

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ R13 ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В МИКРОКАНАЛАХ

И.Э. Иванов¹, И.А. Крюков², М.Ю. Тимохин¹

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Москва, 119991, ГСП-1, Ленинские горы, 1

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1

Аннотация

Данная работа посвящена численной реализации граничных условий для твёрдой изотермической стенки для численного решения системы моментных уравнений R13 [5]. В данной статье приведены граничные условия для этой системы [10], а также описан численный метод их реализации. Приведены некоторые результаты моделирования пристеночных течений и течений в каналах как плотного газа, так и разреженного газа для умеренных чисел Кнудсена.

USE OF THE R13 EQUATION SYSTEM FOR NUMERICAL SIMULATION OF A MICROCHANNEL FLOW

I.E. Ivanov¹, I.A. Kryukov², M.Yu. Timohin¹

¹Moscow State University, Russia, Moscow, 119991

²Institute for problems in mechanics RAS, Russia, Moscow, 119526

This work is devoted to numerical implementation of the boundary conditions for a solid isothermal wall for the numerical solution of the moment equations R13 [5]. This article provides the boundary conditions for this system [10], as well as description of the numerical method to implement them. Some results of numerical simulation of the near-wall flows and flows in channels as a dense gas and rarefied gas for transitional Knudsen number.

1. ВВЕДЕНИЕ

Режимы газодинамических течений можно условно классифицировать с помощью числа Кнудсена (Kn) на сплошносредные, свободномолекулярные и переходные. Число Кнудсена определяется как отношение средней длины свободного пробега молекул (λ) к характерному размеру задачи (L). Характерным размером может быть, например, размер обтекаемого потока тела или толщина канала:

$$Kn = \lambda/L.$$

Тогда при стремлении числа Кнудсена к нулю ($Kn < 0.001$) газовую среду можно рассматривать как сплошную (континуальный режим течения), а при $Kn > 10$ – как разреженную (свободномолекулярный режим течения). Эти два режима течения представляют собой два крайних случая. Когда же число Кнудсена лежит в интервале $0.001 < Kn < 0.1$, реализуется режим течения со скольжением на стенке, а при $0.1 < Kn < 10$ – так называемый, переходный режим.

Следует отметить, что переходный режим часто встречается в практических задачах. Так, например, переходный режим обтекания реализуется при входе летательного аппарата в верхние слои атмосферы, где достаточно велика средняя длина свободного пробега молекул. С другой стороны, прикладное значение этот режим имеет и при уменьшении характерного размера обтекаемого тела. Это актуально для течений в микроканалах и наноканалах, где мала средняя длина сво-

бодного пробега, но при этом характерный размер тела вполне сравним с ней.

К настоящему времени достаточно хорошо исследованы системы уравнений, описывающие сплошную среду (уравнения Эйлера и Навье–Стокса), и накоплен обширный опыт численного исследования течений на основе этих уравнений. Разреженные газы хорошо моделируются с помощью численного решения уравнения Больцмана без интеграла столкновений (корпускулярный подход) или же методом прямого стохастического моделирования Монте-Карло (DSMC). Моделирование же переходных процессов вызывает определенные трудности.

С одной стороны моделирование процессов в переходных режимах возможно с помощью дискретных подходов. К таковым относятся метод Монте-Карло и численное решение уравнения Больцмана. Но оба этих метода имеют помимо своих преимуществ и ряд недостатков. Применение метода Монте-Карло встречает большие трудности в задачах со сложной геометрией расчетной области. В случае решения уравнений Больцмана проблемы связаны со сложностью аппроксимации интеграла столкновений в правой части уравнения. При этом оба этих метода сильно затратны в смысле необходимой для них вычислительной мощности.

С другой же стороны, при моделировании можно продвигаться в переходную область, используя модель и подход сплошной среды, который не требует столь больших вычислительных возможностей как дискретный подход. Наиболее популярный здесь метод – чис-

ленное решение уравнений Навье–Стокса–Фурье, но этот вариант по мере продвижения в сторону разреженности не всегда приводит к физическим результатам.

С середины 20-го столетия активно развивается подход, при котором с помощью уравнения Больцмана выводится и решается система моментных уравнений. Эта система записывается относительно макропараметров и способна моделировать поведение газа, как при непрерывном режиме течения, так и в переходной области [1]. Для линеаризованного уравнения Больцмана существует также метод Чепмена–Энскога полиномиального разложения функции распределения [2].

В общем случае система моментных уравнений является бесконечномерной. Для получения конечной системы оставляют только определенное количество уравнений, а остальные отбрасываются. Входящие в систему моменты более высокого порядка выражаются через оставленные моменты с помощью некоторых замыкающих соотношений. Такой подход впервые был реализован Грэдом [3], где с использованием простейших замыкающих соотношений получена система из 13 уравнений. Но позже оказалось, что эта система, к сожалению, имеет некое искусственное ограничение на скорость молекул, что в итоге выливается в нефизические скачки в газодинамических параметрах.

В дальнейшем были предложены системы из двадцати, из двадцати шести и более уравнений. Также были предложены различные способы замыкания этих уравнений. Помимо подхода Грэда, пожалуй, наиболее известным является подход Барнета [4]. Получившаяся система получила название системы Барнета. Но и эта система имеет существенный недостаток, который заключается в том, что при больших скоростях она приводит к нефизическим осцилляциям в решении. На протяжении долгого времени для систем уравнений Грэда и Барнета предлагались различные модификации, которые были направлены на устранение нефизической природы получаемых результатов. В данной работе мы остановились на тринадцатимоментной системе Грэда с предложенной её модификацией [5]. Полученная система названа авторами «регуляризованной системой Грэда» (или R13). Выбор системы именно из тринадцати моментов объясняется тем, что все переменные в этом случае имеют ясный физический смысл (плотность, компоненты вектора скорости, тензора напряжений и вектора теплового потока).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

2.1. Система уравнений для основного потока

В качестве математической модели в данной работе была выбрана регуляризованная тринадцатимоментная система уравнений Грэда (R13), предложенная в работе [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \rho \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial t} + \frac{3}{2} \rho v_k \frac{\partial \frac{k}{m} T}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + p \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij} v_k}{\partial x_k} + \frac{4}{5} \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2p \frac{\partial v_{(i}}{\partial x_{j)}} + 2\sigma_{k(i} \frac{\partial v_{j)}}{\partial x_k} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_k} &= -\frac{\sigma_{ij}}{\tau}, \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i v_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} p \frac{\partial \left(\frac{k}{m} T\right)}{\partial x_i} + \frac{5}{2} \sigma_{ik} \frac{\partial \left(\frac{k}{m} T\right)}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} & \\ - \sigma_{ik} \frac{k}{m} T \frac{\partial \rho}{\partial x_k} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{7}{5} q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{2}{5} q_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} & \\ + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{6} \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} + m_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} &= -\frac{2}{3} \frac{q_i}{\tau}, \end{aligned}$$

где плотность ρ , скорость v_i , давление p , тензор напряжений σ_{ij} и тепловой поток q_i ($i = x, y, z$) составляют тринадцать примитивных переменных, четырнадцатая переменная, температура T , связана с остальными с помощью уравнения состояния. Моменты более высокого порядка (новые члены в уравнениях по сравнению с системой Грэда [3]) имеют следующий аналитический вид:

$$\begin{aligned} m_{ijk} &= -2\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial \sigma_{(ij}}{\partial x_{k)}} - \frac{k}{m} T \sigma_{(ij} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_{k)}} + \frac{4}{5} q_{(i} \frac{\partial v_{j}}{\partial x_{k)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \sigma_{(ij}}{\rho} \frac{\partial \sigma_{k)l}}{\partial x_l} \right], \\ R_{ij} &= -\frac{24}{5} \tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_{(i}}{\partial x_{j)}} + \frac{k}{m} q_{(i} \frac{\partial T}{\partial x_{j)}} - \frac{k}{m} T q_{(i} \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_{j)}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\rho} q_{(i} \frac{\partial \sigma_{j)k}}{\partial x_k} + \frac{5}{7} \frac{k}{m} T \left(\sigma_{k(i} \frac{\partial v_{j)}}{\partial x_k} + \sigma_{ki} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \sigma_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - \frac{5}{6} \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \sigma_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \left. \right], \\ \Delta &= -12\tau \left[\frac{k}{m} T \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \frac{5}{2} \frac{k}{m} q_k \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{k}{m} T q_k \frac{\partial \ln \rho}{\partial x_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\rho} q_j \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{k}{m} T \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Во всех соотношениях, приведённых выше, k , которая не является индексом, – постоянная Больцмана, а m – масса одной молекулы.

Для двумерного случая (количество уравнений в этом случае уменьшается до девяти) эту систему уравнений можно записать в дивергентном виде:

$$\frac{\partial U(W)}{\partial t} + \text{div} F(W) = P(W),$$

где W – вектор примитивных переменных

$$W = \left\{ \rho, v_x, v_y, p, p_x, p_y, \sigma, q_x, q_y \right\}^T,$$

$$p_y = \sigma_{yy}, \quad \sigma = \sigma_{xy}, \quad p = (p_x + p_y + p_z)/3.$$

Векторы $U(W)$, $F(W)$ и $P(W)$ являются векторами консервативных переменных, потоков и релаксационных членов соответственно. Соотношения для них были приведены в работах [8, 16–18].

2.2. Система уравнений для твёрдой изотермической стенки

Попытку вывода граничных условий на твёрдой стенке для системы R13 впервые предприняли Gu и Emerson в работе [9]. В дальнейшем похожий метод использовали Struchtrup и Torrilhon для вывода своего варианта граничных условий [10] на твердой стенке. В обоих случаях был предложен вариант максвелловских граничных условий (аккомодационная модель Максвелла) [11]. Идея такой постановки граничных условий заключалась в том, что часть молекул упруго (зеркально) отражается от стенки, сохраняя при этом свою скорость по модулю (функция распределения таких молекул остаётся неизменной после соударения со стенкой). Остальные же молекулы «прилипают» к стенке и остаются на ней в течение некоторого времени, по прошествии которого они покидают её с температурой стенки и скоростями, соответствующими функции распределения Максвелла. Тогда «стеночная» функция распределения будет выглядеть следующим образом:

$$f^w(v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} \alpha f_M^w + (1-\alpha) f(v_x, -v_y, v_z), & v_y \geq 0, \\ f(v_x, v_y, v_z), & v_y \leq 0, \end{cases}$$

где $f_M^w(v_x, v_y, v_z)$ – максвелловская функция распределения, а коэффициент аккомодации α как раз учитывает число «налипаемых» на стенку молекул. Схематично задание этой составной функции распределения изображено на рис. 1.

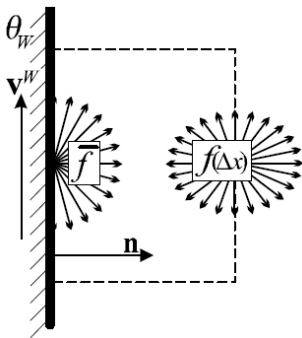


Рис. 1. Схематичное представление аккомодационной модели Максвелла

Для каждого момента на стенке должно выполняться следующее соотношение:

$$\int c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f(v_x, v_y, v_z) d\vec{v} = \int c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f^w(v_x, v_y, v_z) d\vec{v},$$

где $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n}$ – интегральный вес соответствующего момента. Используя составную функцию распределения, это равенство можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{v_y \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} f(v_x, v_y, v_z) d\vec{v} = \\ = \int_{v_y \geq 0} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n} \left[\alpha f_M^w + (1-\alpha) f(v_x, -v_y, v_z) \right] d\vec{v}. \end{aligned}$$

Тогда для того, чтобы получить условия для каждого момента на стенке, необходимо произвести интегрирование данного равенства для соответствующего веса каждого момента. После интегрирования были получены следующие граничные условия [10]:

$$\begin{aligned} u = u_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_{xy} + \frac{m_{xyy}}{2} + \frac{q_x}{5} \right), \\ \theta = \theta_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{q_y}{2} + \frac{\theta \sigma_{yy}}{4} + \frac{5R_{yy}}{56} + \frac{\Delta}{30} \right) + \frac{(u-u_w)^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{xy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[p_\alpha \theta u_s - \frac{1}{2} \theta m_{xyy} - \frac{11}{5} \theta q_x - p_\alpha (u-u_w)^3 + 6p_\alpha (\theta - \theta_w)(u-u_w) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{xxy} = -n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{4p_\alpha}{5} (u-u_w)^2 + \frac{R_{xx}}{14} + \theta \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{5} \right) + \frac{\Delta}{150} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{yyy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi\theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{2p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{R_{yy}}{14} + \frac{\Delta}{75} - \frac{7}{5} \theta \sigma_{yy} - \frac{3p_\alpha}{5} (u-u_w)^2 \right], \end{aligned}$$

где n_y – нормаль поверхности стенки, направленная внутрь газа; α – коэффициент аккомодации поверхности; F – внешняя сила; u_w и θ_w – скорость по касательной и температура стенки соответственно,

$$p_\alpha = p + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{R_{yy}}{28\theta} - \frac{\Delta}{120\theta}.$$

Эти уравнения представляют собой пять, так называемых, «кинетических» граничных условий. К сожалению, остальные интегралы обнуляются (интегралы для моментов, вес которых пропорционален четной степени перпендикулярной к стенке составляющей скорости молекул [3]). Первое соотношение определяет скорость проскальзывания на стенке, второе граничное условие – скачок температуры. Остальные соотношения являются выражениями для моментов более высокого порядка (новых моментов по сравнению с тринадцатимоментной системой Грэда). Недостающие соотношения для остальных переменных можно взять из уравнений основного потока.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

3.1. Численный метод для основной области

В качестве численного метода для основной области был выбран метод Годунова повышенного порядка точности [6] с использованием линейного восстановления параметров течения. Потoki консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного решения задачи Римана методом HLL [7]. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный метод Рунге–Кутты 2-го порядка [6,12]. Достаточно подробно численный алгоритм описан в работах [17–20].

3.2. Численный метод для моделирования твёрдой изотермической стенки.

Для моделирования твердой изотермической стенки, как уже было сказано в разделе 2.2, необходимо решать систему, в которую входят кинетические граничные условия и часть недостающих соотношений из аппроксимации некоторых уравнений описывающих течение газа внутри области. Тогда полная система аппроксимированных уравнений выглядит следующим образом:

$$p_\alpha = p + \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{R_{yy}}{28\theta} - \frac{\Delta}{120\theta},$$

$$u = u_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \sigma_{xy} + \frac{m_{xyy}}{2} + \frac{q_x}{5} \right),$$

$$\theta = \theta_w - \frac{1}{p_\alpha} \left(n_y \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta \frac{2-\alpha}{\alpha} \frac{q_y}{2} + \frac{\theta \sigma_{yy}}{4} + \frac{5R_{yy}}{56} + \frac{\Delta}{30} + \frac{(u-u_w)^2}{4} \right),$$

$$p = p_p + \sigma_{yyp} - \sigma_{yy},$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left(\frac{8}{5} (q_{yp} - q_y) - (m_{xyp} - m_{xy}) \right),$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left(\frac{6}{5} (q_{yp} - q_y) - (m_{yyyp} - m_{yy}) \right),$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xyp} - \rho F (y_p - y_w),$$

$$q_x = -\frac{3}{2} \frac{\mu}{p(y_p - y_w)} \left[\frac{(p - \sigma_{xx})(\sigma_{xyp} - \sigma_{xy})}{\rho} + \frac{5}{2} \sigma_{xy} (\theta_p - \theta) - \frac{\sigma_{yy}}{\rho} (\sigma_{yyyp} - \sigma_{yy}) - \frac{\sigma_{xy} \theta}{\rho} (\rho_p - \rho) + \left(m_{xyp} + \frac{7}{5} q_y \right) (u_p - u) + \frac{1}{2} (R_{xyp} - R_{xy}) \right],$$

$$q_y = q_{yp} + \sigma_{xy} (u_p - u),$$

$$R_{xx} = -\frac{8}{5} \frac{\mu}{\rho} \left(2 \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{q_{yp} - q_y}{(y_p - y_w)} \right),$$

$$R_{xy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[p_\alpha \theta u_s - \frac{1}{2} \theta m_{xyy} - \frac{11}{5} \theta q_x - p_\alpha (u - u_w)^3 + 6 p_\alpha (\theta - \theta_w) (u - u_w) \right],$$

$$R_{yy} = \frac{136}{25} \frac{q_y^2}{p} - \frac{72}{35} \frac{\sigma_{xy}^2}{\rho} - \frac{1}{3} \Delta,$$

$$m_{xxy} = -n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{4 p_\alpha}{5} (u - u_w)^2 + \frac{R_{xx}}{14} + \theta \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{5} \right) + \frac{\Delta}{150} \right],$$

$$m_{xyy} = \frac{32}{45} \frac{\sigma_{xy} q_y}{p} - \frac{16}{15} \mu F,$$

$$m_{yyy} = n_y \sqrt{\frac{2}{\pi \theta}} \frac{\alpha}{2-\alpha} \left[\frac{2 p_\alpha}{5} (\theta - \theta_w) - \frac{R_{yy}}{14} + \frac{\Delta}{75} - \frac{7}{5} \theta \sigma_{yy} - \frac{3 p_\alpha}{5} (u - u_w)^2 \right],$$

$$\Delta = -12 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{q_{yp} - q_y}{(y_p - y_w)} \right),$$

где переменные, отмеченные индексом «и», являются параметрами на стенке, а отмеченные индексом «р» - параметрами в ближайшей по нормали к стенке расчетной ячейке. Таким образом, для нахождения параметров течения на стенке и, следовательно, потоков через грань расчетной ячейки совпадающую со стенкой, мы получаем систему из 16-ти нелинейных уравнений относительно 16-ти неизвестных величин. Эта нелинейная система численно решается с помощью итерационного метода Ньютона с обращением Якобиана.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Нарастание пограничного слоя на пластине в плотном газе

В качестве тестирования реализации граничных условий для твёрдой стенки было рассмотрено течение плотного газа, так как для подобных течений существует большое количество экспериментальных результатов, численных расчётов и аналитических решений.

Первым тестом была избрана задача нарастания пограничного слоя на пластине в плотном газе. На плоскую изотермическую пластину набегают сверхзвуковой поток с числом Маха $M=2.0$, давлением $p=1$ атм, температура стенки и температура потока равны 300 К. Было проведено сравнение результатов расчетов с данными полученными решением уравнений пограничного слоя методом [14]. Результаты расчетов течения сравнивались в сечениях перпендикулярных стенке, расположенных на расстоянии от кромки пластины 2.0 см, 5.1 см и 12.1 см. Распределения скорости

в этих сечениях показаны на рис. 2. Результаты для профилей скорости полностью совпали с данными [14] для всех трёх сечений. Ниже, на рис. 3, представлены результаты с распределениями температуры в тех же сечениях (ширина пограничного слоя в температуре растёт с увеличением расстояния от кромки пластины). Различие в профилях температур незначительно и тем меньше, чем дальше сечение располагается от начала пластины. Это можно объяснить тем, что по мере удаления от кромки стенки течение стремится к авто-модельному решению, постепенно забывая свою историю развития и тем, что в работе [15] не учитывалась слабая косая ударная волна возникающая вблизи кромки пластины при обтекании жидкого клина сверхзвуковым потоком газа. На рис. 3 сплошными линиями показаны результаты для R13, а пунктиром – данные [15, 14].

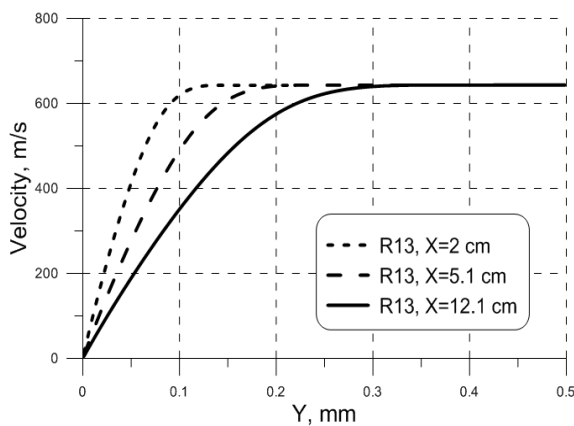


Рис. 2. Профили скорости в пограничном слое для R13

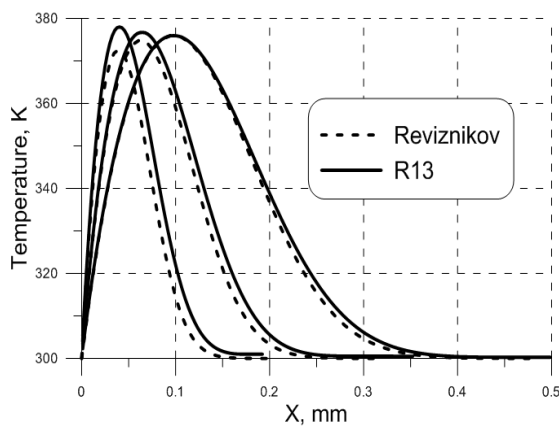


Рис. 3. Профили температуры для R13 и уравнений пограничного слоя [15]

4.2. Течение Пуазейля в плотном газе

Вторым тестом была избрана задача течения плотного газа между двумя плоскими пластинами (течение Пуазейля в плоском канале). Поток газа инициируется разностью давлений на концах канала. Аналитическое решение для профиля скорости в течении Пуазейля хорошо известно [16]:

$$u(y) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right], \quad u_{\max} = \frac{(\Delta p) h^2}{8 \mu l}.$$

Стационарное численное решение для системы R13 было получено методом установления путем решения двумерной нестационарной задачи. На рис. 4 представлено сравнение расчетов и аналитического решения для профиля продольной скорости. Из рисунка видно, что система уравнений R13 с граничными условиями, реализация которых описана в разделе 3.2, даёт полное совпадение с аналитическим решением. При этом проскальзывание и скачок температуры на стенке получаются пренебрежимо малыми.

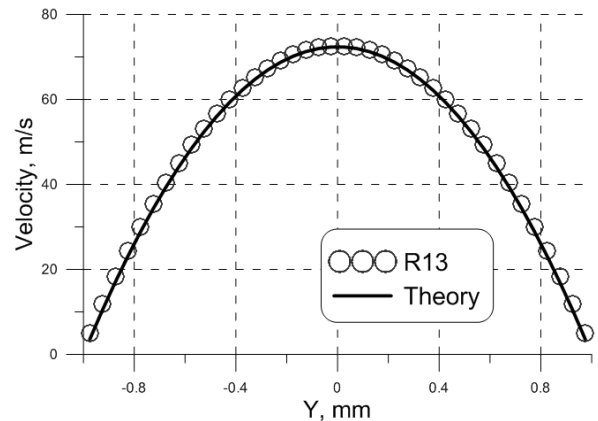


Рис. 4. Сравнение профилей скорости R13 и аналитического решения для течения Пуазейля

4.3. Течение Пуазейля в умеренно разреженном газе

После тестирования алгоритма для моделирования течений плотного газа было решено перейти к тестированию переходных режимов течения. На рис. 5 представлено сравнение результатов R13, Навье – Стокса с результатами численного решения уравнения Больцмана [19] для числа Кнудсена $Kn = 0.226$.

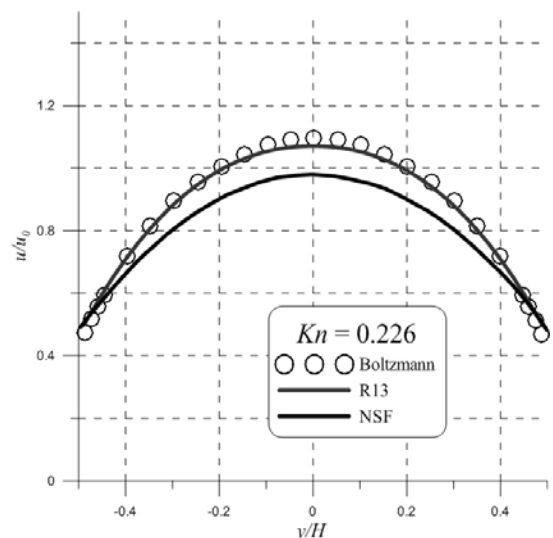


Рис. 5. Сравнение профилей скорости для течения Пуазейля при $Kn = 0.226$

Число Кнудсена для течений в каналах определялось следующим образом:

$$Kn = \mu \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta / p H, \quad \text{где } H \text{ – толщина канала.}$$

4.4. Течение Куэтта в умеренно разреженном газе

Также для умеренно разреженного газа были проведены расчёты течения Куэтта. Расчёты производились для аргона, температура стенок равна 273 К, стенки двигаются в противоположных направлениях со скоростями 50 м/с. При использовании системы моментных уравнений появляется продольный тепловой поток, который при разреженном течении появляется в отсутствии градиента температуры. При этом уравнения Навье–Стокса–Фурье не могут выявить этот эффект. На рис. 6 приведено сравнение распределений продольного теплового потока при $Kn=0.10$, полученных с помощью метода Монте-Карло [9], системы R13 и оригинальной системы Грэда (G13).

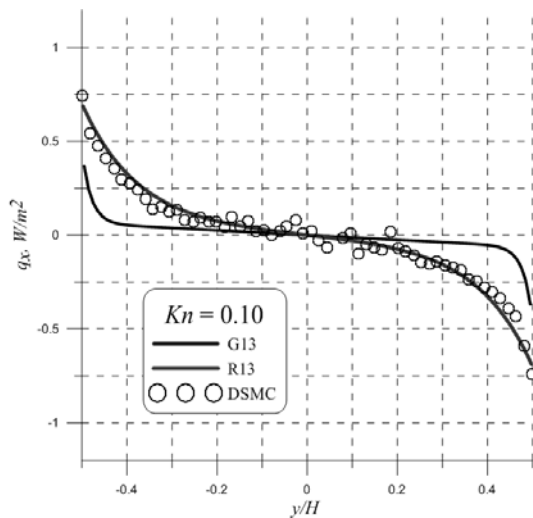


Рис. 6. Сравнение распределений продольного теплового потока для течения Куэтта при $Kn=0.10$ (R13, система Грэда и метод Монте-Карло)

На рис. 7 представлены профили скорости, полученные с помощью R13, уравнений Навье–Стокса с проскальзыванием на стенке и методом Монте-Карло для числа Кнудсена $Kn=0.25$.

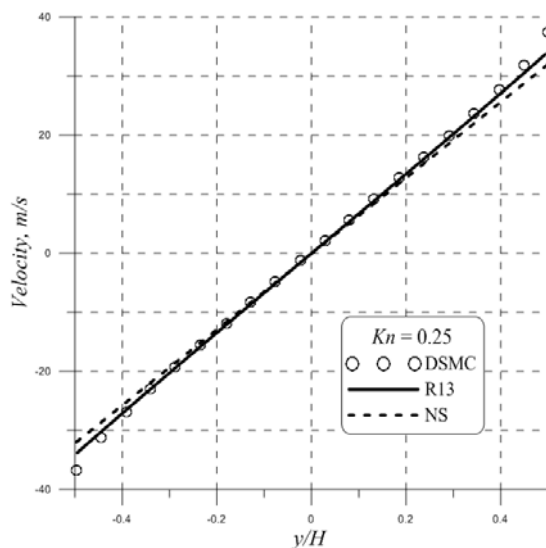


Рис. 7. Сравнение профилей скорости для течения Куэтта при $Kn=0.25$ (R13, уравнения Навье–Стокса и метод Монте-Карло)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы был предложен и реализован численный метод решения системы моментных уравнений R13 для двумерного случая. Предложенный численный метод представляет собой вариант явного метода Годунова повышенного порядка точности с использованием линейного восстановления параметров течения на расчетном слое. Конвективные потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного по методу HLL решения задачи Римана. Диффузионные потоки определяются с помощью конечноразностного подхода. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге–Кутты 2-го порядка. В работе предложена реализация граничных условий на твердой стенке.

Результаты численного моделирования течений плотного и умеренно разреженного газа, представленные в данной работе демонстрируют адекватность данной математической модели и численного метода для моделирования взаимодействия газа с твердой стенкой в широком диапазоне чисел Кнудсена. При этом этот метод приемлем, как для непрерывного, так и для переходного режимов течения газа. В ходе решения предложенных задач удалось показать преимущество системы R13 по сравнению с оригинальной системой Грэда и уравнениями Навье–Стокса с условиями проскальзывания и температурного скачка на стенке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Иностранная литература, 1960.
3. Grad H. On the kinetic theory of rarefied gases. // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1949, 2, 331–407.
4. Burnett D. The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas // *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1935, Vol 40, 382–435.
5. Struchtrup H., Torrilhon M. Regularization of Grad’s 13-moment-equations: Derivation and linear analysis // *Phys. Fluids*, 2003, 15, 2668–2680.
6. Иванов И.Э., Крюков И.А., Квазимонотонный метод повышенного порядка точности для расчета внутренних и струйных течений невязкого газа // *Математическое моделирование*, 1996, 8, 6, С. 47–55.
7. Harten A., Lax P.D., Van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.*, 25, 1983, 35.
8. Torrilhon M. Two-dimensional bulk microflow simulations based on regularized Grad’s 13-moment equations // *Multiscale Model. Simul.*, 2006, 5, 3, pp.695–728.
9. Gu X. J., Emerson D.R. A computational strategy for the regularized 13 moment equations with enhanced wall-boundary conditions // *Journal of Computational Physics*, 2007, pp. 263–283.
10. Struchtrup H., Torrilhon M. Boundary conditions for regularized 13-moment-equations for micro-channel-flows // *J. Comput. Phys.*, 2008, 227, 1982–2011.
11. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature // *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* 170 (1879), pp. 231–256.

12. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. Метод расчета турбулентных сверхзвуковых течений. // Математическое моделирование, 2009, 21, 12, 103-121.
13. Tognilhon M., Struchtrup H. Regularized 13-moment equations: shock structure calculations and comparison to Burnett models // J. Fluid Mech., 2004, 513, 171–198.
14. Bird G. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flow // Clarendon Press, Oxford 1994.
15. Ревизников Д. Л. Сопряженный теплообмен при обтекании неоднородных тел // Математическое моделирование, 2000, 7, С. 51–57.
16. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
17. Тимохин М.Ю., Иванов И.Э., Крюков И.А. Применение системы моментных уравнений R13 для моделирования ударно-волновых газодинамических течений // Вестник Московского авиационного института, 2010, т.17, №7, С. 80–87.
18. Иванов И.Э., Крюков И.А., Тимохин М.Ю. Численное моделирование ударно-волновых течений с помощью моментных уравнений // Труды 3-ей Всероссийской школы-семинара «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» (АФМ-2009), ИПМех РАН, Москва, 2010, С. 71–76.
19. Иванов И.Э., Крюков И.А., Тимохин М.Ю. Математическое моделирование высокоскоростных газодинамических течений на основе регуляризованной системы уравнений R13 // Труды 4-ой Всероссийской школы-семинара «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем» (АФМ-2010), ИПМех РАН, Москва, 2011, С. 63–70.
20. Тимохин М.Ю. Применение системы Моментных уравнений R13 для численного моделирования газодинамических течений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4 (3), С. 1168–1170.