

УДК 519.63+532.529

РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЙ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД СО СЛОЖНОЙ ВОЛНОВОЙ СТРУКТУРОЙ

Садин Д.В.

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург
sadin@yandex.ru

Аннотация

Приведены автомодельные решения волновых течений гетерогенных сред в равновесном приближении. Представлена TVD-схема для жестких уравнений двухскоростных двухтемпературных сред с общим давлением фаз. Схема построена путем расщепления по физическим процессам на два этапа. На первом этапе используются полуразностные уравнения (аналог метода прямых). На втором этапе конвективные члены уравнений движения аппроксимируются TVD-схемами. Приведены результаты тестовых расчетов для одномерных и двухмерных жестких задач со сложной волновой конфигурацией. Сравнение численных решений с точными аналитическими решениями подтвердили точность и устойчивость разностной схемы.

STIFF PROBLEMS OF A TWO-PHASE FLOW WITH A COMPLEX WAVE STRUCTURE

Sadin D.V.

Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
sadin@yandex.ru

Self-similar solutions of equilibrium heterogeneous flows are described. TVD scheme for stiff equations of a two-speed two-temperature medium with a total pressure of phases is presented. The scheme is built by splitting on physical processes in two stages. The first stage uses equations that are similar to the method of lines. In the second stage, convective members of the equations of motion are approximated TVD schemes. The results of test calculations for one-dimensional and two-dimensional stiff problems with complex wave configuration are presented. Comparison of numerical solutions with the exact analytical solutions confirmed the accuracy and stability of the finite difference scheme.

1. Введение

Волновые процессы в гетерогенных средах имеют широкое применение в различных областях современной техники и технологиях, обеспечении безопасности и защите окружающей среды. Для обоснования режимных характеристик работы устройств и их достижимых параметров важное место занимают методы автоматизированного проектирования, основанные на математическом моделировании течений двухфазных сред. Различным аспектам математического моделирования течений гетерогенных сред посвящено значительное количество публикаций отечественных и зарубежных ученых (Р.И. Нигматулина [1], М. Vaer, J. Nunziato [2], А.А. Жилина, А.В. Федорова [3], R. Saurel, R. Abgrall [4] и др.).

Применяемые методы численного моделирования для таких процессов, как правило, строились путем модернизации или адаптации численных моделей газовой динамики. Вместе с тем, следует отметить, что численная реализация задач нестационарного течения многофазных сред с различными термо-газодинамическими параметрами фаз имеют ряд принципиальных особенностей, отличающий их от потоков "чистого" газа. Одним из таких отличий является свойство жесткости уравнений движения гетерогенных сред [5–10], которое заключается в существенно различной скорости протекания термодинамических межфаз-

ных процессов. Кроме того, нестационарные течения двухфазных сред часто сопровождаются образованием особенностей (ударно-волновых, контактных и комбинированных разрывов) со сложной конфигурацией [11].

В настоящей работе рассматриваются вопросы решения жестких задач течений двухфазных сред со сложной волновой структурой. Систематически излагаются теоретические вопросы волновых двухфазных течений в равновесном односкоростном приближении для двух предельных схем (отсутствия межфазного теплообмена и температурного равновесия фаз). В рамках такого подхода приведены точные автомодельные решения для одномерных и плоских двухмерных задач. Для уравнений двухскоростной двухтемпературной среды с общим давлением фаз представлена TVD-схема, пригодная для решения жестких задач.

2. Равновесное приближение

2.1 Одномерные волны разрежения

Рассмотрим плоское одномерное нестационарное движение смеси газа и дисперсных частиц. Примем известные в односкоростной механике дисперсных систем допущения: частицы несжимаемы; теплоемкости частиц и газа постоянны; скорости частиц и газа одинаковы; отсутствуют реакции между фазами; газ совершенный. С учетом принятых допущений уравнения сохранения массы, импульса и энергии имеют вид:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{de}{dt} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность смеси; p – давление; u – скорость; e – внутренняя энергия единицы массы смеси; x, t – эйлерова координата и время. Кроме того, в дисперсной системе при отсутствии фазовых переходов массовые концентрации в частицах смеси не меняются [1]

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 \quad (i=1,2; x_i = \rho_i/\rho; x_1 + x_2 = 1). \quad (2)$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к газовой и дисперсной фазам.

Рассмотрим два предельных случая волновых течений дисперсных систем: при отсутствии теплообмена между фазами и при температурной межфазной равновесности. В первом случае уравнения состояния смеси с учетом аддитивности внутренней энергии и уравнения состояния совершенного газа может быть записано в виде

$$e = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \frac{1}{\gamma_1 - 1} \frac{p}{\psi} + x_2 e_2, \quad \psi = \frac{\rho}{\alpha_1} = \frac{\rho}{1 - (x_2/\rho_2^\circ)\rho}, \quad e_2 = c_2 T_2 = \text{const}, \quad \rho_2^\circ = \text{const}, \quad (3)$$

где γ_1 – показатель адиабаты газа; α_1 – объемная концентрация газовой фазы (пористость); c_2, T_2 – теплоемкость и температура дисперсной фазы, индексом $^\circ$ помечена истинная величина плотности. При температурной межфазной равновесности имеем

$$e = \frac{1}{\gamma_2 - 1} \frac{p}{\psi}, \quad \gamma_2 = \frac{c + R}{c}, \quad c = x_1 c_{v1} + x_2 c_2, \quad R = x_1 R_1. \quad (4)$$

Здесь R_1 – газовая постоянная; c_{v1}, c – теплоемкость газа при постоянном объеме, эффективная теплоемкость дисперсной смеси соответственно.

После подстановки (3) и (4) в (1) уравнение энергии принимает вид

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\psi} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}. \quad (5)$$

Поскольку с учетом (2) $\frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma_2 - 1} = -\frac{1}{(\gamma_2 - 1)^2} \frac{d\gamma_2}{dx_1} \frac{dx_1}{dt} = 0$, то (5) может быть переписано

в виде

$$\frac{\rho}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} \frac{p}{\psi} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

После ряда преобразований (6) с учетом закона сохранения массы (1), постоянства концентраций фаз вдоль траекторий частиц смеси (2) и выражения для ψ (3), имеем

$$\frac{dp}{dt} = a^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho \alpha_1} = \gamma \frac{p}{\rho \left[1 - (x_2 / \rho_2^\circ) \rho \right]}, \quad \frac{d}{dt} p \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \right)^\gamma = 0. \quad (7)$$

Таким образом, для определения четырех искомым функций u, p, ρ и величины объемной α_i или массовой концентрации x_i любой из фаз имеем замкнутую систему уравнений сохранения массы, импульса (1), концентрации какой-либо фазы (2) и энергии (7) дисперсной системы.

Характеристическая форма уравнений. Инварианты Римана

Применяя к этой системе стандартную процедуру, можно перейти к характеристической форме записи уравнений движения дисперсной системы [12]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{a}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} p \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \right)^\gamma + u \frac{\partial}{\partial x} p \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \right)^\gamma = 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} + u \frac{\partial x_i}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

справедливой вдоль характеристик

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a, \quad \frac{dx}{dt} = u.$$

Пусть на прямой $t = 0$ заданы начальные значения искомым переменных:

$$u = u_0(x), \quad \rho = \rho_0(x), \quad \sigma = p \left(\frac{\alpha_1}{\rho} \right)^\gamma = \sigma_0(x), \quad x_1 = x_{10}(x).$$

Если предположить, что начальные функции $u_0, \rho_0, \sigma_0, x_{10}$ обладают ограниченной первой производной, то в некоторой полосе $0 \leq t \leq t_0$ существует дифференцируемое решение системы квазилинейных уравнений (8) [13].

Положим, что

$$\sigma(x, t) = \sigma_0(x) = \sigma_0 = \text{const}, \quad x_1(x, t) = x_{10}(x) = x_{10} = \text{const}, \quad (9)$$

тогда $\gamma_2 = \text{const}$. В этом случае система (8) сводится к двум условиям (9) и двум квазилинейным уравнениям, которые могут быть приведены к инвариантам Римана аналогично изэнтропическому течению совершенного газа:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad r = u + \phi(\rho), \quad s = u - \phi(\rho), \quad \phi(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a(\rho) d\rho}{\rho}.$$

Подставляя в $\phi(\rho)$ выражение для скорости звука в дисперсной смеси (7) с учетом (9), после ряда преобразований приходим к интегралу от дифференциального бинома

$$\phi(\rho) = \left[\gamma \frac{\sigma_0}{C(x_{10})} \right]^{1/2} \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} \left[1 - (x_{20}/\rho_2^\circ) \rho \right]^{-\frac{\gamma+1}{2}} d\rho.$$

Полагая для простоты $\rho_0 = 0$, имеем [14]

$$\phi(\rho) = \frac{2}{\gamma-1} a\alpha_1 = \frac{2}{\gamma-1} a(\rho) \left[1 - (x_{20}/\rho_2^\circ) \rho \right].$$

Центрированные одномерные волны

Пусть центрированная волна разрежения Римана (рис. 1) задана следующими условиями:

$$s = s_0 = \text{const}, \quad \frac{x}{t} = u - a \quad \text{или} \quad r = r_0 = \text{const}, \quad \frac{x}{t} = u + a, \quad t = 0, \quad u_0 = 0,$$

тогда для равномерного течения дисперсной системы можно получить следующие соотношения [14]:

$$\left(\frac{\alpha_{20}\alpha_1}{\alpha_2\alpha_{10}} \right)^\omega = \frac{\alpha_1 + \omega}{\alpha_1(1 \mp \omega\xi)}, \quad \frac{M}{\alpha_{10}} = \left| \frac{2}{\gamma + 2\alpha_1 - 1} (\alpha_1\xi \pm 1) \right|, \quad \frac{a\alpha_1}{a_0\alpha_{10}} = 1 - \frac{\omega}{\alpha_{10}} M, \quad (10)$$

$$\frac{\rho\alpha_{10}}{\rho_0\alpha_1} = \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_{10}} M \right)^{1/\omega}, \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_{10}} M \right)^{\gamma/\omega}, \quad \omega = \frac{\gamma-1}{2}, \quad \xi = \frac{x}{a_0\alpha_{10}t}, \quad M = \frac{|u|}{a_0},$$

здесь индексом 0 обозначены значения параметров в начальный момент времени.

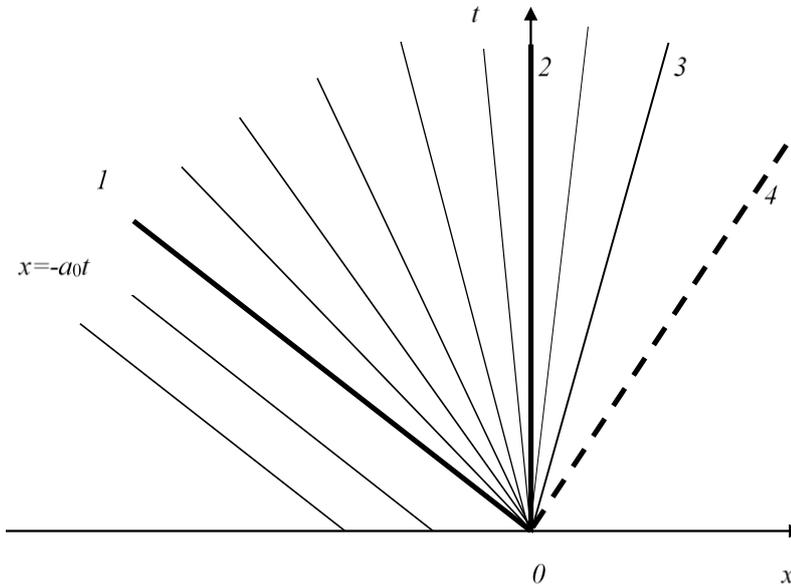


Рис. 1. (*s*-волна Римана): 1 – начальная характеристика; 2 – критическая характеристика; 3 – предельная характеристика; 4 – контактный разрыв

Максимальные скорости, достигаемые совершенным газом $u_{\text{max}}^{(g)}$ и дисперсной системой $u_{\text{max}}^{(p)}$ (9) ($\gamma = \gamma_1$) при истечении в вакуум определяется соотношениями

$$u_{\text{max}}^{(g)} = \frac{2}{\gamma_1 - 1} c_0, \quad u_{\text{max}}^{(p)} = \frac{2\alpha_{10}}{\gamma_1 - 1} a_0,$$

здесь c_0 – начальная скорость звука в газе. К примеру, для воздуха ($\gamma_1=1.4$) и начального «насыпного» состояния дисперсной смеси ($\alpha_{10}=0.4$) эти величины соответственно составляют $5c_0$ и $2a_0$.

Простые волны за подвижной стенкой (задача Лагранжа)

Пусть дисперсная смесь массой m_0 находится в канале длиной l с одной стороны (справа или слева) от жесткой стенки подвижного поршня, который с момента времени $t=0$ начинает двигаться под действием давления (задача Лагранжа) (рис. 2).

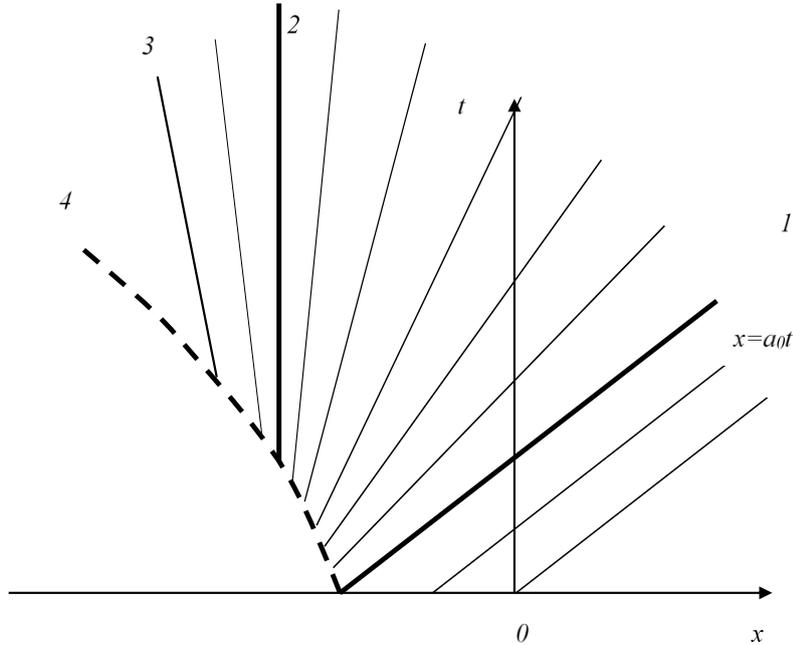


Рис. 2. (r -волна Римана): 1 – начальная характеристика; 2 – критическая характеристика; 3 – предельная характеристика; 4 – траектория стенки

Будем считать, что в начальный момент времени среда покоилась и обладала постоянными давлением, плотностью и концентрацией дисперсной фазы. Возникающее течение является волной Римана:

$$s = s_0 = \text{const} \text{ или } r = r_0 = \text{const}, \quad x = (u \pm a)t + f(u), \tag{11}$$

здесь $f(u)$ – произвольная функция, подлежащая определению.

Закон движения поршня задается уравнением

$$m \frac{du}{dt} = -pF, \tag{12}$$

здесь m – масса поршня; p, u, F – давление, действующее на поршень, его скорость и площадь. Интегрирование (12) при начальных данных $t=0, u=0, x=x_0$, дает [15, 16]

$$\frac{u}{a_0} = \frac{\alpha_{10}}{\omega} \left[\pm \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{m_0}{m} \frac{a_0 t}{l} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \mp 1 \right], \quad \frac{x}{l} = \mp \frac{\alpha_{10}}{\omega} \frac{a_0 t}{l} \pm \frac{\alpha_{10} \gamma}{\omega} \frac{m}{m_0} \left[\left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{m}{m_0} \frac{a_0 t}{l} \right)^{\frac{2}{\gamma+1}} - 1 \right] + \frac{x_0}{l}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11) с учетом (10) имеем

$$\frac{f(u)}{l} = \frac{x_0}{l} \pm \gamma \frac{mu}{m_0 a_0} \mp (1 - \alpha_{10}) \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{m}{m_0} \left[1 - \left(1 \pm \frac{\omega u}{\alpha_{10} a_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right].$$

2.2. Одномерные разрывные движения

При описании разрывных движений двухфазных сред (ударные волны, контактные разрывы) дифференциальные уравнения (1) теряют смысл. Однако интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии справедливы и для разрывных движений (ниже рассматривается плоский одномерный случай):

$$\int_C \rho dx - \rho u dt = 0, \quad \int_C \rho u dx - (p + \rho u^2) dt = 0, \quad \int_C \rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) dx - \rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) dt = 0. \quad (14)$$

Условия на линии разрыва $x(t)$, вытекающие из (14) при стягивании контура C имеют вид

$$D[\rho] = [\rho u], \quad D[\rho u] = [p + \rho u^2], \quad D\left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right)\right] = \left[\rho u \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right],$$

здесь D – скорость распространения фронта волны $D(t) = dx/dt$.

Заметим, что приведенные соотношения не отличаются от классических для сжимаемого газа. Различия проявляются при использовании конкретного уравнения состояния, например, политропного газа или уравнения состояния двухфазной среды (3, 4).

Соотношения на разрыве

"Адиабата" Гюгонио с центром (p_0, V_0, α_{10}) и соотношения на разрыве для предельных схем межфазного теплообмена имеют вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \frac{\chi_0 \alpha_2 - \alpha_{20}}{\chi \alpha_{20} - \alpha_2}, \quad \chi = \frac{\gamma + 2\alpha_1 - 1}{\gamma - 1}, \quad \chi_0 = \frac{\gamma + 2\alpha_{10} - 1}{\gamma - 1}, \\ \frac{V}{V_0} &= \frac{\alpha_{20}}{\alpha_2}, \quad \frac{a^2}{a_0^2} = \frac{(\chi_0 \alpha_2 - \alpha_{20}) \alpha_{20} \alpha_{10}}{(\chi \alpha_{20} - \alpha_2) \alpha_2 \alpha_1}, \quad \frac{(v - v_0)^2}{a_0^2} = M_0^2 \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_{20}}{\alpha_2} \right)^2, \\ M_0^2 &= \frac{\alpha_{10} (\chi_0 + 1) \alpha_2 - (\chi + 1) \alpha_{20}}{\gamma} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_{20}}, \quad M_0 = \frac{|v_0 - D_0|}{a_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $V = 1/\rho$ – удельный объем смеси; D_0 – скорость ударной волны.

2.3. Двухмерные автомодельные движения

Рассматривается задача о начальной стадии истечения идеального газа с твердыми не-сжимаемыми частицами в вакуум из плоского канала длиной L и поперечным размером до оси симметрии R . Начало системы координат находится на срезе канала на верхней бесконечно тонкой стенке. Решение этой задачи для политропного газа получено К.П. Станюковичем [17].

Фронт боковой волны разрежения

Поверхность боковой волны разрежения примыкает к одномерной волне разрежения (7) и описывается характеристикой (4) при $v = w = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \pm a \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}.$$

Переходя к новым независимым переменным $\xi = x/(a_0 \alpha_{10} t)$, $\zeta = y/(a_0 \alpha_{10} t)$ после ряда преобразований, получим обыкновенное дифференциальное уравнение [16]

$$\frac{d\zeta^2}{d\xi} = \frac{2}{\gamma + 2\alpha_1 - 1} (1 - \omega\xi) - \zeta^2 \frac{\gamma + 2\alpha_1 - 1}{2} (1 - \omega\xi)^{-1}. \quad (16)$$

Решение (16) при условии $\xi = \zeta = 0$ является искомым фронтом боковой волны разрежения, которое справедливо для случая бесконечного поперечного размера канала (уступа) или в течение ограниченного времени до прихода фронта волны на ось симметрии.

Внешняя граница разлета

Внешняя граница разлета представляет собой окружность радиусом $(u_{\max} - u_*) / (a_0 \alpha_{10})$ в системе отсчета, в которой двухфазная среда в критическом сечении $x = 0$ покоится:

$$\left(\xi - \frac{2}{\gamma + 2\alpha_{1*} - 1} \right)^2 + \zeta^2 = \left(\omega - \frac{2}{\gamma + 2\alpha_{1*} - 1} \right)^2.$$

Здесь u_{\max} – максимальная скорость истечения двухфазной среды в вакуум; u_*, α_{1*} – скорость смеси и объемная доля газовой фазы в критическом сечении $\xi = 0$.

Течение Прандтля – Майера

Из соотношений (3, 4) вытекает условие отсутствия завихренности в окрестности характеристики, которое в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_\varepsilon = 0, \quad (17)$$

где v_r, v_ε – проекции скорости на радиус-вектор r , совпадающий с характеристикой, и его нормаль; ε – полярный угол.

С учетом квазистационарности течения вблизи критического сечения запишем уравнение баланса энергии двухфазной среды в кинематической форме

$$2a^2 \frac{\alpha_1}{\gamma} \left(\frac{\alpha_1}{\gamma - 1} + 1 \right) + v^2 = (v_{\max}^{st})^2, \quad (18)$$

где при определении v_{\max}^{st} используются критические параметры в волне Римана (7)

$$(v_{\max}^{st})^2 = u_*^2 \left[2 \frac{\alpha_{1*}}{\gamma} \left(\frac{\alpha_{1*}}{\gamma - 1} + 1 \right) + 1 \right].$$

Подставляя (17) в (18), и принимая во внимание, что нормальная к характеристике составляющая скорости равна скорости звука: $v_\varepsilon = a$, получим дифференциальное уравнение для определения радиальной составляющей скорости:

$$\frac{dv_r}{dt} = \sqrt{\left[(v_{\max}^{st})^2 - v_r^2 \right] \left[\frac{\alpha_1}{\gamma} \left(\frac{\alpha_1}{\gamma - 1} + 1 \right) + 1 \right]^{-1}}.$$

На рис. 3 в автомодельных переменных ξ, ζ изображены структуры начальной стадии истечения "чистого" газа при $\alpha_{20} = 0$ (пунктирные линии) и двухфазной равновесной среды при $\alpha_{20} = 0.5$ (сплошные линии) в вакуум. На рисунке приняты следующие обозначения линий: a – предельные характеристики разлета ($\rho = 0$); b – внешние границы разлета; c – фронты боковых волн разрежения; индексы: 1, 3 – газ при $\gamma_1 = 7/5$ и $5/3$, соответственно; 2, 4 – газодисперсная среда при указанных показателях адиабаты газа в предположении отсутствия межфазного теплообмена; линия d есть фронт боковой волны разрежения в случае межфазного теплового равновесия. Здесь также представлены характеристики Прандтля – Майера для двух предельных схем при показателе адиабаты газа $\gamma_1 = 7/5$ (сплошные

линии 1–4 – без теплообмена газа и частиц, пунктирные 5–8 – при равенстве температур фаз), соответствующие $\rho/\rho_0=0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$.

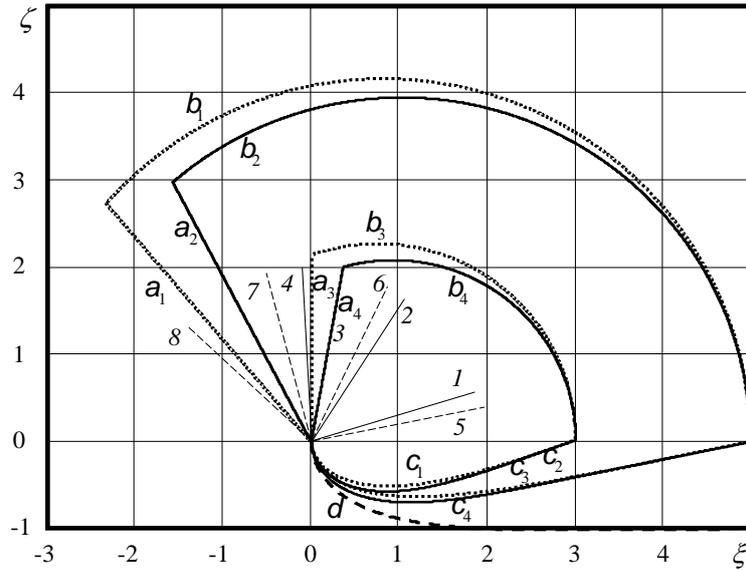


Рис. 3. Структуры начальной стадии истечения идеального газа и равновесной двухфазной среды

3. Неравновесное приближение

Для описания динамики двухфазной среды с различием скоростей, температур и общим давлением фаз используем эйлеров подход, при котором система уравнений в рамках континуального описания и известных допущениях имеет вид [1, 18]:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_d \mathbf{G} + \mathbf{B}(\nabla_d \mathbf{F}) = \mathbf{H}, \tag{19}$$

где

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 \mathbf{v}_1 \\ \rho_2 \mathbf{v}_2 \\ \rho_2 e_2 \\ \rho_1 E_1 + \rho_2 K_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho_1 \mathbf{v}_1 \\ \rho_2 \mathbf{v}_2 \\ \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 \\ \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 \\ \rho_2 e_2 \mathbf{v}_2 \\ \rho_1 E_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 K_2 \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ p \\ 0 \\ p(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta_3 \mathbf{F}_\mu \\ \beta_3 \mathbf{F}_\mu \\ Q \\ -Q \end{bmatrix},$$

$$\nabla_d = \text{diag}(\nabla \cdot, \nabla \cdot, \nabla, \nabla, \nabla \cdot, \nabla \cdot) \quad \mathbf{B} = \text{diag}[1, 1, \beta_1, (1 - \beta_1), 1, 1],$$

$$\rho_i = \rho_i^\circ \alpha_i \quad (i=1,2), \quad E_1 = e_1 + v_1^2/2, \quad K_2 = v_2^2/2,$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1 (2 + \chi_m \rho_1^\circ / \rho_2^\circ)}{2 + \chi_m (\alpha_2 + \alpha_1 \rho_1^\circ / \rho_2^\circ)}, \quad \beta_2 = \frac{2 + \chi_m \alpha_2}{2 + \chi_m (\alpha_2 + \alpha_1 \rho_1^\circ / \rho_2^\circ)}, \quad \beta_3 = \frac{2}{2 + \chi_m (\alpha_2 + \alpha_1 \rho_1^\circ / \rho_2^\circ)}.$$

Здесь и далее индексы 1 и 2 внизу относятся соответственно к параметрам несущей и дисперсной фаз, индекс \circ сверху относится к истинным значениям плотности; ∇ – оператор Гамильтона. Через $\alpha_i, \rho_i, \mathbf{v}_i, E_i, e_i, p, \mathbf{g}$ обозначены объемная доля, приведенная плот-

ность, вектор скорости, полная и внутренняя энергии единицы массы i -той фазы, давление газа, вектор ускорения сил тяжести; \mathbf{F}_μ , Q – соответственно вязкая составляющая силы межфазного взаимодействия, мощность теплообмена между газом и частицами; χ_m – коэффициент, учитывающий неоднородность и несферичность частиц на силу присоединенных масс ($\chi_m=1$ для сферических частиц; $\chi_m=0$ – присоединенная масса газа не учитывается); t – время.

Замыкающие соотношения

Для замыкания системы (19) используем уравнения состояния идеального калорически совершенного газа и несжимаемых твердых частиц:

$$p = (\gamma_1 - 1)\rho_1^\circ e_1, \quad e_1 = c_{v1}T_1, \quad e_2 = c_2T_2, \quad \{\gamma_1, c_{v1}, c_2, \rho_2^\circ\} \equiv \text{const}.$$

Здесь T_1, T_2 – температура несущей фазы и частиц; γ_1, c_{v1} – показатель адиабаты и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; c_2 – удельная теплоемкость частиц.

Интенсивности межфазного трения и теплообмена \mathbf{F}_μ, Q задаются на основе известных и апробированных для рассматриваемого класса задач эмпирических критериальных соотношений [19, 20].

4. Численная модель

Разностная схема решения задачи нестационарного волнового течения двухфазной среды для системы уравнений (19) строится путем расщепления по физическим процессам на два этапа и имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\langle \mathbf{B}^k \nabla_d \mathbf{F}^k \rangle_\circ + \mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{20}$$

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^{k+1/2} - \tau \langle \nabla_d \mathbf{G}^{k+1/2} \rangle_{TVD}. \tag{21}$$

Здесь величины, рассчитанные на первом и втором этапах, помечены временными индексами $k+1/2$ и $k+1$ соответственно, а также приняты следующие символические обозначения разностных операторов: $\langle \cdot \rangle_\circ$ – центральная разность; $\langle \cdot \rangle_{TVD}$ – TVD-схемы для потоков каждой фазы.

На первом этапе разностной схемы (20) используем полуразностные уравнения (аналог метода прямых) [12]. Ввиду очевидного обобщения на несколько пространственных координат запишем уравнения импульсов фаз для одномерного случая в виде

$$\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = C_1 - b(u_1 - u_2), \quad \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = C_2 + b(u_1 - u_2), \tag{22}$$

$$C_1 = \frac{-\beta_1^k (\tilde{p}_{n+1/2}^k - \tilde{p}_{n-1/2}^k)}{h}, \quad C_2 = \frac{-(1-\beta_1^k)(\tilde{p}_{n+1/2}^k - \tilde{p}_{n-1/2}^k)}{h}, \quad \tilde{p}_{n\pm 1/2}^k = p_{n\pm 1/2}^k + q_{n\pm 1/2}^k, \tag{23}$$

где $n \pm 1/2$ – полуцелые индексы относятся к границам ячеек; h – размер ячейки разностной сетки; u_i – проекции скоростей фаз на ось X ; b – коэффициент межфазного трения, определяемый из критериальных соотношений [19, 20]; $q_{n\pm 1/2}^k$ – искусственная вязкость.

Плотности фаз ρ_i , коэффициент межфазного трения и величины C_1 и C_2 , связанные с градиентами давления принимаются постоянными за шаг по времени τ .

Искусственную вязкость определим следующим образом:

$$q_{n+1/2}^k = \begin{cases} -\eta \sqrt{\gamma_1 p_{n+1/2}^k (\rho_{1,n+1/2}^k + \delta \rho_{2,n+1/2}^k)} \cdot \Delta_{n+1/2} v_1, & \text{если } \Delta_{n+1/2} v_1 < 0 \\ \text{и } (v_{1,n+3/2}^k - 2v_{1,n+1/2}^k + v_{1,n-1/2}^k) \text{sign}(p_{n+1}^k - p_n^k) < A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 - (T^{(\mu)}/T_*^{(\mu)}) = 1 - (d/d_*)^2 & \text{если } d \leq d_*, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $\eta \geq 0$ – коэффициент искусственной вязкости; d, d_* – диаметр дисперсных частиц и его характерное значение.

Искусственная вязкость вводится при выполнении двух условий: на ударной волне (счетной волне сжатия) при $\Delta_{n+1/2} v_1 < 0$ и в той ее части, например, при $A=0$, где вторая производная скорости газа отрицательна ($\partial^2 v_1 / \partial x^2|_{n+1/2} < 0$). Функция δ зависит от отношения времени скоростной релаксации фаз $T^{(\mu)}$ [10] к некоторому ее характерному значению $T_*^{(\mu)}$.

Произведем замену переменных в (22), (23):

$$W = \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2, \quad Z = C^- - B(u_1 - u_2).$$

Тогда можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dW}{dt} = C^+, \quad \frac{dZ}{dt} = -BZ, \quad C^+ = C_1 + C_2, \quad C^- = C_1/\rho_1^k - C_2/\rho_2^k, \quad B = b/\rho_1^k + b/\rho_2^k,$$

которая имеет аналитические решения $W^{k+1/2} = C^+ \tau + W^k$, $Z^{k+1/2} = Z^k e^{-B\tau}$, откуда скорости фаз на первом этапе можно рассчитать по следующим формулам:

$$u_1^{k+1/2} = \frac{[C^+ \tau + \rho_1^k u_1^k + \rho_2^k u_2^k - \rho_2^k (Z^k e^{-B\tau} - C^-)]/B}{(\rho_1^k + \rho_2^k)}, \tag{24}$$

$$u_2^{k+1/2} = \frac{(C^+ \tau + \rho_1^k u_1^k + \rho_2^k u_2^k - \rho_1^k u_1^{k+1/2})}{\rho_2^k}. \tag{25}$$

Производя аналогичные действия для уравнений энергий фаз, записанных в полуразностном виде можно получить следующие расчетные соотношения:

$$E_1^{k+1/2} = \frac{c_v [C^+ \tau + \rho_1^k E_1^k + \rho_2^k E_2^k - c_2 \rho_2^k (Z^k e^{-B\tau} - C^-)]/B'}{(c_v \rho_1^k + c_2 \rho_2^k)}, \tag{26}$$

$$e_2^{k+1/2} = \frac{(C^+ \tau + \rho_1^k E_1^k + \rho_2^k E_2^k - \rho_1^k E_1^{k+1/2})}{\rho_2^k}. \tag{27}$$

$$C_1' = \frac{-\rho_2 [(u_2^{k+1/2})^2 - (u_2^k)^2]}{(2\tau)} - \left\{ \frac{[(\tilde{p}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2))_{n+1/2}^k - (\tilde{p}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2))_{n-1/2}^k]}{h} \right\} + \frac{b'(u_1^k)^2}{2c_v},$$

$$C_2' = \frac{-b'(u_1^k)^2}{2c_v}, \quad C^{+'} = C_1' + C_2', \quad C^{-'} = \frac{C_1'}{\rho_1^k} - \frac{C_2'}{\rho_2^k}, \quad B' = \frac{b'}{(c_v \rho_1^k)} + \frac{b'}{(c_2 \rho_2^k)},$$

$$Z' = C'^- - B' \begin{pmatrix} E_1 - e_2 \\ c_v & c_2 \end{pmatrix},$$

где b' – коэффициент межфазного теплообмена, определяемый из критериальных соотношений [19, 20].

На втором этапе конвективные члены системы уравнений (19) аппроксимируются противопоточными схемами с ограничителями [21]:

$$\rho_i^{k+1} = \rho_i^k + R_{i,n-1/2}^k u_{i,n-1/2}^{k+1/2} - R_{i,n+1/2}^k u_{i,n+1/2}^{k+1/2},$$

$$R_{i,n+1/2}^k = \begin{cases} R_{i,n+1/2}^+, & \text{при } u_{i,n+1/2}^{k+1/2} \geq 0, \\ R_{i,n+1/2}^-, & \text{при } u_{i,n+1/2}^{k+1/2} < 0, \end{cases} \quad (28)$$

$$R_{i,n+1/2}^+ = \left[\rho_{i,n}^k + \frac{1}{2} \psi(r_{i,n+1/2}^+) (1 - C_{i,n+1/2}) (\rho_{i,n+1}^k - \rho_{i,n}^k) \right] \frac{\tau}{h}, \quad (29)$$

$$R_{i,n+1/2}^- = \left[\rho_{i,n+1}^k + \frac{1}{2} \psi(r_{i,n+1/2}^-) (1 + C_{i,n+1/2}) (\rho_{i,n+1}^k - \rho_{i,n}^k) \right] \frac{\tau}{h}, \quad (30)$$

$$C_{i,n+1/2} = u_{i,n+1/2}^{k+1/2} \frac{\tau}{h}, \quad r_{i,n+1/2}^+ = \frac{\rho_{i,n}^k - \rho_{i,n-1}^k}{\rho_{i,n+1}^k - \rho_{i,n}^k}, \quad r_{i,n+1/2}^- = \frac{\rho_{i,n+2}^k - \rho_{i,n+1}^k}{\rho_{i,n+1}^k - \rho_{i,n}^k}, \quad (31)$$

$$\psi(r) = \begin{cases} 0, & \text{Upwind,} \\ 1, & \text{Lax-Wendroff,} \\ \max[\min(2r, 1), \min(r, 2), 0], & \text{Superbee,} \\ (r + |r|) / (1 + r), & \text{Van Leer,} \\ \min(r, 1), & \text{MINMOD,} \\ \max\left[\min\left(2, 2r, \frac{1+r}{2}\right), 0\right], & \text{MUSCL,} \end{cases}$$

$$\rho_{i,n}^{k+1} u_{i,n}^{k+1} = \rho_{i,n}^k u_{i,n}^{k+1/2} + R_{i,n-1/2}^k V_{i,n-1/2}^{k+1/2} - R_{i,n+1/2}^k V_{i,n+1/2}^{k+1/2},$$

$$\rho_{2,n}^{k+1} e_{2,n}^{k+1} = \rho_{2,n}^k e_{2,n}^{k+1/2} + R_{2,n-1/2}^k I_{2,n-1/2}^{k+1/2} - R_{2,n+1/2}^k I_{2,n+1/2}^{k+1/2},$$

$$\sum_{i=1}^2 \rho_1^{k+1} E_1^{k+1} = \sum_{i=1}^2 \rho_i^k E_i^{k+1/2} + \sum_{i=1}^2 (R_{i,n-1/2}^k J_{i,n-1/2}^{k+1/2} - R_{i,n+1/2}^k J_{i,n+1/2}^{k+1/2}).$$

Здесь $V_{i,n+1/2}^{k+1/2}$, $I_{2,n+1/2}^{k+1/2}$, $J_{i,n+1/2}^{k+1/2}$ – величины, связанные с потоками количества движения и энергий фаз, вычисляются аналогично (28)–(31) с подстановкой в эти формулы вместо плотности соответственно проекций скоростей, внутренней энергии дисперсных частиц и полных энергий фаз, полученных на первом этапе расчета.

Шаг по времени переменный и определяется из условия:

$$\tau = CFL \cdot \frac{h}{\max_n (|u_{1,n}^k| + a_{1,n}^k)},$$

где CFL – число Куранта; $a_{1,n}^k$ – скорость звука в несущем газе в точке (x_n, t^k) .

5. Некоторые результаты

Рассматривается задача о начальной стадии течения идеального газа (воздуха $\gamma_1 = 1.4$) с твердыми несжимаемыми частицами ($\rho_2 = 2500 \text{ кг/м}^3$) со следующими кусочно-постоянными начальными условиями: при $-L_1 \leq x \leq 0$ ($L_1 = 0.2 \text{ м}$) – параметры фаз с равномерным распределением: $v_i^{(1)} = 0$, $p^{(1)} = 10^6 \text{ Па}$, $T_i^{(1)} = 293 \text{ К}$, $\alpha_2^{(1)} = 0.01$; при $L_2 \leq x < \infty$ ($L_2 = 0.4 \text{ м}$) – параметры фаз с равномерным распределением: $v_i^{(6)} = 0$, $p^{(6)} = 10^5 \text{ Па}$, $T_i^{(6)} = 293 \text{ К}$, $\alpha_2^{(6)} = 0.01$; в остальной части – $v_i^{(0)} = 0$, $p^{(0)} = 10^5 \text{ Па}$, $T_i^{(0)} = 293 \text{ К}$, $\alpha_2^{(0)} = 10^{-10}$. Расчеты выполнялись на сетке, содержащей 500 ячеек с шагом $h = 0.001 \text{ м}$. Размеры частиц варьировались, их значения приведены ниже. Краевые условия задачи задавались на стенке $x = L_1$ – условия непротекания; на границе расчетной области – "мягкие" граничные условия.

Волновая структура течения иллюстрируется на x, t – диаграмме (рис. 4) с временными сечениями t_1, t_2, t_3 , соответствующими трем распадам произвольных разрывов.

Здесь показаны следующие области: 0, 1, 6 – начальные условия задачи; 2 – центрированная волна разрежения в двухфазной среде; 3, 3' – постоянное течение двухфазной среды и газа, разделенные контактной поверхностью (пунктирная линия); 4–7 – течение после двух последующих распадов разрывов с ударными волнами и контактными разрывами (пунктирные линии).

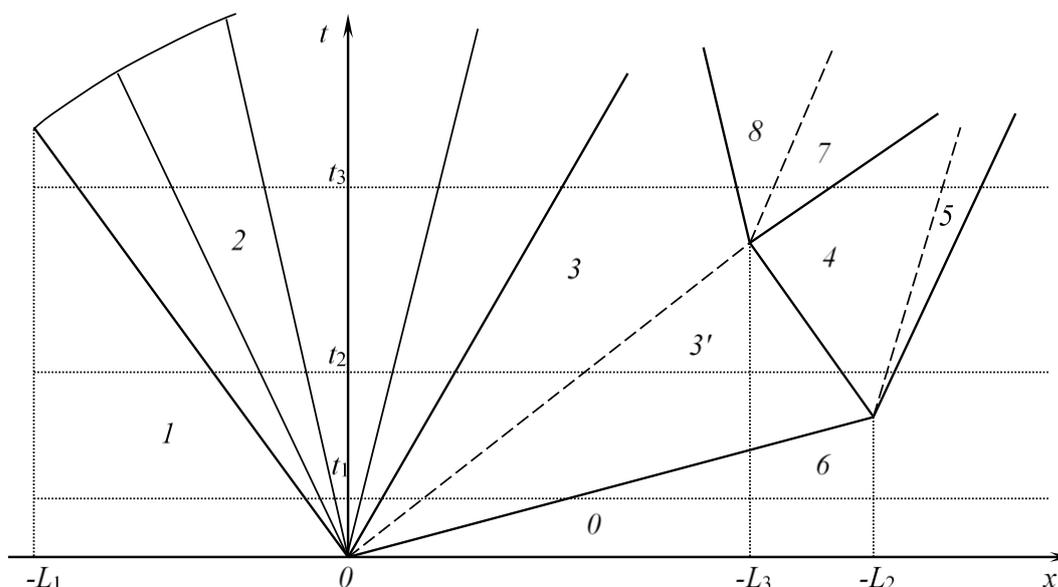


Рис. 4. Волновая структура задачи о начальной стадии течения

Поставленная задача решалась численно с использованием разностной схемы (20–21) с ограничителем Superbee и аналитически путем сопряжения предельных автомодельных решений (10) и (15) при условии непрерывности давления и скорости на контактных поверхностях. Параметры схемы заданы следующими: $CFL = 0.5$; $A = 0$; $\eta = 0.75$ при $\Delta_{n\pm 1/2} u_1 \Delta_{n\pm 1/2} p > 0$; $\eta = 0.55$ при $\Delta_{n\pm 1/2} u_1 \Delta_{n\pm 1/2} p \leq 0$; $d_* = 1 \text{ мкм}$.

На рис. 5 представлено сравнение относительной скорости $v' = v/a^{(1)}$ и относительной плотности смеси $\rho' = \rho/\rho^{(1)}$, полученных по схеме (20–21) (кружки), с точным автомодельным предельным ($d \rightarrow 0$) решением в случае теплового межфазного равновесия $\gamma = \gamma_2$ (сплошная линия) для моментов времени $t_1 = 3 \times 10^{-4} \text{ с}$, $t_2 = 6 \times 10^{-4} \text{ с}$ и $t_3 = 8 \times 10^{-4} \text{ с}$. При численной реализации двухфазного течения диаметр частиц задан малым, но конечным ($d = 1 \text{ нм}$). Такой размер частиц может нарушить справедливость приближения сплошной среды, заложенные в моделях межфазного трения и теплообмена, но представляет интерес при анализе устойчивости и сходимости численного решения к предельно равновесному.

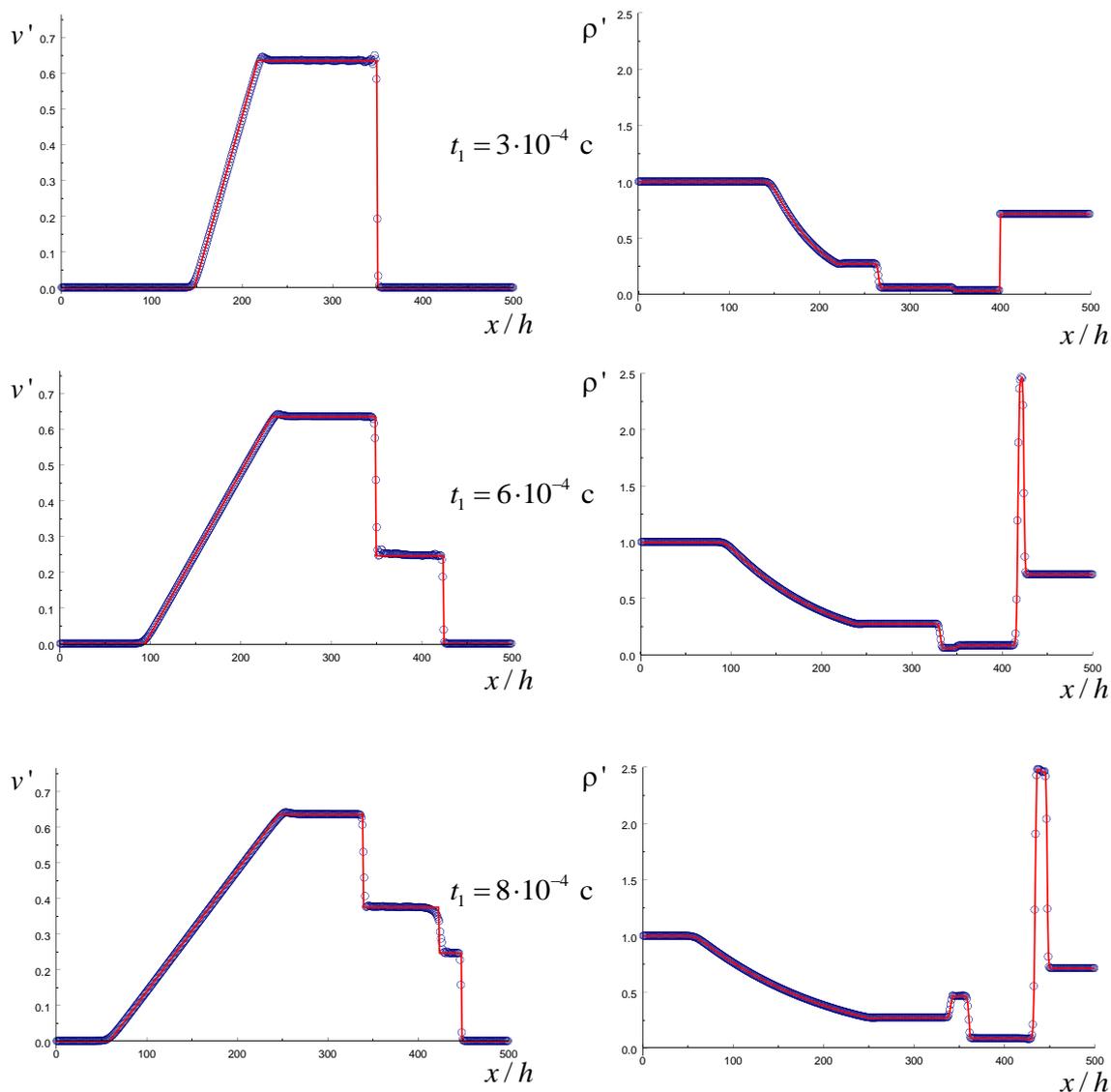


Рис. 5. Сравнение численных и аналитических решений (равновесное течение)

На рис. 6 приведено сопоставление численных решений при $t_3 = 8 \times 10^{-4}$ с, полученных по разностной схеме (20–21) 1 и методом "крупных" 2 частиц первого порядка аппроксимации при одинаковом числе Куранта $CFL = 0.5$.

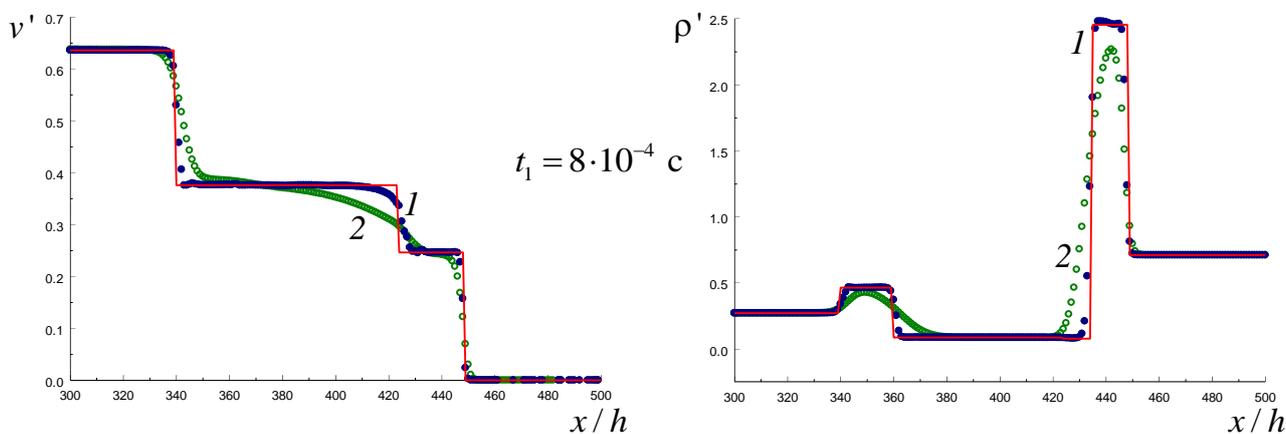


Рис. 6. Сравнение численных решений разностной схемы (20–21) 1 и метода "крупных" частиц 2

На первом этапе метода "крупных" частиц межфазные взаимодействия рассчитывались по формулам (24–27), а также вводилась линейная искусственная вязкость во всей области счетной ударной волны $\Delta_{n\pm 1/2} v_1 < 0$ с коэффициентами, как и в случае схемы (20–21). На втором при аппроксимации потоков использовались традиционные противопоточные схемы первого порядка точности. Отметим, что для мелких частиц явный учет межфазного трения и теплообмена как в разностной схеме (20–21), так и в методе "крупных" частиц вследствие жесткости задачи приводит к снижению допустимого шага на порядок и более, что делает их применение практически не пригодными для расчетов.

Рассмотрим задачу взаимодействия воздушной ударной волны, образованной в результате распада разрыва с облаком мелкодисперсной газозвеси ($d=1$ мкм). Эта задача интересна тем, что с течением времени реализуются сложные пространственные конфигурации многократных распадов разрывов при взаимодействии ударной волны с контактными поверхностями, отражения волн от жестких стенок и дифракции ударной волны на препятствии в виде облака газозвеси. Покроем расчетную область сеткой, содержащей 500×300 ячеек с равными по обеим координатам размерами $h=0.001$ м.

Начальные условия заданы следующими (рис. 7): при $-L_1 \leq x \leq 0$ ($L_1=0.2$ м) и $-R_1 \leq y \leq 0$ ($R_1=0.1$ м) – параметры фаз с равномерным распределением: $v_i^{(1)}=0$, $p^{(1)}=10^6$ Па, $T_i^{(1)}=293$ К, $\alpha_2^{(1)}=10^{-10}$; при $L_2 \leq x < L_4$ ($L_2=0.325$ м; $L_4=0.35$ м) и $-R_1 \leq y \leq -R_2$ ($R_2=0.025$ м) – параметры фаз с равномерным распределением: $v_i^{(6)}=0$, $p^{(6)}=10^5$ Па, $T_i^{(6)}=293$ К, $\alpha_2^{(6)}=0.01$; в остальной части – $v_i^{(0)}=0$, $p^{(0)}=10^5$ Па, $T_i^{(0)}=293$ К, $\alpha_2^{(0)}=10^{-10}$. Краевые условия задачи задавались на стенках: $-L_1 \leq x \leq 0$ при $y=0$; $x \geq -L_1$ при $y=-R_1$; $-R_1 \leq y \leq 0$ при $x=-L_1$ – условия непротекания; на свободных границах расчетной области – "мягкие" краевые условия.

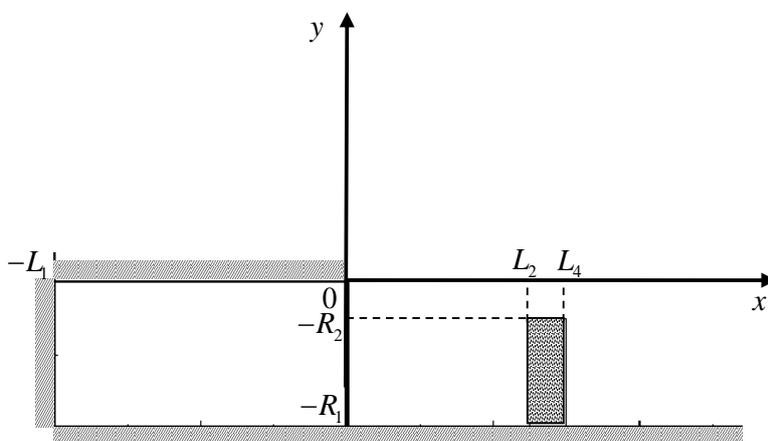


Рис. 7. Схема задачи

На рис. 8 показаны линии равных приведенных относительных плотностей газа $\rho_1/\rho_1^{(1)}$ в последовательные безразмерные моменты времени $Sh=a^{(1)}t/L_1$: 0.3, 0.5, 0.7, 0.9. Расчеты выполнялись с ограничителем Superbee. Искусственная вязкость вводилась в части счетной волны сжатия, определяемая параметром схемы $A=0.1a_1^{(0)}$. На этом рисунке: 1 – ударная волна, образовавшаяся после начального распада разрыва; 2 – контактная поверхность; 3 – ударная волна, отраженная от облака газозвеси; 4 – ударная волна после распада разрыва на контактной поверхности; 5 – комбинированный разрыв (между газом слева и газозвесью справа); 6 – прошедшая в облако газозвеси ударная волна; 7 – дифракция ударной волны на препятствии в виде облака газозвеси; 8 – прошедшая через слой газозвеси ударная волна; 9 – комбинированный разрыв (между газозвесью слева и газом справа).

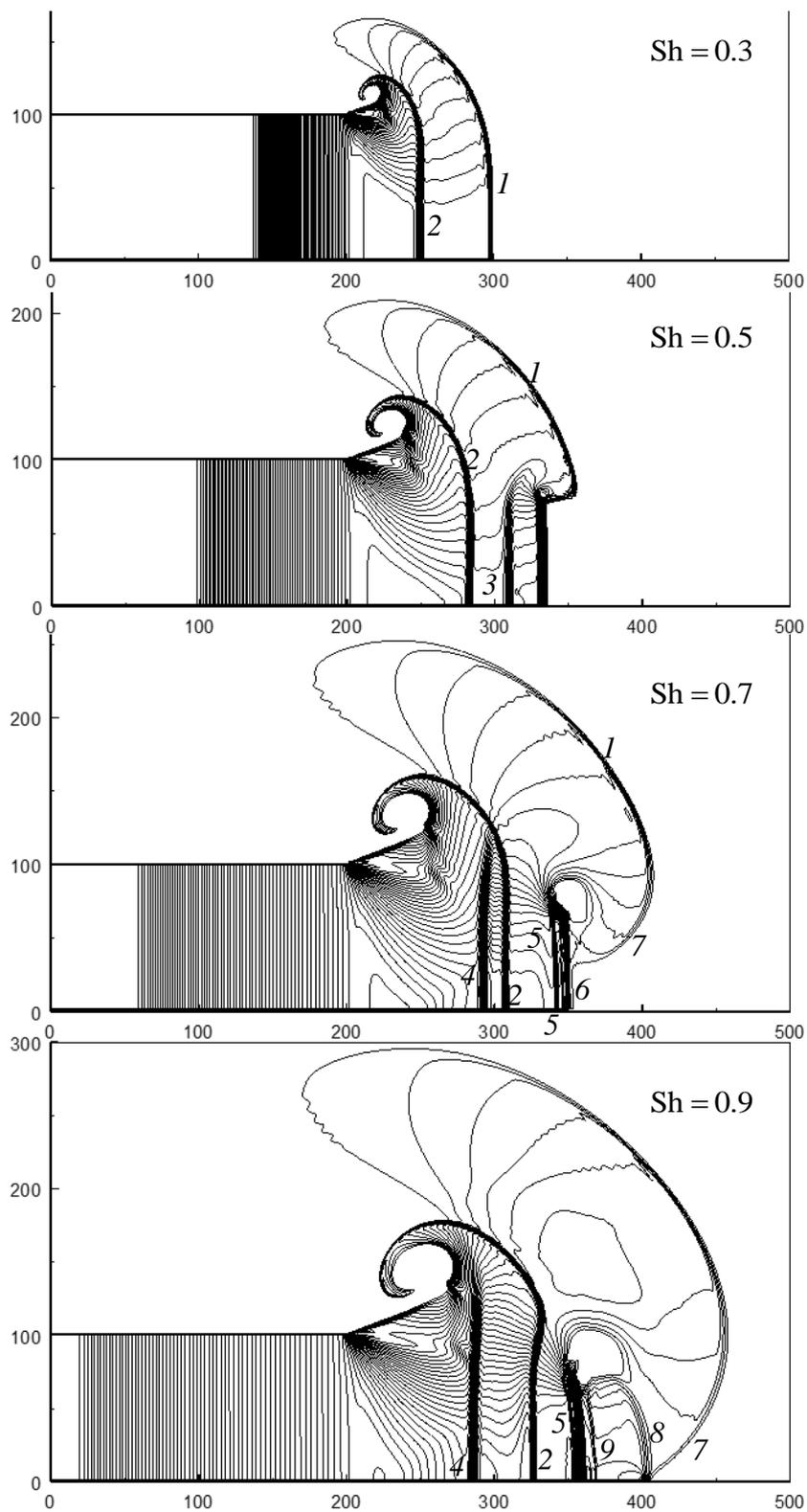


Рис. 8. Линии равных приведенных относительных плотностей газа

На рис. 9 представлены фрагменты поля течения двухфазной среды в виде линии равных приведенных относительных плотностей газа $\rho_1/\rho_1^{(1)}$ при $Sh=0.9$, рассчитанные методом "крупных" частиц (слева) и по TVD схеме (20–21) с ограничителем Superbee (справа).

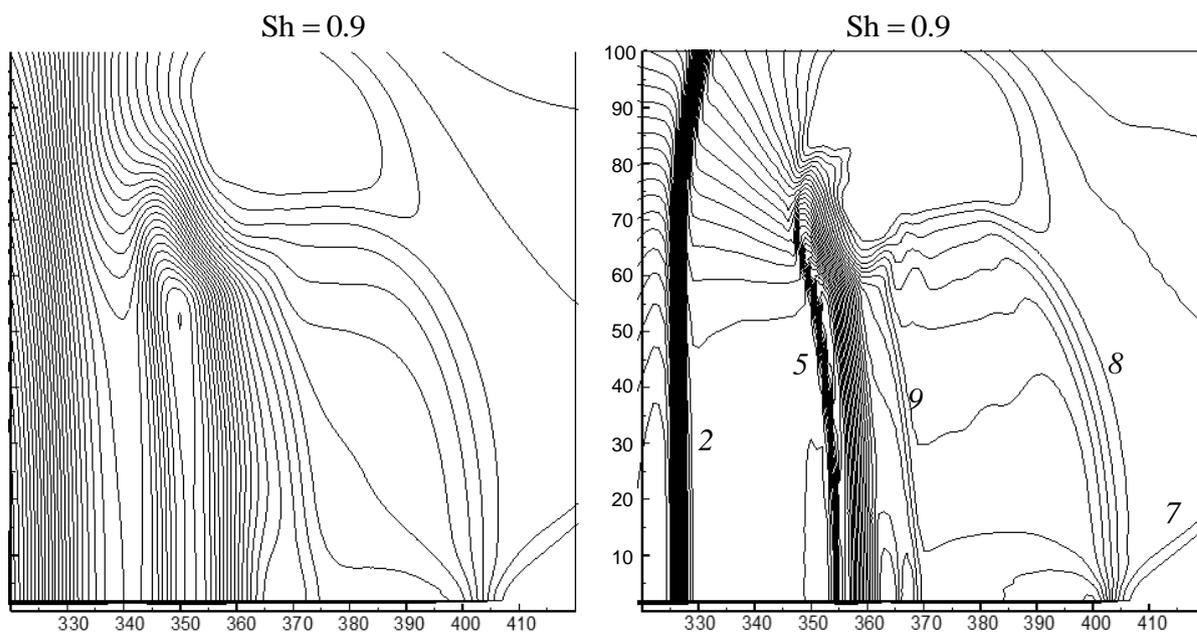


Рис. 9. Линии равных приведенных плотностей газа, полученные методом "крупных" частиц (слева) и по TVD-схеме с ограничителем Superbee (справа)

Заключение

Численные эксперименты подтвердили работоспособность (точность и устойчивость) представленной разностной схемы для моделирования течений со сложной волновой конфигурацией и пригодность ее использования для решения жестких задач динамики гетерогенных сред.

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987.
2. Baer M. and Nunziato J. A two-phase mixture theory for the deflagration-to detonation transition (DDT) in reactive granular materials // *Int. J. Multiphase Flows*, 12, 1986, pp. 861–889.
3. Жилин А.А., Федоров А.В. Применение схемы TVD для расчета двухфазных течений с различными скоростями и давлениями компонентов // *Математическое моделирование*. 2008. Т. 20, № 1. С. 29–47.
4. Saurel R. and Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *J. Comput. Phys.*, 150(2), 1999, pp. 425–467.
5. Chen G., Levermore C., and Liu T. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy // *Comm. Pure. Appl. Math.*, 47, 1994, pp. 787–830.
6. Садин Д.В. Модифицированный метод крупных частиц для расчета нестационарных течений газа в пористой среде // *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.* – 1996. Т.36. №10. – С. 158–164.
7. Садин Д.В. Метод расчета волновых гетерогенных течений с интенсивным межфазным взаимодействием // *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.* – 1998. Т.38. №6. – С. 1033–1039.
8. Садин Д.В. О сходимости одного класса разностных схем для уравнений нестационарного движения газа в дисперсной среде // *Ж. вычислит. матем. и матем. физ.* 1998. Т.38. №9. С. 1572–1577.
9. Садин Д.В. Проблема жесткости при моделировании волновых течений гетерогенных сред с трехтемпературной схемой межфазного тепло- и массообмена // *Прикладная механика и техническая физика*. 2002. Т. 43, № 2, С.136–141.
10. Садин Д.В. О жесткости систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения гетерогенных сред // *Математическое моделирование*. 2002. Т. 14, № 11, С.43–53.

11. Садин Д.В., Гузенков В.О., Любарский С.Д. Численное исследование структуры нестационарной двухфазной тонкодисперсной струи // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 2, С.91–97.
12. Садин Д.В. Основы теории моделирования волновых гетерогенных процессов. СПб: Военный инженерно-космический университет имени А.Ф. Можайского, 2000.
13. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
14. Иванов А.С., Козлов В.В., Садин Д.В. Нестационарное истечение двухфазной дисперсной среды из цилиндрического канала конечных размеров в атмосферу// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 3. С. 60–66.
15. Садин Д.В. Расчет метания цилиндрического тела нестационарным потоком двухфазной среды // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35. №5. С. 138-144.
16. Садин Д.В. Исследование импульсного истечения двухфазной среды из ограниченного канала, имеющего возможность продольного перемещения // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 1, С.84–91.
17. Станюкович С.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
18. Садин Д.В. Поведение нестационарной струи при истечении смеси газа высокого давления и дисперсной среды из цилиндрического канала в атмосферу // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 1, С.151–157.
19. Стернин Л.Е., Маслов Б.П., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
20. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехтеориздат, 1954.
21. Fringer O-W., Armfield S.W., Street R.L. Reducing numerical diffusion in interfacial gravity wave simulations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2005. 49: Pp. 301–329.

Статья поступила в редакцию 15 ноября 2014 г.