразмерном виде вычисляется как  $\kappa = \mu / [\text{Pr}(\gamma - 1)]$ .

В начальный момент на входной границе задаются параметры набегающего потока. Внутри расчетной области задаются такие же параметры, кроме скорости: газ в начальный момент неподвижен.

Граничные условия следующие. На входной границе значения набегающего потока поддерживаются постоянными. На выходной границе ставятся условия сноса, позволяющие газу свободно покидать область. На твердой границе обтекаемого тела ставятся условия непротекания (вектор скорости равен нулю), при этом используется дополнительное граничное условие КГД алгоритма: нормальные производные давления и плотности равны нулю [1]. На плоскости симметрии  $z = 0$  ставятся условия симметрии.

Шаг по времени вычисляется следующим образом:

$$\Delta t = \beta_C \frac{h}{c},$$

где  $\beta_C$  – число Куранта;  $h$  – характерный локальный размер пространственной сетки;  $c = \sqrt{T}$  – локальная скорость звука. Расчёты проводились на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [7], при этом применялось распараллеливание вычислений, основанное на декомпозиции расчетной области с использованием стандарта передачи сообщений MPI и библиотеки METIS [8].

### 3. Результаты расчетов

Ниже приведены результаты моделирования течения для следующих параметров: число Маха  $\text{Ma} = 7$ ; высота полета  $H = 29$  км; число Рейнольдса (отнесённое к 1 м)  $\text{Re} = 3.1 \times 10^6$  1/м; угол атаки  $2^\circ$ . Газовая постоянная  $R = 287$  Дж/(кг·К); показатель адиабаты  $\gamma = 7/5$ , число Прандтля  $\text{Pr} = 14/19$  [1]; показатель межмолекулярного взаимодействия  $\omega = 0.74$  [9]. Величина настроенного параметра КГД алгоритма  $\alpha = 0.5$ ; величина числа Куранта  $\beta_C = 0.1$  [1], [2]. Результаты представлены для момента безразмерного времени  $t = 3.35$ . При продолжении расчета с увеличением безразмерного времени картина течения и значения аэродинамических коэффициентов меняются мало, что говорит об установившемся характере полученных результатов. Расчет потребовал около 20 часов машинного времени при использовании 128 процессорных узлов вычислительного комплекса К-100 [7]. При этом было сделано 387849 итераций явной разностной схемы.

На рис. 4–7 изображены линии тока и контуры давления и температуры в сечении плоскости симметрии  $z = 0$ .

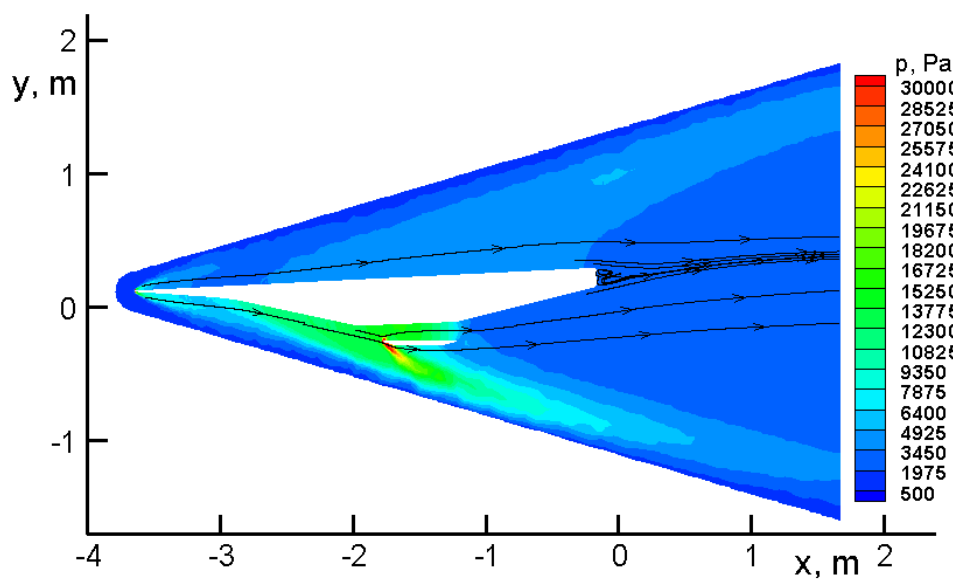


Рис. 4. Линии тока и контуры давления в плоскости симметрии

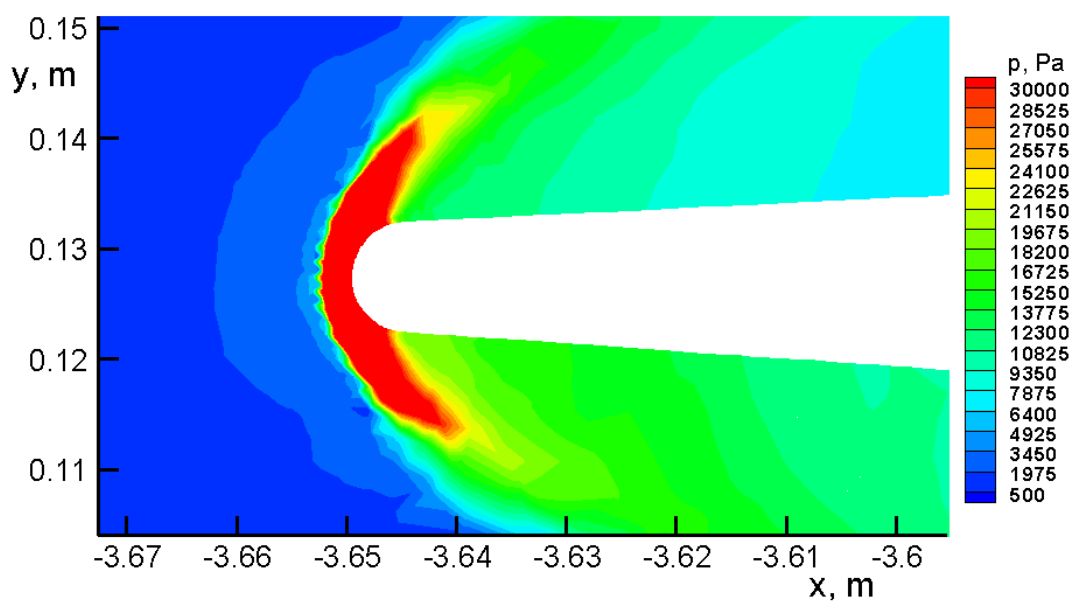


Рис. 5. Контурсы давления в увеличенном масштабе в плоскости симметрии

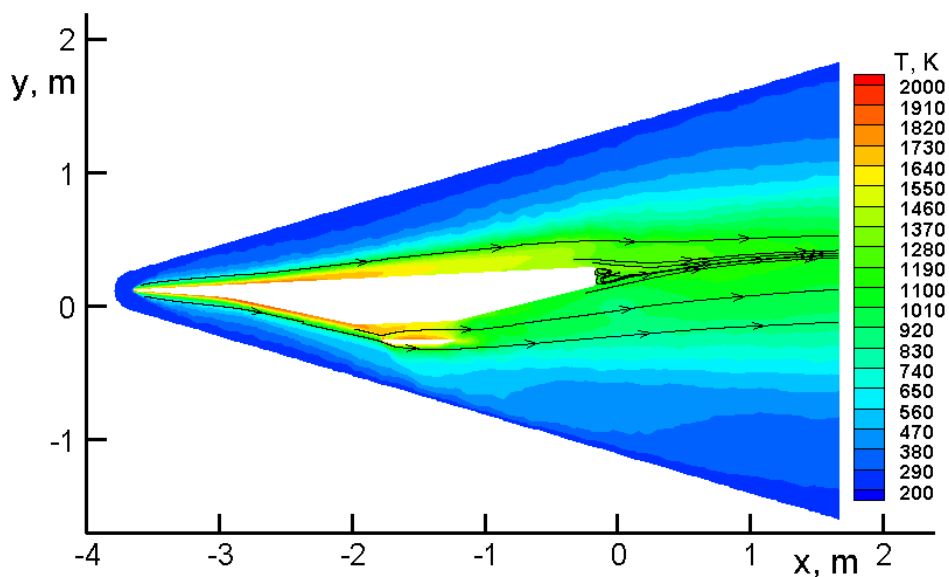


Рис. 6. Линии тока и контуры температуры в плоскости симметрии

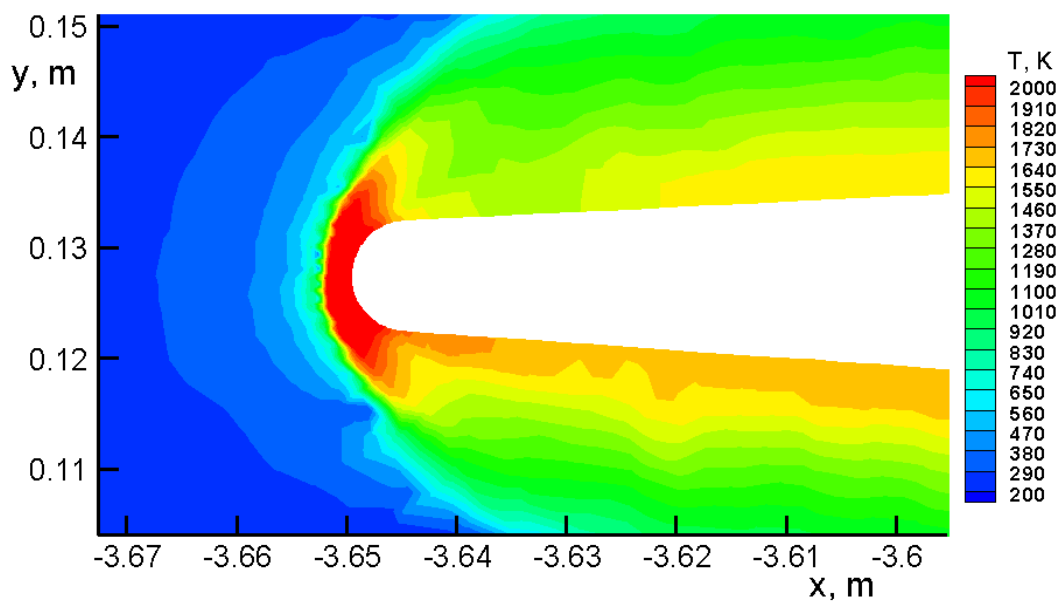


Рис. 7. Контур температуры в увеличенном масштабе

На рис. 8 показано распределение давления по поверхности модели. Это распределение служит основой для вычисления интегральных аэродинамических коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы. Методика вычисления аэродинамических коэффициентов описана в [3].

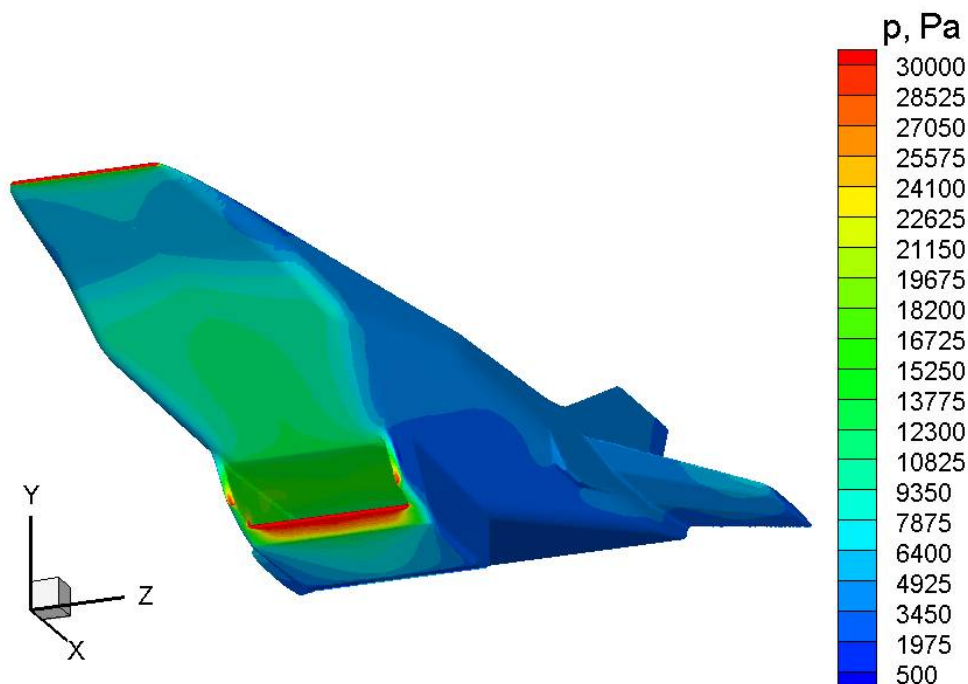


Рис. 8. Распределение давления по поверхности модели

В расчетах получены значения коэффициентов лобового сопротивления  $C_D = 0.02806$ , подъемной силы  $C_L = 0.07567$ . При этом площадь сечения модели считалась равной  $1.7593 \text{ м}^2$ . В работе [4] приведены следующие значения аэродинамических коэффициентов виртуальной модели ГЛА Х-43 для угла атаки  $4^\circ$ :  $C_D = 0.02676$ ,  $C_L = 0.05471$ . Видно, что вычисленный авторами коэффициент сопротивления находится в разумном согласии с данными, полученными авторами [4], а коэффициент подъемной силы заметно завышен. Такое расхождение можно объяснить завышенным значением искусственной вязкости, введенной для обеспечения устойчивости расчета. Вычислительная практика показывает, что дальнейшее уменьшение коэффициента  $\delta$  в области дозвукового течения в окрестности аппарата приводит к улучшению точности алгоритма и более аккуратному моделированию зоны течения в окрестности фюзеляжа.

#### 4. Заключение

Приведенные в работе результаты показывают, что КГД алгоритм позволяет проводить прямое численное моделирование сверхзвукового обтекания трехмерных моделей различной формы при реалистичных значениях чисел Маха и Рейнольдса.

Отличия данных расчетов от эталонных значений могут быть обусловлены завышенными значениями коэффициентов вязкости, которые использовались в расчетах для получения устойчивого решения задачи. Опыт различных расчетов также показывают, что КГД алгоритм позволяет наблюдать нестационарное поведение распределений плотности и скорости, что присуще реальным течениям [2].

Авторы выражают благодарность А.Е. Луцкому за ценное обсуждение, А.В. Северину и В.Г. Бобкову за помощь в проведении расчетов.

Работа поддержана грантом РФФИ 16-01 00048а.



## Литература

1. Elizarova T.G., Quasi-Gas Dynamic Equations, Springer, Dordrecht, 2009. ISBN 978-3-642-0029-5Д.
2. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. МАКС Пресс Москва, 2017. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29352202>
3. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. На пути к созданию модели виртуального ГЛА. I. –М.: ИПМех РАН, 2013.
4. Ханхасаева Я.В., Борисов В.Е., Луцкий А.Е. Энергетическое воздействие на обтекание гиперзвуковых летательных аппаратов. // 2016. Т. 17(4). <http://chemphys.edu.ru/issues/2016-17-4/articles/646/>
5. Поляков С.В., Кудряшова Т.А., Свердлин А.А. Расчет параметров течения газа вокруг спускаемого аппарата // Матем. моделирование. 20:7 (2008), С. 13–22.
6. TetGen: A quality tetrahedral mesh generator. <http://tetgen.berlios.de/>
7. K-100 System, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow; Available at <http://www.kiam.ru/MVS/resources/k100.htm>
8. Metis: family of multilevel partitioning algorithms. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/views/metis>
9. Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Clarendon Press, Oxford (1998).

Статья поступила в редакцию 19 января 2018 г.