

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК ДЛЯ АНАЛИЗА ИМПУЛЬСНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

В.В. Кузенов

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Аннотация

Рассматривается численная методика построения регулярных криволинейных адаптивных сеток в произвольных областях. Применяя многоблочную технологию расчетов, рассматриваемая численная методика позволяет построить неортогональные структурированные сетки даже в тех областях, где для дискретизации расчетной области обычно используются не структурированные расчетные сетки. С использованием разработанной численной методики построения сетки исследуются некоторые варианты истечения импульсных струй плазмы и газа.

THE USAGE OF REGULAR ADAPTIVE CELLS FOR ANALYSING PULSING SUPERSONIC PLASMA FLOWS

The numerical method of building regular adaptive cells in arbitrary spaces is presented. This method allows to build regular cells in volumes, where irregular cells are usually used. Some variants of plasma outflow is analyzed in cells, that were created using this numerical method.

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении различного рода задач математической физики требуется наличие простых и эффективных способов дискретизации расчетных областей, имеющих сложную криволинейную форму. Геометрически и динамически адаптивный алгоритм генерации сетки должен обладать определенным набором свойств: гладкость, простота построения и адаптивность (сетка должна сгущаться в областях, где происходит резкое изменение численного решения). Метод нахождения сетки должен также обладать свойством эллиптичности, т.е. определять влияние каждого узла сетки на множество прилегающих к нему узлов. Такого рода сетки можно получить путем решения эллиптических уравнений, которые позволяют найти отображения расчетной криволинейной области в параметрический квадрат в двумерном и в куб – в трехмерном случае.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

Введем в декартовой системе координат XYZ прямоугольный параллелепипеда $ABFEDCGH$, который непрерывно дифференцируемым образом необходимо отобразить в криволинейный параллелепипед (гексаэдра) $A'B'F'E'D'C'G'H'$. При этом прямоугольная сетка, нанесенная на область $ABFEDCGH$, образует гладкую криволинейную сетку в области $A'B'F'E'D'C'G'H'$.

Обозначим через \vec{r} радиус вектор в системе координат XYZ и введем вектор $\vec{U} = \vec{r}^* - \vec{r}$, характеризующий смещение точек. Здесь \vec{r} и \vec{r}^* радиус векторы точек областей до $\vec{r} \in ABCDCGH$ и после $\vec{r}^* \in A'B'F'E'D'C'G'H'$ преобразования. Тогда уравнения, определяющие величины смещений U_x, U_y, U_z и применяемые для построения регулярных адаптивных сеток близких к ортогональным в трехмерной декартовой системе координат XYZ имеют вид:

$$\begin{aligned} & \lambda_x \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + k_{opt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) \right\} = 0, \\ & \lambda_y \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + k_{opt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right\} = 0, \\ & \lambda_z \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{(1-\sigma)}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(F \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + \frac{(1+\sigma)}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(F \frac{\partial U_y}{\partial y} \right) \right\} + \\ & + k_{opt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

здесь принято, что все коэффициенты, входящие в данную систему уравнений, равны между собой $F = (\nabla f, \nabla f)^{\alpha/2} + \varepsilon$, $i \in \{x, y, z\}$. Граничные условия, необходимые для решения данной системы уравнений, задаются следующим образом:

$$U_i|_{\Gamma} = r_i^* \Big|_{\partial(A'B'F'E'D'C'G'H')} - r_i \Big|_{\partial(ABFEDCGH)}, \quad i \in \{x, y, z\}.$$

Компоненты ковариантного метрического тензора, входящие в систему уравнений, определяются соотношениями

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial r^{\alpha}}{\partial q^i} \frac{\partial r^{\alpha}}{\partial q^k}, \quad g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$q^1 = x, q^2 = y, q^3 = z.$$

При этом f является функцией, управляющей адаптацией расчетных узлов, коэффициент α задает необходимую степень сгущения узлов расчетной сетки. Коэффициент $\sigma \in [-1, 1]$ характеризует отношение поперечной деформации к продольной деформации. Коэффициент $\lambda_i > 0$ увеличивает “диффузию” сеточных линий от границы внутрь расчетной области $A'B'F'E'D'C'G'H'$, обеспечивая нахождение узлов сетки внутри расчетной зоны.

Параметр $\varepsilon \approx \min_{h_i \in A'B'F'E'D'C'G'H'} (h_i)$ выбирается не рав-

ным нулю $\varepsilon \neq 0$ и порядка шага сетки h , чтобы избежать особенности в тех узлах, где $\nabla f = 0$. Эта система уравнений является обобщением метода построения регулярных сеток, предложенного в работе [1], на случай переменных коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i, G_i , $i \in \{x, y, z\}$, входящих под производные, и трехмерную систему координат. Отметим что, применяя многоблочную технологию расчетов, рассматриваемая численная методика позволяет построить квазиортогональные структурированные сетки в областях сложной формы.

Для численного решения исходной задачи, представленной в операторной форме $A\bar{U} = 0$, применяется итерационный метод вариационного типа. То есть для численного нахождения решения задачи минимизируется значение невязки $R_{i,j,m} = A\bar{U}_{i,j,m} - \bar{b}_{i,j,m}$, используя модифицированный вариант итерационного метода вариационного типа – метод минимальных невязок [2]. В этом случае итерации следует проводить по формулам вида

$$\bar{U}_{i,j,m}^{k+1} = \bar{U}_{i,j,m}^k + c\tau \bar{R}_{i,j,m}^k,$$

$$c \approx 0.9, \quad \tau = \frac{(\bar{R}, A\bar{R})}{(A\bar{R}, A\bar{R})}.$$

Укажем отдельные примеры построения регулярных криволинейных адаптивных сеток в некоторых двумерных областях с криволинейными границами.

В первом примере демонстрируется возможности предложенного метода, в котором в качестве управляющей функции f используется некоторое специальное численное преобразование. Это преобразование производит растяжение физического пространства в определенных, предположительно заданных областях: в пограничном слое, слоях смешения, на фронте ударных волн и контактных разрывов. В данной си-

туации расчетная сетка, адаптирована к пограничному слою и представлена на (рис.1).

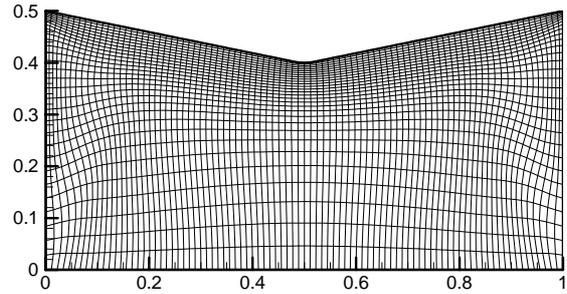


Рис.1. Регулярная расчетная сетка, полученная с использованием разработанной системы уравнений

В данной работе рассматривается одна из задач с достаточно сложной структурой газодинамических разрывов – течение в недорасширенной сверхзвуковой осесимметричной струе. Для решения последней задачи использована квазиортогональная структурированная расчетная сетка, полученная путем решения предложенных в работе трехмерных эллиптических уравнений.

Адаптированная к особенностям течения расчетная сетка приведена на (рис.2).

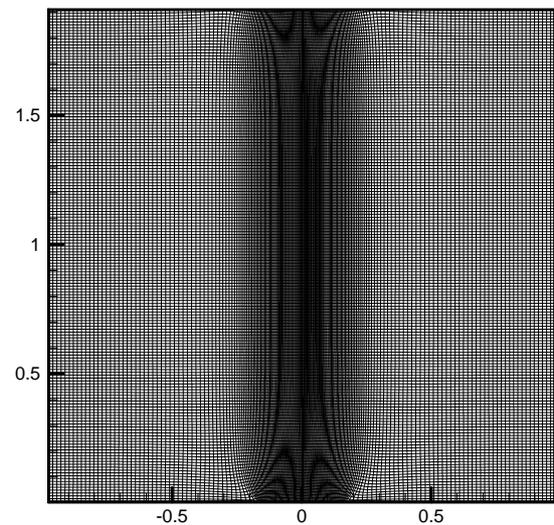


Рис.2. Расчетная сетка, используемая при изучении структуры течения в недорасширенной сверхзвуковой осесимметричной струе

На рис.3–6 представлены случаи импульсных струй рассматриваемых в статье.

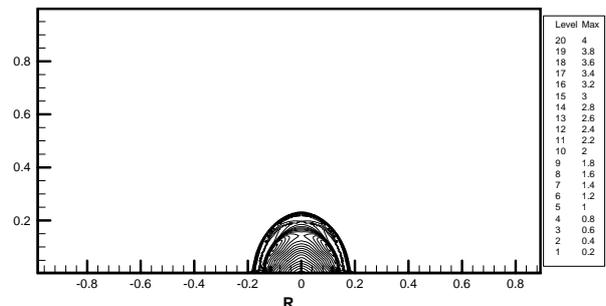


Рис.3. Пространственное распределение числа Маха при импульсном воздействии CO₂ – лазера на металлическую преграду из Al

Из приведенных рисунков следует, что существует несколько случаев формирования внутренней струк-

туры импульсных струй соответствующих нескольким физически различным случаям возникновения импульсных струй. Так, например, случай импульсной струи, формируемой лазерным воздействием на металлическую преграду (рис.3.), существенно отличается от случая формирования струи при взаимодействии центральной струи со спутным потоком (рис.4.).

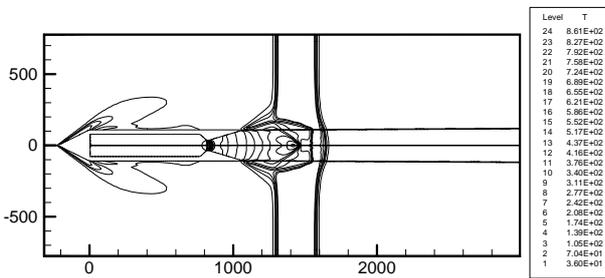


Рис.4. Пространственное распределение числа Маха при взаимодействии центральной струи со спутным потоком

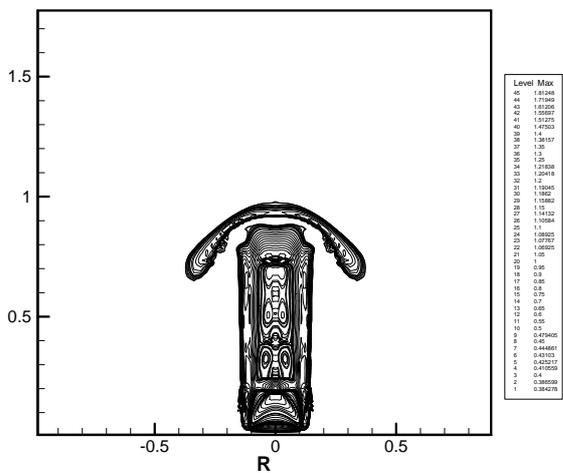


Рис.5. Пространственное распределение числа Маха при истечении плазменной струи в затопленное газовое пространство

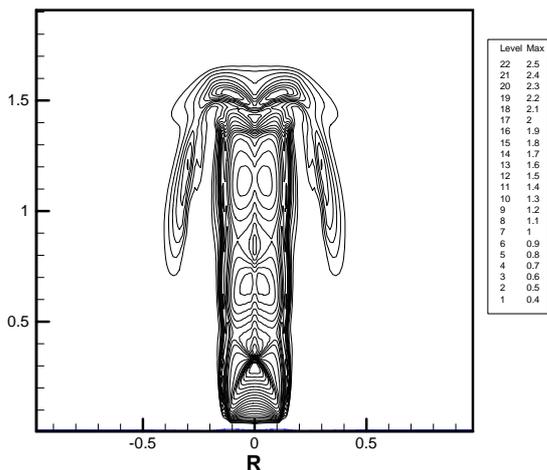


Рис.6. Пространственное распределение числа Маха при истечении газовой струи в затопленное газовое пространство

Для примера сопоставим два близких случая движения импульсного потока в затопленной среде: истечение газовой и плазменной струи в затопленное газовое пространство. Графические зависимости соответствующие двум последующим моментам времени приведены на рис.7–10. При этом газодинамические параметры струи на входе в затопленное пространство имеют следующие значения $P_a = 5$ атм, $V_a = 0.45$ км/с,

$T_a = 15$ кК. Аналогичные параметры в затопленном пространстве имеют уровень значений: $P_\infty = 1$ атм, $V_\infty = 0$ км/с, $T_\infty = 297$ К.

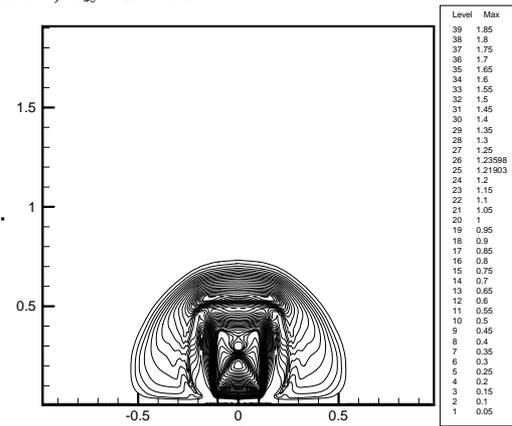


Рис.7. Пространственное распределение числа Маха при истечении газовой струи в затопленное газовое пространство (первая точка по времени)

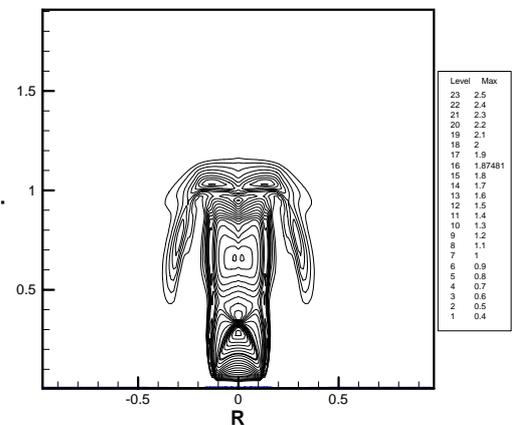


Рис.8. Пространственное распределение числа Маха при истечении газовой струи в затопленное газовое пространство (вторая точка по времени)

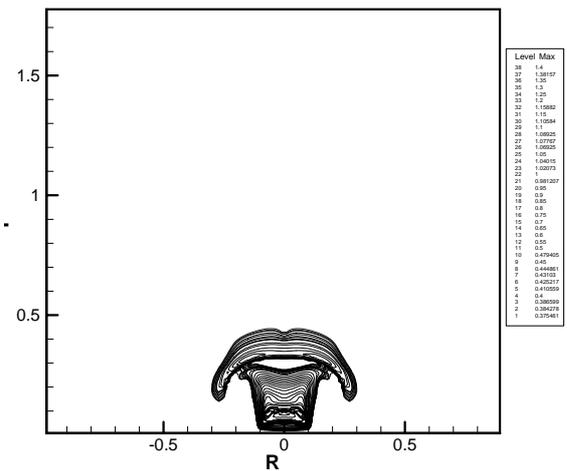


Рис.9. Пространственное распределение числа Маха при истечении плазменной струи в затопленное газовое пространство (первая точка по времени)

Из приведенных распределений следует, что в этих двух физически близких случаях истечения импульсных струй, структуры распределений основных газодинамических параметров относительно близки между собой. Например, в обоих случаях на границе струи и невозмущенного газа имеется присоединенная вихревая структура, характер течения в присоединенной зоне со-

ответствует натеканию на деформирующуюся газовую преграду (растекание струи перпендикулярно оси струи), в обоих случаях наблюдается начало формирования первого диска Маха.

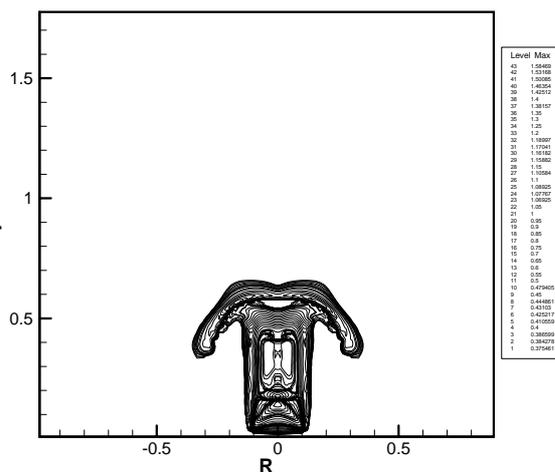


Рис.10. Пространственное распределение числа Маха при истечении плазменной струи в затопленное газовое пространство (вторая точка по времени)

Различия в распределениях заключаются основном в уровне значений этих параметров. Так максимальное значение температуры в области струи для случая истечения газовой струи составляет величину 15 кК, а для плазменной струи 8 кК.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена численная методика создания регулярных криволинейных адаптивных сеток в произвольных областях. Показано, что, применяя многоблочную технологию расчетов, рассматриваемая численная методика позволяет построить неортогональные структурированные сетки в сложных криволинейных областях. С использованием разработанной численной методики построения сетки исследованы некоторые варианты истечения импульсных струй плазмы и газа. Выяснено, что в физически близких случаях истечения импульсных струй, структуры распределений основных газодинамических параметров относительно близки между собой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ 07-01-00133.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

- f – функция, управляющая адаптацией расчетных узлов;
 M – число Маха
 λ_i – коэффициент “диффузии” сеточных линий внутрь расчетной области
 α – задает необходимую степень сгущения узлов расчетной сетки.

Индексы:

- i – порядковый номер орта системы координат;

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Игнатъев А.А. Построение регулярных сеток с помощью механической аналогии. // Математическое моделирование. – 2000. – Т.12, № 2, – С. 101–105.
- Альшина Е.А., Болтнев А.А., Качер О.А. Эмпирическое улучшение простейших градиентных методов. // Математическое моделирование. – 2005. – Т.17, № 6, – С. 43–57.