

УДК 533.6.01+519.6+004.92

# ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК НА NURBS-ПОВЕРХНОСТЯХ СЛОЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ АВИАЦИОННОЙ И РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

**Железнякова А.Л., Суржиков С.Т.**

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,  
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1  
a.zheleznyakova@mail.ru*

## Аннотация

В настоящей работе предложен новый молекулярно-динамический метод дискретизации криволинейных параметрических поверхностей произвольной формы для автоматизированного построения трехмерных неструктурированных сеток при решении задач вычислительной аэродинамики. Молекулярно-динамическое моделирование применяется для оптимального распределения подвижных взаимодействующих между собой узлов в пространстве параметров. Расчетная сетка строится по полученному набору точек с использованием триангуляции Делоне и отображается в физическое пространство. Представленный интерактивный алгоритм позволяет контролировать “равновесное” расстояние между парами взаимодействующих частиц в зависимости от кривизны поверхности, что дает возможность создавать как адаптивные, так и однородные поверхностные сетки высокого качества. Предложенная методика используется для создания расчетных сеток на поверхностях сложных CAD-моделей перспективных объектов авиационной и ракетно-космической техники. Приводятся примеры применения метода, иллюстрирующие его возможности.

## A MOLECULAR DYNAMICS-BASED TRIANGULATION OF MULTIPLE NURBS-SURFACES FOR COMPLEX PRODUCTS OF THE AVIATION AND SPACE-ROCKET INDUSTRY

**A.L. Zheleznyakova, S.T. Surzhikov**

*Ishlinskyi Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences (IPMech RAS),  
Russia, Moscow, 119526*

A new computational approach for automated triangulation of multiple trimmed NURBS surfaces, applicable to various CFD (Computational Fluid Dynamics) problems is proposed. This method first distributes the interacting nodes into optimal locations in the parametric domain using molecular dynamics simulation. Then, the well-shaped triangles can be created after connecting the nodes by Delaunay triangulation. Finally, the mapping from parametric space to 3D physical space is performed. Since the presented interactive algorithm allows to control the distance between a pair of nodes depending on the curvature of the NURBS surface, the method generates high quality triangular mesh. The algorithm enables to produce uniform mesh, as well as anisotropic adaptive mesh with refinement in the large gradient regions. Some examples are considered in order to illustrate the method's ability to generate a surface mesh for a complicated CAD model.

### 1. Введение

Для современных задач вычислительной газовой динамики, представляющих практический интерес, форма расчетной области очень сложна. При автоматизированном проектировании нового изделия, будь то корпус автомобиля, корабля или летательного аппарата,

важно обеспечить так называемый сквозной цикл проектирования – от создания виртуальной модели поверхности, с использованием современных систем автоматизированного проектирования, поверхностных и объемных сеточных моделей, до получения полного набора газодинамических данных, интересующих инженеров. Как показывает опыт, процесс создания расчетной сетки в этой технологической цепочке является самым трудоемким.

Автоматически построить структурированную сетку для реалистичных конфигураций такой сложности в настоящее время просто невозможно, даже с использованием блочного подхода. При решении задач автоматизированного проектирования необходимо в максимально сжатые сроки рассмотреть множество вариантов компоновок и конструкций отдельных элементов изделия в широком диапазоне условий эксплуатации. Поэтому развитие методов построения неструктурированных сеток является перспективным направлением.

Процесс создания расчетной сетки состоит из двух этапов. Первый шаг – это генерация расчетной сетки на поверхности сложной модели. На данном, наиболее ответственном этапе, происходит преобразование геометрической модели в расчетную. Какой бы высокой точностью не обладал численный метод решения уравнений газовой динамики, надежность полученных результатов моделирования, в первую очередь, зависит от качества дискретизации сложной поверхности.

В нашей предшествующей работе [1] предложен новый численный метод построения объемных неструктурированных сеток с использованием молекулярно-динамического моделирования. Алгоритм позволяет создавать качественные однородные и адаптивные тетраэдральные сетки для сложных многосвязных областей без предварительной дискретизации ограничивающих поверхностей [1–3]. В этом случае подвижные взаимодействующие между собой узлы распределяются по границам расчетной области в процессе динамического распределения узлов в ее объеме. Подход [1] в качестве исходных данных использует полигональное представление границ расчетной области, которые задаются в виде списка вершин треугольных граней и их внешних нормалей. Несмотря на то, что полигональная аппроксимация имеет тривиальную структуру данных и позволяет использовать простые алгоритмы для построения и визуализации полигонов, данное представление имеет существенные недостатки. Точность воспроизведения исходного объекта с помощью полигональной модели ограничена, особенно при описании гладких криволинейных форм. Повышение точности задания поверхностей в рамках данного подхода приводит к значительному увеличению числа полигонов и, следовательно, возрастанию вычислительных затрат.

Современные системы автоматизированного проектирования, такие как SolidWorks [4], 3ds MAX [5], Rhinoceros 3D [6], Maya [7] для прецизионно точного представления сложнейших геометрических моделей используют набор параметрически заданных поверхностей. При этом применяется специальная кусочно-полиномиальная форма представления – так называемые Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) неоднородные рациональные B-сплайны. Этот термин употребляется по отношению к поверхностям и кривым. Благодаря возможности точного описания любой геометрии (от линии, окружности, дуги или кривой на плоскости до произвольной поверхности любой сложности в пространстве) с использованием минимального количества информации, NURBS-подход получил широкое распространение в анимации, научной визуализации, автоматизированном проектировании и многих других областях.

По сравнению с альтернативным полигональным представлением, в виде множества связанных между собой граней, NURBS-метод может обеспечить любую требуемую точность задания поверхности модели. Для описания фрагмента произвольной кривой или поверхности требуется знать степень полинома, набор определяющих точек, и вектор узловых значений. Это минимальное количество информации, по сравнению с объемом данных о сотнях, если не тысячах, треугольников с их вершинами и нормальными. Кроме этого NURBS аппроксимация сохраняет гладкость исходных поверхностей и дает возможность легко дублировать и воспроизводить любые объекты. Рациональные B-сплайны применяются в известных нейтральных форматах обмена данными, таких как IGES [8] или STEP [9]. Единст-

венным недостатком NURBS представления является использование очень сложного математического аппарата. Учитывая преимущества NURBS метода, было бы очень заманчиво использовать данный подход для представления границ расчетной области при создании поверхностных расчетных сеток. Это позволит автоматизировать процесс перехода между геометрической и сеточной моделями и сохранить высокую точность, заложенную в исходной геометрии объекта.

Предложенный в настоящей работе молекулярно-динамический метод построения пространственных неструктурированных поверхностных сеток использует составные NURBS-поверхности и ограничивающие кривые в качестве исходных данных.

Тематике дискретизации NURBS-поверхностей для задач визуализации и инженерного анализа также посвящен ряд работ, в которых описываются подходы, основанные на триангуляции Делоне [10–13] или методе распространяющегося фронта [14–16].

## 2. Математическое описание NURBS-кривых и поверхностей

Кроме очевидных преимуществ, перечисленных выше, NURBS-подход обладает также рядом полезных свойств [17–19]:

1. Гибкость NURBS-представления позволяет создавать большое разнообразие геометрических конфигураций (типовых геометрических объектов, а также кривых и поверхностей произвольной формы) посредством изменения положений задающих точек и значений их весовых коэффициентов.

2. NURBS-кривая (рис. 1) определяется с помощью степени  $k$ , координат ключевых точек  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , узлового вектора  $U$  (неубывающая последовательность действительных чисел – узловых значений  $u_i$ ) и однородных координат задающих точек (весовых коэффициентов или весов)  $w_0, w_1, \dots, w_n$ . Вес  $w_i$  – четвертая координата опорной точки  $P_i$ .

3. Неоднородный рациональный B-сплайн представляет собой кусочно-полиномиальную кривую, представленную в параметрическом виде. Применение кусочно-полиномиальной аппроксимации позволяет не использовать сплайны высокого порядка при большом числе опорных точек и, следовательно, избежать появления нежелательных осцилляций.

4. NURBS-кривая проходит через первую и последнюю задающие точки  $P_0, P_n$  и остается внутри выпуклого многоугольника, образованного опорными точками.

5. Каждая определяющая точка  $P_i$  оказывает локальное влияние на форму кривой на участке  $\{u_i, u_{i+k+1}\}$ .

6. NURBS-объекты инвариантны относительно преобразований масштабирования, вращения, переноса, параллельной и перспективной проекции.

NURBS-кривая  $k$ -й степени (при этом порядок кривой равен  $k+1$ ) определяется параметрическим соотношением:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot P_i \cdot N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_{i,k}(u)}, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad (1)$$

где  $u$  – параметр (NURBS-кривая определена между минимальным  $u_{\min}$  и максимальным  $u_{\max}$  значениями параметра);  $P_i$  – векторы задающих точек на плоскости или в пространстве (рис. 1);  $n$  – число опорных точек;  $w_i$  – однородные координаты определяющих вершин (веса). Чем весовой коэффициент  $P_i$  больше (относительно остальных точек), тем сильнее кривая притягивается к данной управляющей точке. Уменьшение веса вершины приводит к обратному эффекту – отталкиванию кривой от  $P_i$  (рис. 1).

В уравнении (1)  $N_{i,k}(u)$  – базисные функции степени  $k$ , определенные на неоднородном узловом векторе  $U$  с кратностью первого и последнего узловых значений  $k+1$ :

$$U = \{u_i\}_{i=0}^r = \left\{ \underbrace{u_{\min}, \dots, u_{\min}}_{k+1}, u_{k+1}, \dots, u_{r-k-1}, \underbrace{u_{\max}, \dots, u_{\max}}_{k+1} \right\}, r = n + k + 1. \quad (2)$$

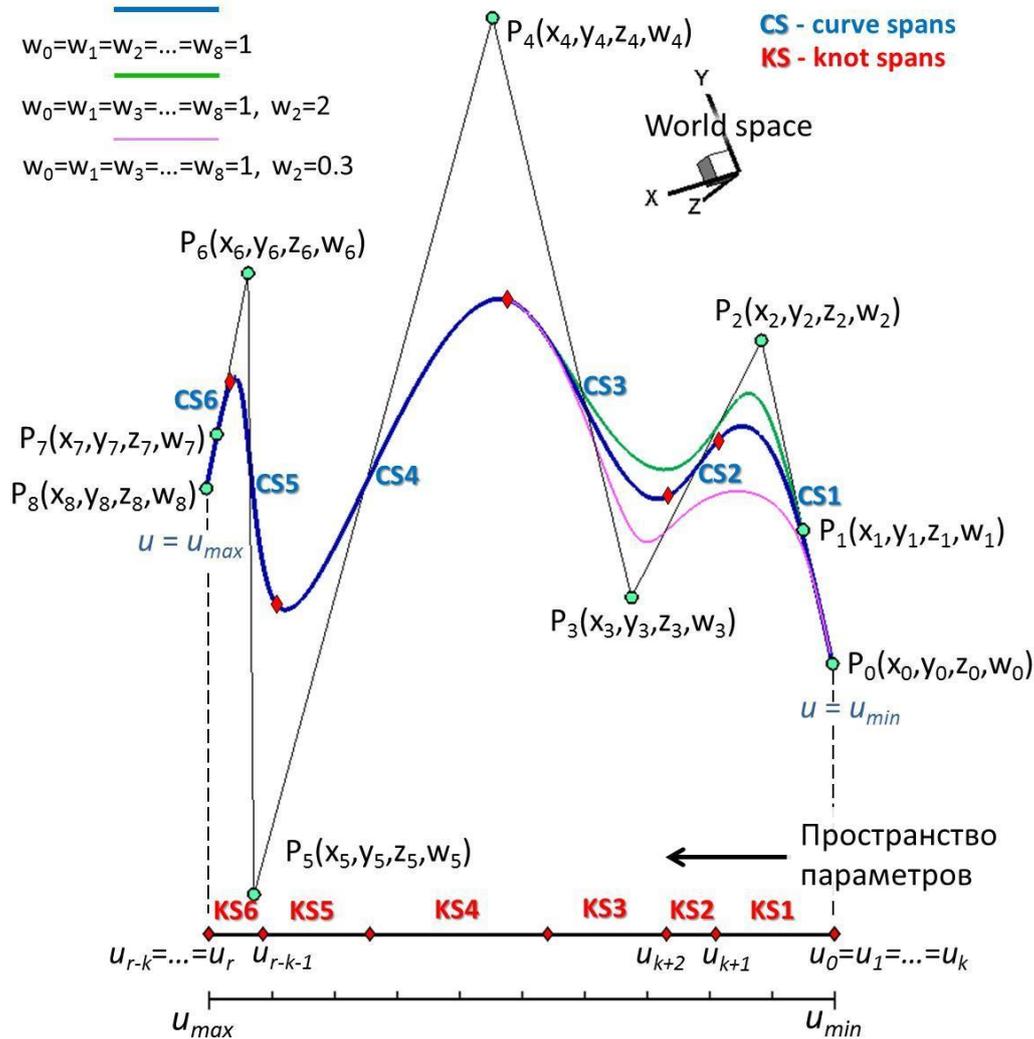


Рис.1. Пример NURBS-кривой степени  $k = 3$ , заданной опорными точками  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Изменение формы сплайна при вариации весового коэффициента контрольной точки  $P_2$

Число промежутков  $[u_i, u_{i+1}]$  узловых значений параметра  $u$  в выражении (2), где  $u_i \neq u_{i+1}$  (некратные узлы) равно числу интервалов NURBS-кривой (рис. 1). На рисунке интервалы узлового вектора обозначены как KS (knot span), а соответствующие участки кривой – буквами CS (curve span).

Базисные функции В-сплайна рассчитываются с использованием рекуррентных соотношений Кокса [20] и де Бура [21], наиболее удобных для численной реализации:

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{если } u_i \leq u \leq u_{i+1}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{(u - u_i)N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p-1} - u_i} + \frac{(u_{i+p} - u)N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_{i+1}}, \quad p = 2, \dots, k; \quad i = 0, \dots, r-1.$$

В формулах (3) отношение 0/0, приводящее к неопределенности, равно 0.

NURBS-поверхность (рис. 2) может быть представлена как тензорное произведение двух NURBS-кривых.

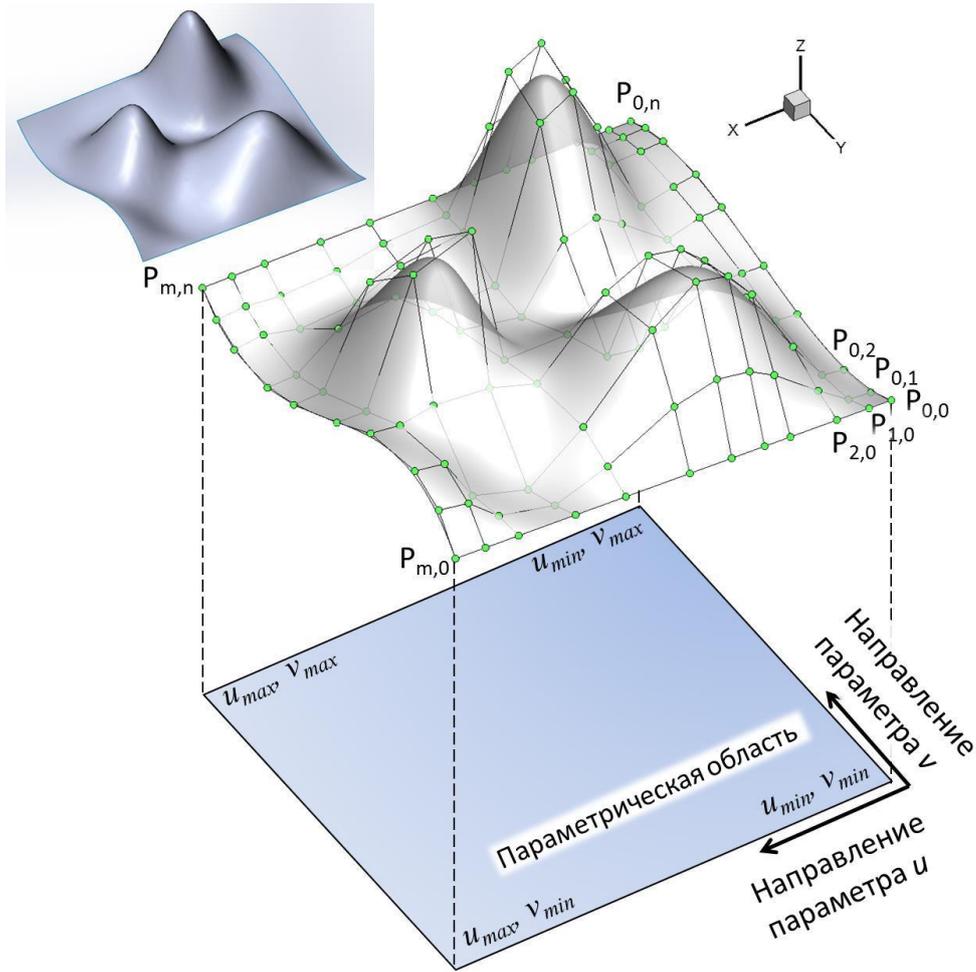


Рис. 2. NURBS-поверхность и ее оболочка опорных точек

Таким образом, расширяя определение NURBS-кривых на двумерное пространство параметров, получаем векторное уравнение произвольной NURBS-поверхности степени  $k$  в параметрическом направлении  $u$  и степени  $l$  в направлении  $v$  в трехмерном пространстве:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} \cdot \mathbf{P}_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,l}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} \cdot N_{i,k}(u) \cdot N_{j,l}(v)}, \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max}, \quad v_{\min} \leq v \leq v_{\max}. \quad (4)$$

где  $u, v$  – параметры;  $\mathbf{P}_{i,j}$  – векторы задающих точек с компонентами  $x, y$  и  $z$ , представленных в виде матрицы (рис. 2);  $w_{i,j}$  – однородные координаты контрольных точек;  $N_{i,k}(u)$ ,  $N_{j,l}(v)$  – нормированные базисные функции, определенные на узловых векторах:

$$U = \{u_i\}_{i=0}^r = \{u_{\min}, \dots, u_{\min}, u_{k+1}, \dots, u_{r-k-1}, u_{\max}, \dots, u_{\max}\}, \quad r = n + k + 1; \quad (5)$$

$$V = \{v_j\}_{j=0}^s = \{v_{\min}, \dots, v_{\min}, v_{l+1}, \dots, v_{s-l-1}, v_{\max}, \dots, v_{\max}\}, \quad s = m + l + 1.$$

Вычисление базисных функций, определенных на векторах узловых значений  $U, V$  проводится также с использованием алгоритма Кокса – де Бура [20, 21]:

$$\begin{aligned}
 N_{i,1}(u) &= \begin{cases} 1 & \text{если } u_i \leq u \leq u_{i+1}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \\
 N_{i,p}(u) &= \frac{(u - u_i)N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p-1} - u_i} + \frac{(u_{i+p} - u)N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_{i+1}}, \quad p = 2, \dots, k; \quad i = 0, \dots, r-1. \\
 N_{j,1}(v) &= \begin{cases} 1 & \text{если } v_j \leq v \leq v_{j+1}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \\
 N_{j,q}(v) &= \frac{(v - v_j)N_{j,q-1}(v)}{v_{j+q-1} - v_j} + \frac{(v_{j+q} - v)N_{j+1,q-1}(v)}{v_{j+q} - v_{j+1}}, \quad q = 2, \dots, l; \quad j = 0, \dots, s-1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

На рис. 2 приведен пример поверхности, иллюстрирующий процесс отображения двумерного пространства параметров в физическое пространство, и формирование NURBS-объекта (представленный результат получен в настоящей работе на основе исходного IGES файла и визуализирован с помощью Tecplot).

### 3. Молекулярно-динамический алгоритм дискретизации NURBS-кривых

Технология разбиения произвольных NURBS-кривых основана на предварительном распределении расчетных узлов в одномерном пространстве параметров с использованием методов молекулярной динамики [1]. Затем, полученное распределение отображается в трехмерное физическое пространство с использованием соотношений Кокса – де Бура (3) для перехода из любой точки области параметров в соответствующую точку физического пространства.

Главная идея молекулярно-динамического метода состоит в том, что узлы будущей сетки это подвижные одноименно заряженные, взаимодействующие между собой частицы, с зарядами  $Q_i$ , и массами  $m_i$ . Силы взаимодействия имеют электрическую природу. На рис. 3 показана схема, иллюстрирующая процесс взаимодействия между парами частиц, которые движутся в одномерном пространстве параметров NURBS-кривой.

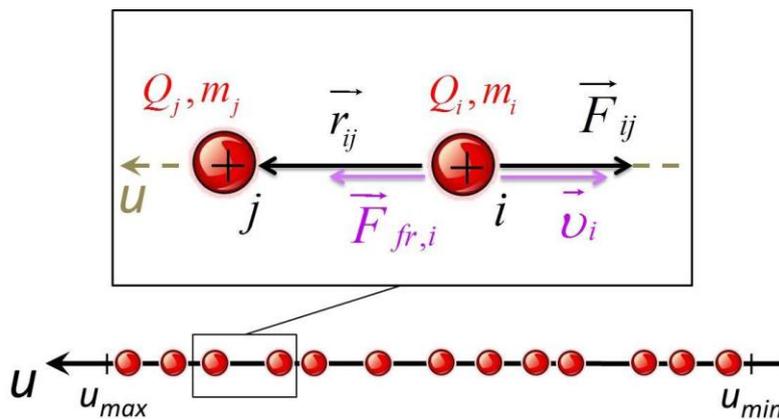


Рис.3. Схема взаимодействия подвижных частиц в области параметра  $u$

Абсолютная величина отталкивающей силы  $\vec{F}_{ij}$ , действующей на  $i$ -ю частицу со стороны  $j$ -й частицы обратно пропорциональна  $a$ -й степени расстояния между зарядами, а ее вектор направлен противоположно радиус-вектору  $\vec{r}_{ij}$ :

$$\vec{F}_{ij} = -C \frac{Q_i Q_j}{|\vec{r}_{ij}|^a} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad a \geq 1, |\vec{r}_{ij}| = h, \quad (7)$$

здесь  $h$  – расстояние между зарядами.

Равнодействующая сил межчастичного взаимодействия, действующая на  $i$ -ю частицу может быть представлена в векторной форме:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^M \vec{F}_{ij}, \quad (8)$$

где  $M$  – число частиц в системе.

Кроме силы взаимодействия на частицы действуют силы сопротивления  $\vec{F}_{fr,i}$ , которые определяются модулем вектора скорости и имеют противоположное ему направление. Благодаря действию диссипативных сил, для определения которых используются различные степенные зависимости от скорости [1], система через достаточно короткий промежуток времени приходит к квазиравновесному состоянию. Частицы совершают лишь незначительные колебания около устойчивых положений равновесия, при этом распределение частиц в одномерном пространстве параметров становится в высокой степени упорядоченным (рис. 4). Границы расчетной области, которые соответствуют минимальному и максимальному значению параметра рассматриваются как неподвижные узлы. Их координаты задаются в качестве исходных данных для молекулярно-динамического моделирования.

Несмотря на кажущуюся простоту, равномерное распределение узлов на NURBS-кривой – задача нетривиальная. Из рис. 4 хорошо видно, что полученное распределение перестает быть однородным при переходе из параметрического пространства в физическое. В настоящей работе предложен интерактивный алгоритм, который позволяет контролировать “равновесное” расстояние между парами взаимодействующих частиц в параметрической области, путем изменения коэффициента  $C$  в соотношении (7) для силы межчастичного взаимодействия. Коэффициент  $C$  определяется кривизной NURBS-кривой в точке нахождения  $i$ -й частицы в данный момент времени. Чем больше кривизна NURBS-объекта, тем сильнее отталкивание между частицами:

$$C = C_2 \cdot \sqrt{K_p}, \quad (9)$$

здесь  $C_2$  – постоянная нормировки. Для расчета степени кривизны  $K_p$  используется следующая приближенная оценка (в рамках решаемой задачи строгое определение не требуется):

$$K_p = \frac{2 \cdot \Delta u}{\left| \mathbf{C}(u_p + \Delta u) - \mathbf{C}(u_p - \Delta u) \right|}. \quad (10)$$

В этом соотношении  $\Delta u$  – малое приращение параметра  $u$ ;  $\mathbf{C}(u_p + \Delta u)$  и  $\mathbf{C}(u_p - \Delta u)$  – радиус-векторы точек NURBS-кривой в физических координатах, соответствующие значениям параметра  $u_p + \Delta u$  и  $u_p - \Delta u$ . Распределение значений  $K_p$  вдоль рассматриваемой NURBS-кривой приведено на рис. 5, вверху (в виде графика и диаграммы). Ниже представлено равновесное распределение частиц, для которых сила взаимодействия изменяется вдоль кривой в зависимости от ее кривизны (7), (9), (10). Хорошо видно, что с использованием полученного в пространстве параметров распределения узлов, исходная NURBS-кривая может быть дискретизирована отрезками практически равной длины. Кроме этого, предложенный алгоритм достаточно прост, эффективен и может применяться для дискретизации произвольных NURBS-кривых в режиме реального времени.

Хотя равномерное разбиение NURBS-объектов имеет множество применений в различных областях, для решения задач газовой динамики необходимо использовать адаптивные сетки.

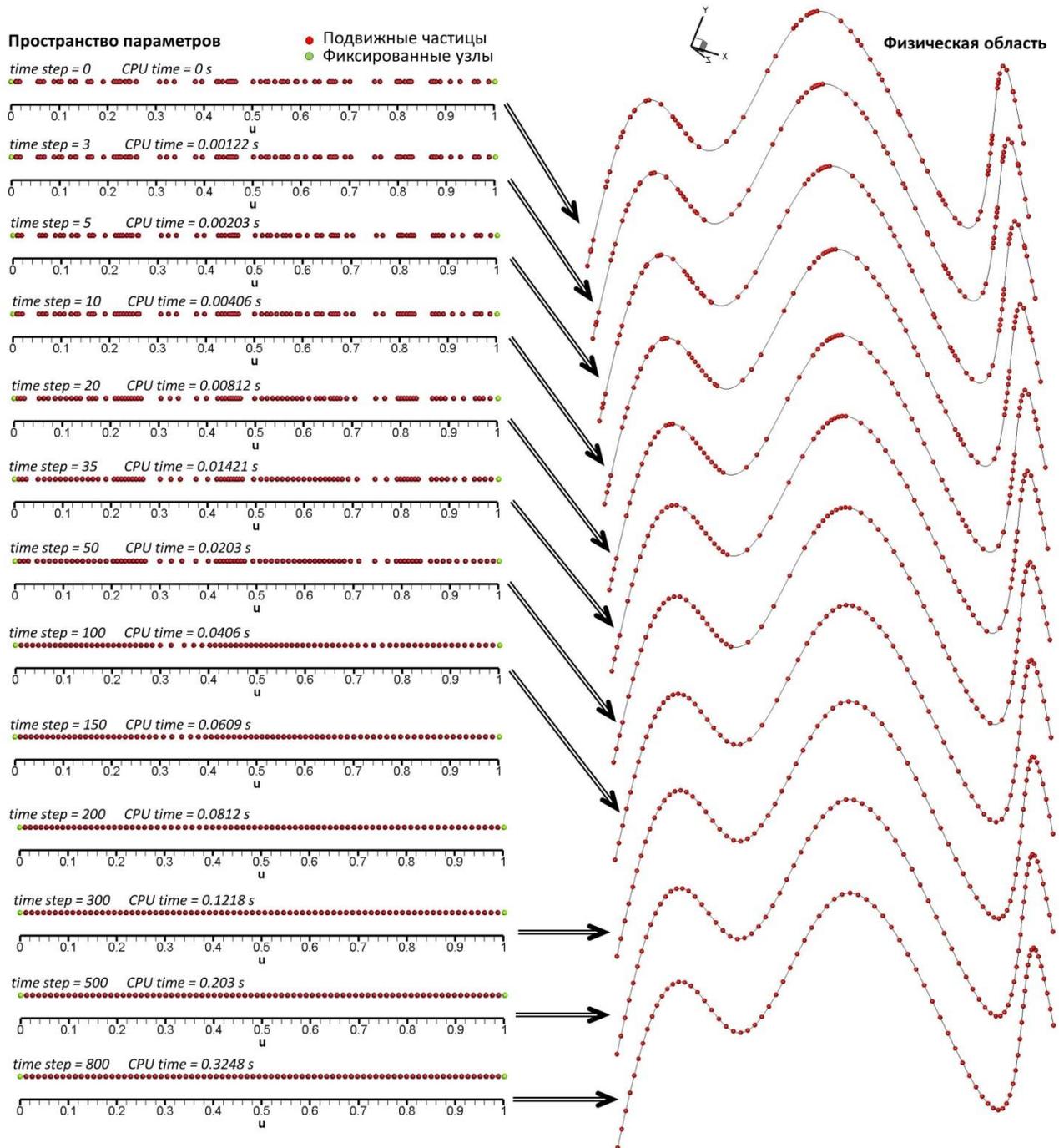


Рис.4. Временная развертка процесса оптимального распределения  $M = 80$  взаимодействующих узлов в одномерном пространстве параметров и физической области

Для создания неоднородных сеток с локальным сгущением узлов, в рамках молекулярно-динамического метода (рис. 6), используется следующий подход. К отталкивающим силам взаимодействия между частицами и сопротивлению, добавляется дополнительная сила притяжения  $\overline{F}_{bound\ ij}$ , действующая на подвижные частицы со стороны фиксированных

узлов на границах. Таким образом, суммарное воздействие на  $i$ -ю подвижную частицу рассчитывается из соотношения:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^M \vec{F}_{ij} + \sum_{j=1}^T \overline{F_{bound\ ij}} + \vec{F}_{fr,i}, \quad (11)$$

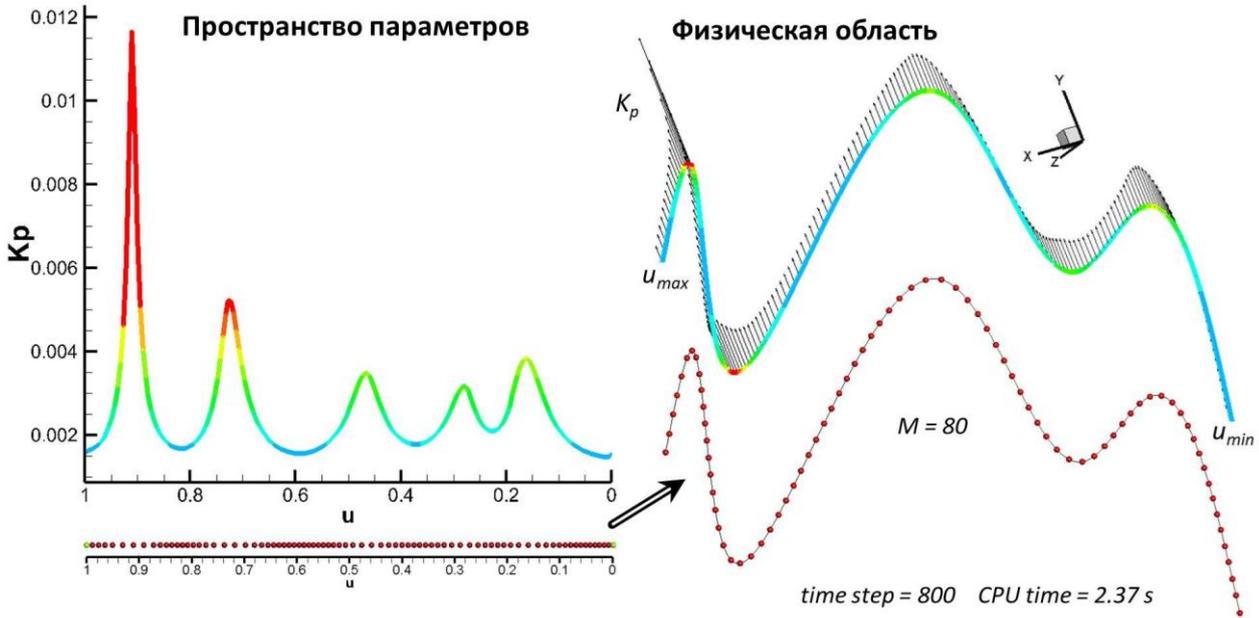


Рис. 5. Изменение значений  $K_p$  вдоль NURBS-кривой, и равномерное распределение узлов, полученное в ходе молекулярно-динамического моделирования с учетом кривизны сплайна

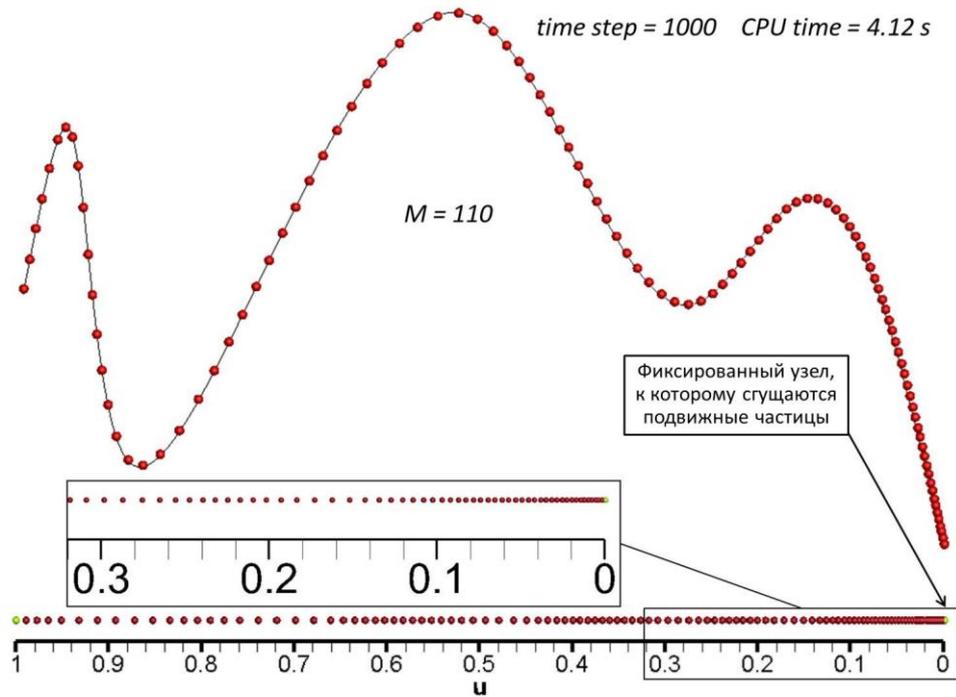


Рис.6. Неоднородная дискретизация NURBS-кривой с локальным сгущением узлов к правой границе сплайна

В (11)  $\vec{F}_{ij}$  – сила отталкивания (7), (9), (10), действующая между любой парой частиц (подвижных или фиксированных);  $M$  – общее число частиц в системе;  $T$  – число неподвижных частиц на границах расчетной области к которым будут сгущаться узлы расчетной сетки;  $\vec{F}_{fr,i}$  – сила сопротивления. Дополнительное притяжение рассчитывается по формуле:

$$\vec{F}_{bound\ ij} = C_{wall} \frac{Q_i Q_{bound\ j}}{|\vec{r}_{ij}|^a} \cdot \frac{\vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|}, \quad a \geq 1, |\vec{r}_{ij}| = h \quad (12)$$

Здесь  $h$  – расстояние от  $i$ -й подвижной частицы до  $j$ -го притягивающего фиксированного узла.

На рис. 6 приведен пример равновесного распределения узлов с локальным сгущением к правой границе соответственно в параметрической и физической областях.

Моделирование динамики системы одноименно заряженных, попарно взаимодействующих частиц или узлов, проводится с использованием уравнений движения Ньютона для каждой  $i$ -й частицы. Численное интегрирование уравнений движения проводится по известному алгоритму Верле [22, 23]. Вычислительные аспекты молекулярно-динамического метода подробно изложены в [1].

#### 4. Построение пространственных неструктурированных сеток на NURBS-поверхностях методом молекулярной динамики

Метод, описанный выше, может быть легко обобщен на случай двумерного пространства параметров и использоваться для создания как однородных, так и адаптивных поверхностных расчетных сеток с треугольными элементами высокого качества. В этом случае взаимодействующие между собой заряженные частицы перемещаются по двумерной параметрической расчетной области (рис.7, вверху слева). Силы взаимодействия  $\vec{F}_{ij}$ , по-прежнему, носят характер отталкивания и определяются по соотношению (7). На рис. 7, вверху справа показана схема взаимодействия подвижных частиц в двумерной параметрической области  $(u, v)$  NURBS-поверхности (см. рис. 2). Частицы перемещаются под действием той же системы сил (11) и быстро приходят к состоянию квазиравновесия. На основе полученного распределения с использованием триангуляции Делоне может быть построена качественная поверхностная сетка (рис. 7). При этом дискретизация проводится в двумерном пространстве параметров, затем отображается в физическое пространство с сохранением связей между узлами.

Для решения задачи равномерного распределения узлов, кривизна NURBS-поверхности рассчитывается по аналогии с рассмотренным выше одномерным случаем (10). В произвольной точке поверхности  $p$  кривизна вычисляется в двух параметрических направлениях  $u$  и  $v$  как:

$$K_p^u = \frac{2 \cdot \Delta u}{|\mathbf{S}(u_p + \Delta u, v) - \mathbf{S}(u_p - \Delta u, v)|}; \quad K_p^v = \frac{2 \cdot \Delta v}{|\mathbf{S}(u, v_p + \Delta v) - \mathbf{S}(u, v_p - \Delta v)|}, \quad (13)$$

где  $\Delta u, \Delta v$  – малые приращения параметров  $u$  и  $v$ ;  $\mathbf{S}(u_p + \Delta u, v)$ ,  $\mathbf{S}(u_p - \Delta u, v)$ ,  $\mathbf{S}(u, v_p + \Delta v)$  и  $\mathbf{S}(u, v_p - \Delta v)$  радиус-векторы точек NURBS-поверхности в декартовых координатах, соответствующие значениям параметра  $(u_p + \Delta u, v)$ ,  $(u_p - \Delta u, v)$ ,  $(u, v_p + \Delta v)$  и  $(u, v_p - \Delta v)$  соответственно. Компоненты силы взаимодействия в направлениях  $u$  и  $v$  определяется из соотношений аналогичных (7), (9) с учетом значений  $K_p^u$  и  $K_p^v$ . Из определения (13) следует, что  $K_p^u$  и  $K_p^v$  представляют собой плотности координатных линий в соответствующих направлениях. На рис. 8, сверху представлены распределения величин  $K_p^u$  (вверху слева) и

$K_p^v$  (вверху справа) по NURBS-поверхности, покрытой координатной сеткой размерностью  $50 \times 50$ .

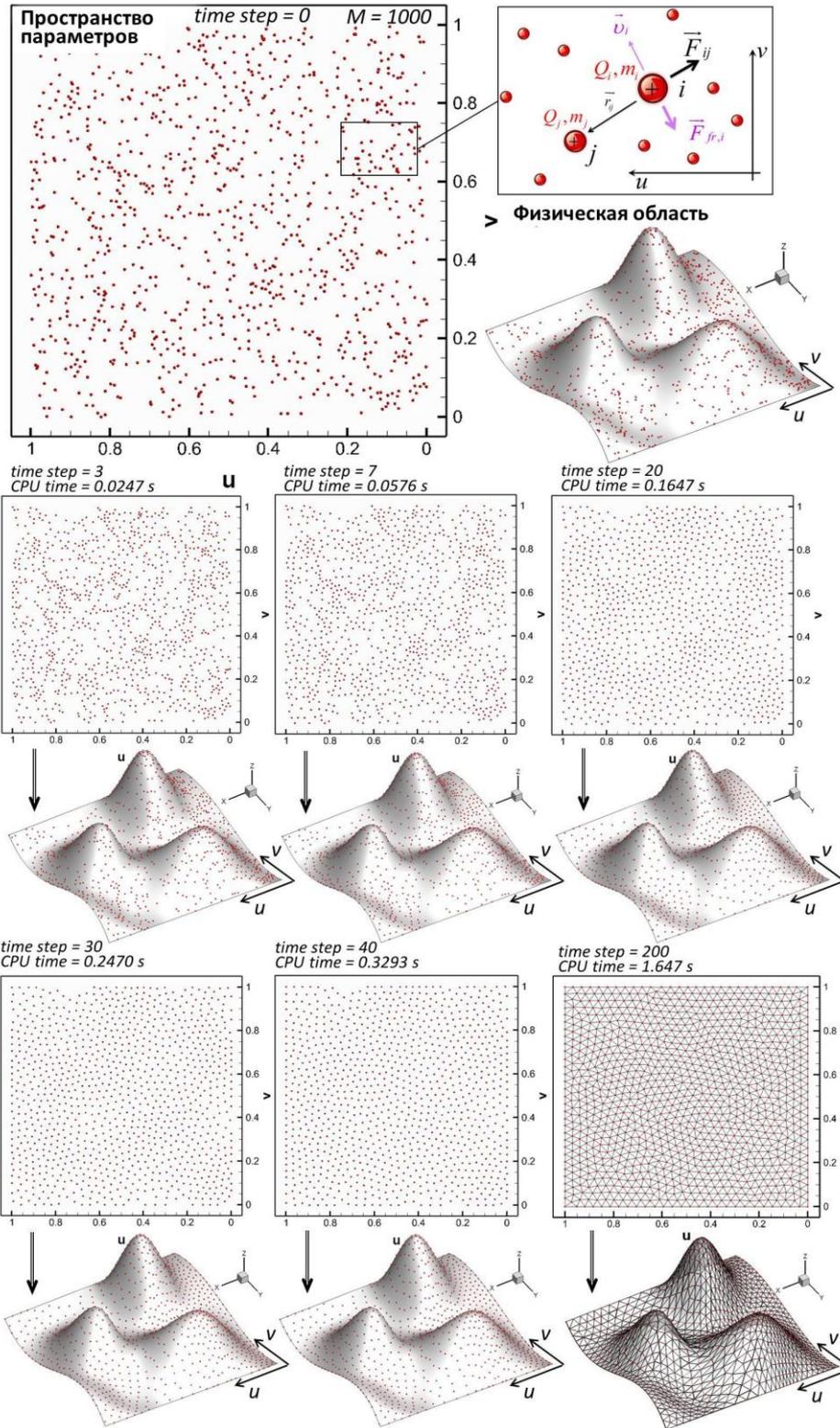


Рис. 7. Процесс распределения подвижных частиц по криволинейной NURBS-поверхности. Триангуляция Делоне, соответствующая равновесному распределению частиц

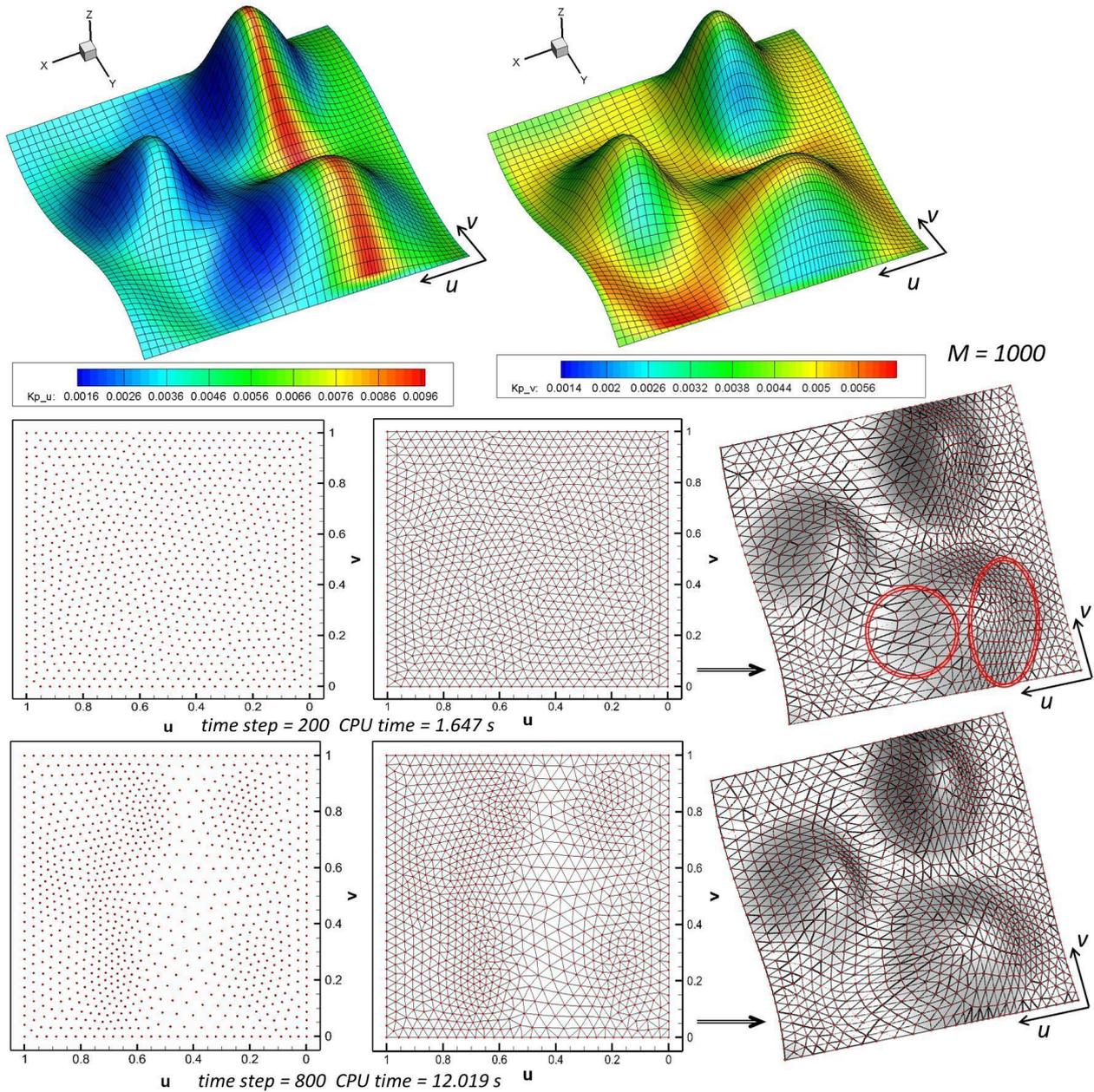


Рис. 8. Изменение локальной плотности координатных линий NURBS-поверхности в направлениях  $u$  (вверху слева) и  $v$  (вверху справа). Равномерное распределение частиц в пространстве параметров поверхности и соответствующая этому распределению расчетная сетка в параметрической и физической областях (в центре). Неоднородное распределение узлов с учетом локальной кривизны поверхности, и триангуляция Делоне, построенная по полученному набору точек в параметрическом и физическом пространствах (внизу)

Локальная неоднородность координатных линий в физическом пространстве хорошо видна из рисунка (красный цвет соответствует областям сгущения линий, синий – областям разрежения). Следовательно, перенос однородной неструктурированной сетки, полученной с использованием молекулярно-динамического моделирования, из пространства параметров в физическую область приводит к искажению треугольных элементов и создает анизотропию сетки (локальные сгущения узлов), там, где в этом нет необходимости. Области с неоднородными треугольными элементами обведены красным цветом (рис. 8, ниже).

Применение молекулярно-динамического алгоритма распределения подвижных узлов, учитывающего кривизну NURBS-поверхности, обеспечивает более высокое качество дис-

кретизации поверхности. Равновесное распределение частиц, сила взаимодействия между которыми вычисляется с учетом локальной плотности координатных линий, и триангуляция Делоне, построенная по полученному набору узлов, показаны на рис. 8, внизу.

## 5. Использование молекулярно-динамического метода для дискретизации составных, триммированных NURBS-поверхностей

В автомобилестроительной и аэрокосмической индустрии, поверхности сложных объектов обычно аппроксимируются с использованием нескольких пересекающихся NURBS-поверхностей. При этом NURBS-поверхности обрезаются (триммируются) по линиям взаимного пересечения, образуя тесно-сопряженные сегменты. Файл нейтрального формата для обмена данными между CAD-системами (например, IGES [8]) содержит информацию о каждом триммированном NURBS-сегменте (NURBS-поверхности и обрезающих ее NURBS-кривых). Каждый сегмент составной поверхности имеет свое собственное пространство параметров. Кроме этого, также независимо, в одномерной параметрической области определяются обрезающие кривые.

На рис. 9 приводится типичный пример сложной CAD-модели. Поверхность гиперзвукового летательного аппарата X-33 [24] представлена в виде NURBS-поверхностей и обрезающих кривых (визуализация модели проводилась на основе исходного IGES файла с использованием специально разработанного алгоритма).

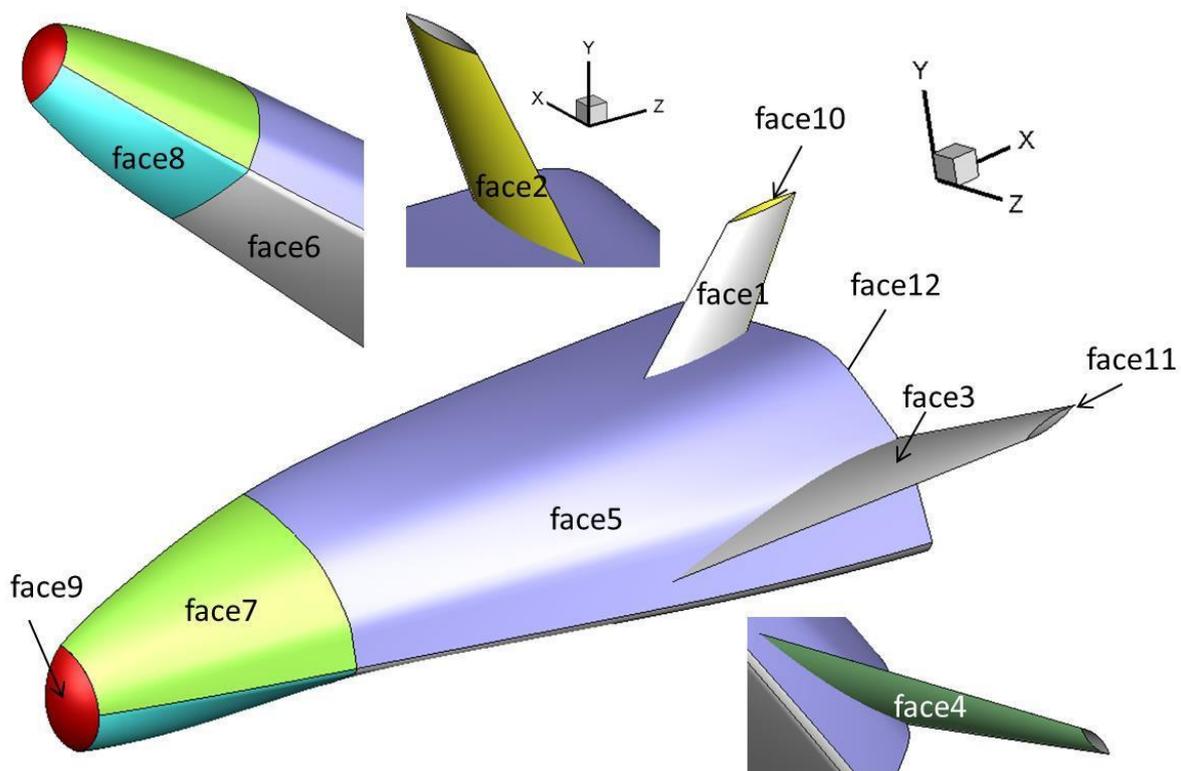


Рис. 9. Визуализация геометрической модели гиперзвукового летательного аппарата X-33, заданной в виде составных NURBS-сегментов и ограничивающих кривых

Процедура построения расчетной сетки на составной, триммированной NURBS-поверхности летательного аппарата X-33 (рис. 12) состоит из следующих этапов. Сначала проводится дискретизация обрезающих кривых для каждой поверхности (рис. 9). Затем, узлы, принадлежащие триммированным кривым, переносятся из пространства модели (физического пространства) в двумерную область параметров NURBS-поверхности (рис. 10, 11). Следует отметить, что обратное отображение (из физического пространства в параметриче-

ское) – более сложная задача. Эта процедура будет описана ниже. На рис. 10 показаны этапы построения расчетной сетки для поверхности *face1*:

1. Разбиение сопрягающей (обрезающей) кривой (число узлов  $T = 65$ ).
2. Получение неоднородного распределения узлов с использованием молекулярно-динамического метода в пространстве параметров поверхности *face1*. Узлы триммирующей кривой предварительно переносятся в область параметров и в ходе моделирования рассматриваются как неподвижные частицы, “обрезая” часть расчетной области.
3. Создание триангуляции Делоне по полученному набору точек и последующее отображение в пространство модели.

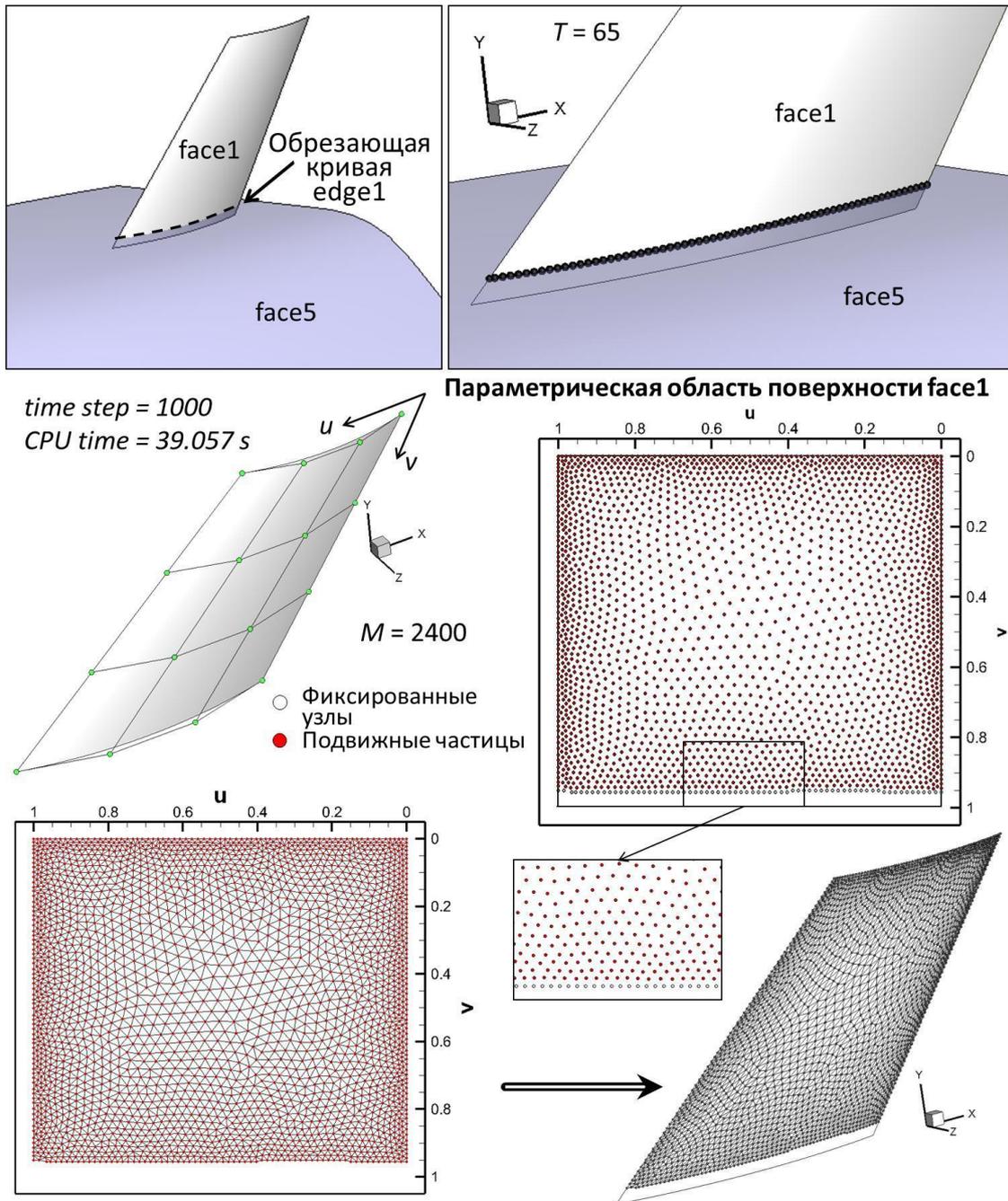


Рис. 10. Построение пространственной адаптивной расчетной сетки для триммированной NURBS-поверхности с использованием молекулярно-динамического метода

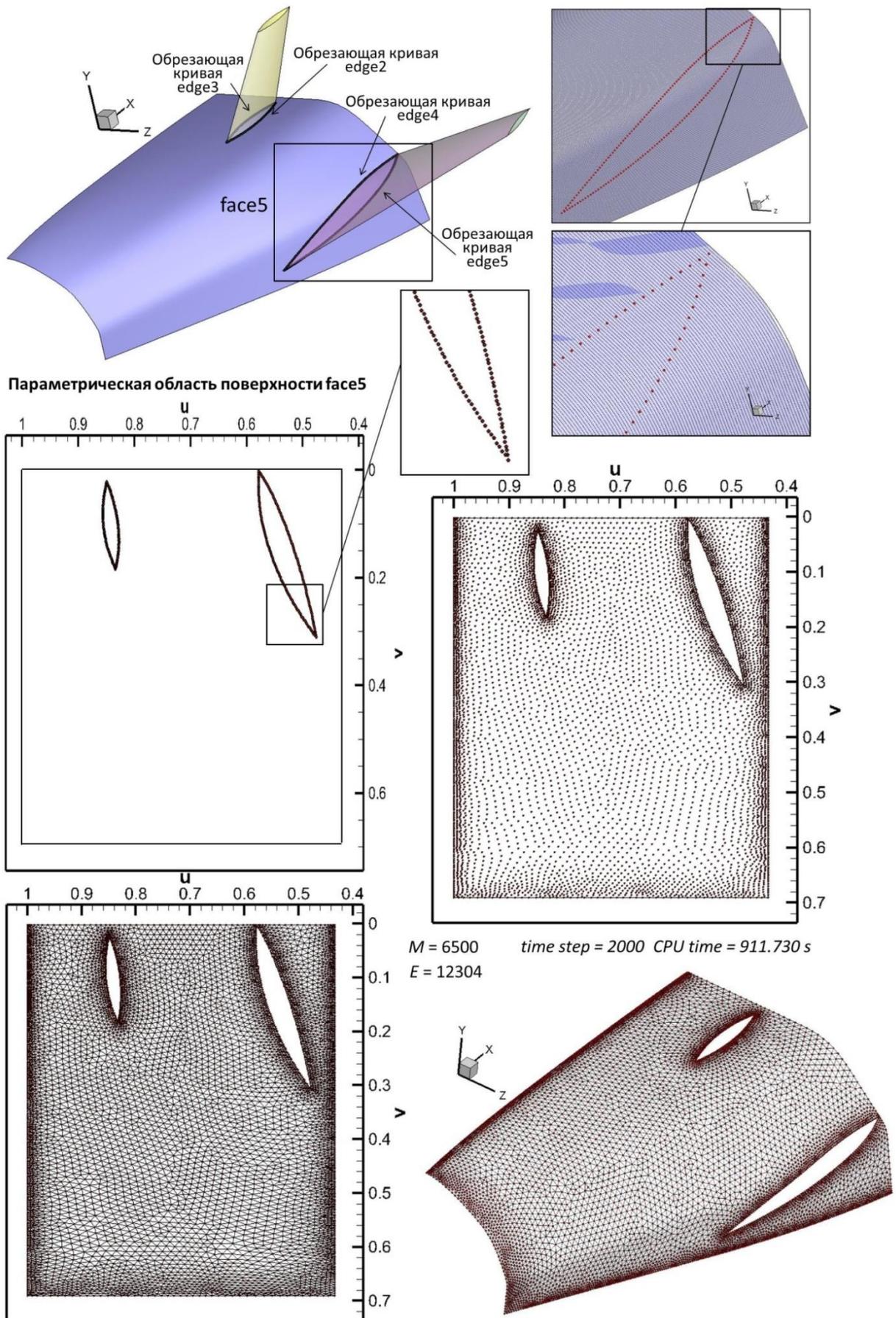


Рис.11. Этапы дискретизации поверхности *face5*

Для адаптации сетки к границам области параметров NURBS-поверхности применялась технология, разработанная для локального сгущения узлов NURBS-кривых. По аналогии с одномерным случаем, к действующим на подвижные частицы силам добавляется дополнительная сила притяжения  $\overline{F}_{bound;ij}$  к фиксированным узлам (рис. 12), а в рассматриваемой ситуации к неподвижным узлам сопрягающей кривой. Центры сгущения (неподвижные притягивающие узлы) можно располагать не только на границах, но и внутри расчетной области.

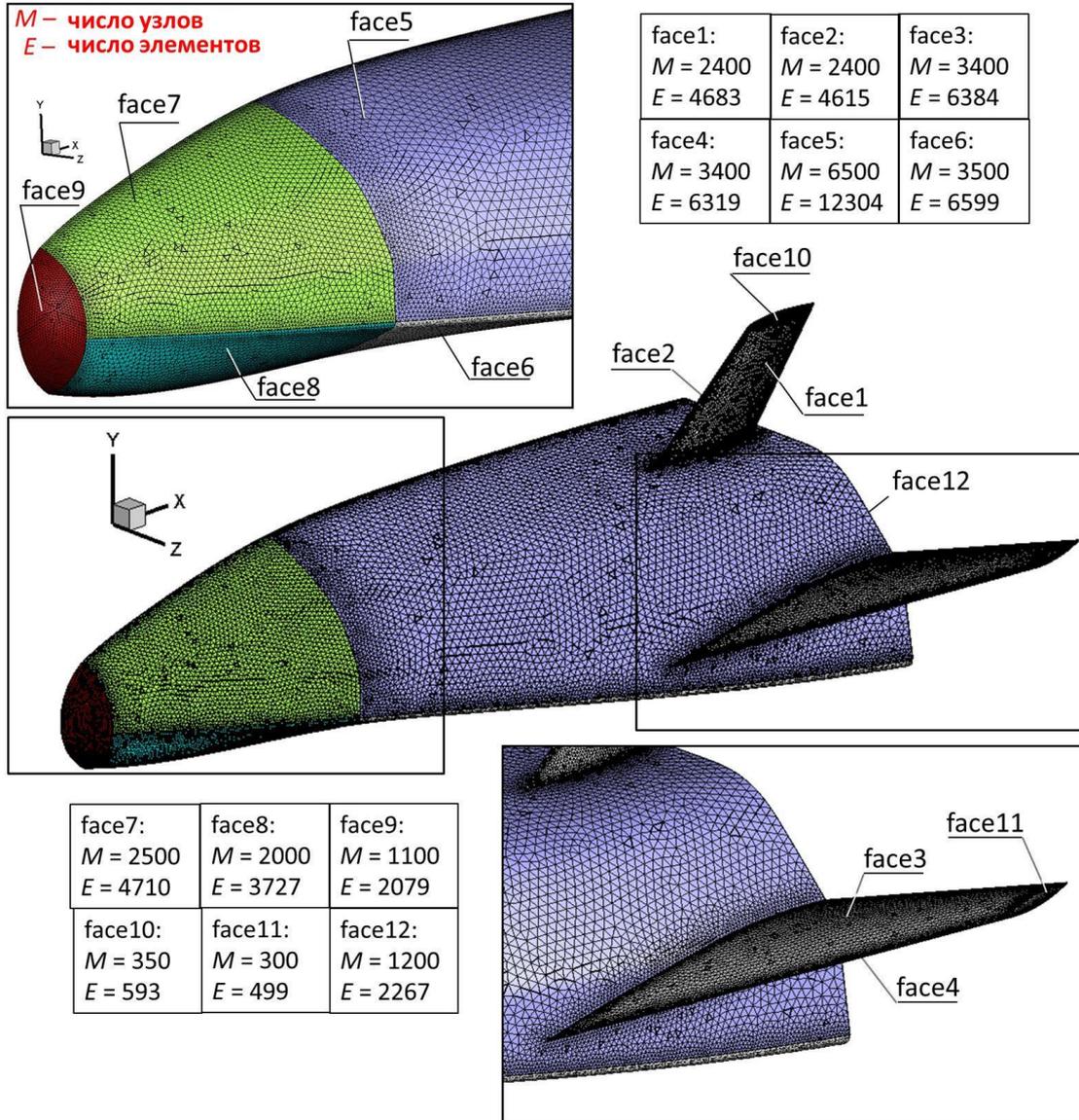


Рис.12. Трехмерная неструктурированная сетка на составной NURBS-поверхности модели X-33, построенная с использованием молекулярно-динамического метода

В общем случае триммированные NURBS-поверхности могут также содержать дыры. Рассмотрим подробно процесс триангуляции поверхности *face5*, которая содержит два отверстия (рис. 11). Сначала узлы триммирующих кривых переносятся из пространства модели в область параметров поверхности. Для этого поверхность покрывается достаточным количеством опорных точек. После чего, каждый узел разбивающей кривой совмещается с ближайшей точкой на поверхности и переносится в пространство параметров. Для данного случая, как и для предыдущего, оптимальное распределение узлов может быть получено в процессе молекулярно-динамического моделирования. При этом координаты

наты фиксированных узлов обрезающих кривых в пространстве параметров задаются в качестве исходных данных. После оптимального распределения подвижных частиц и создания триангуляции по полученному набору узлов, сетка отображается в пространство модели. Все описанные этапы проиллюстрированы на рис. 11.

Дискретизация остальных поверхностей (см. рис. 9) проводится таким же образом. На рис. 12 представлена пространственная неструктурированная сетка на поверхности модели X-33, построенная с использованием молекулярно-динамического метода.

## Заключение

Предложен новый алгоритм для построения пространственных неструктурированных поверхностных сеток, использующий представление сложных поверхностей в виде NURBS-сегментов и сопрягающих кривых. Представленный подход позволяет установить тесную связь между геометрической и расчетной моделями, автоматизировать процесс дискретизации, сохранить высокую точность, заложенную в исходной геометрии объекта.

Технология использует молекулярно-динамическое моделирование для оптимального распределения подвижных взаимодействующих между собой узлов в области параметров. Расчетная сетка строится по полученному набору точек с использованием триангуляции Делоне и отображается в пространство модели с сохранением связей между узлами. Представленный метод позволяет контролировать “равновесное” расстояние между парами взаимодействующих частиц в зависимости от кривизны поверхности, что дает возможность создавать в автоматическом режиме как однородные, так и адаптивные поверхностные сетки высокого качества с локальным сгущением узлов в зонах больших градиентов и вблизи геометрических особенностей. При этом нужная анизотропная структура расчетной сетки формируется сразу, что позволяет не проводить дополнительную процедуру локального сгущения или разрежения узлов. Дискретизация выполняется в двумерной параметрической области, что является менее затратным, чем пространственное молекулярно-динамическое моделирование. К тому же, предложенный алгоритм достаточно прост, эффективен и может применяться для дискретизации произвольных NURBS-кривых и поверхностей в режиме реального времени. Для демонстрации возможностей подхода приведены примеры расчетных сеток, построенных с его использованием.

Работа выполнена в Лаборатории радиационной газовой динамики ИПМех РАН в рамках Программы фундаментальных исследований Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления (ОЭММПУ) РАН «Аэротермомеханика и навигация гиперзвуковых летательных аппаратов» (руководитель проекта академик Д.М.Климов), а также в рамках грантов РФФИ №№ 07-01-0133, 10-01-00544, 13-01-00537, 13-08-12033-ОФИМ, 11-08-12072-ОФИМ, гранта Президента РФ № МК-5324.2014.1 для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук и программы сотрудничества ИПМех РАН и ВНИИА им. Н.Л.Духова.

## Литература

1. Zheleznyakova A.L., Surzhikov S.T. Molecular dynamic-based unstructured grid generation method for aerodynamic application // Computer Physics Communication, V.184, (2013) 2711-2727.
2. Железнякова А.Л. Молекулярно-динамический метод построения неструктурированных сеток в сложных пространственных областях и на криволинейных поверхностях // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2012. Том 13, вып. 4. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-12-10-002.pdf>
3. Железнякова А.Л. Использование эффективных алгоритмов оптимизации и суперкомпьютерных технологий при построении неструктурированных расчетных сеток методом молекулярно-динамического моделирования // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2013. Том 14, вып. 4. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2013-12-20-003.pdf>
4. SolidWorks. <http://www.solidworks.com/>

5. Autodesk | Products | 3ds Max | 3D modeling, animation, and rendering software. <http://www.autodesk.com/>
6. Rhinoceros. <http://www.rhino3d.com/>
7. Autodesk | Products | Maya. <http://www.autodesk.com/>
8. The Initial Graphics Exchange Specification (IGES) Version 6.0 (Draft), IGES/PDES Organization, November 30, 2001. 732 p.
9. ISO 10303-21:2002, Industrial automation systems and integration - Product data representation and exchange – Part 21: Implementation methods: Clear text encoding of the change structure.
10. Sheng X., Hirsch B.E. Triangulation of trimmed surfaces in parametric space // *Computer-Aided Design*. Vol.24, № 8, 1992. Pp. 437–444.
11. Piegl L.A., Richard M.A. Tessellating trimmed NURBS surfaces // *Computer-Aided Design*, Vol.27, №1, 1995. P. 16–26.
12. Frey P.J., George P.L. Mesh Generation: Application to Finite Elements. HERMES Science Publishing, Oxford, Paris, 2000. 814 p.
13. Piegl L.A., Tiller W. Geometry-based triangulation of trimmed NURBS surfaces // *Computer-Aided Design*. Vol.30, № 1, 1998. Pp. 11–18.
14. Cuilliere J.C. An adaptive method for the automatic triangulation of 3D parametric surfaces // *Computer-Aided Design*. Vol.30, № 2, 1998. Pp. 139–149.
15. Tristano J.R., Owen S.J., Canann S.A. Advancing Front Surface Mesh Generation in Parametric Space Using a Riemannian Surface Definition // *7th Intl. Meshing Roundtable Proceedings*, 1998. P.429–445.
16. Attene M., Falcidieno B., Spagnuolo M., Wyvill G. A mapping independent primitive for the triangulation of parametric surfaces // *Graph. Models*. Vol. 65, № 5, 2003. P. 260–273.
17. Rogers D.F. An Introduction to NURBS with Historical Perspective. Morgan Kaufman Publishers, San Fransisco, 2001. 324 p.
18. Piegl L.A., Tiller W. The NURBS Book. Springer, 1997. 646 p.
19. Lee K. Principles of CAD/CAM/CAE Systems. Addison-Wesley, California, 1999. 582 p.
20. Cox M.G. The Numerical Evaluation of B-Splines // *J. Inst. Maths. Applies*. Vol.15, 1972, P.95–108.
21. de Boor C. On calculating with B-Splines // *J. of Approx. Theory*. Vol. 6, 1972. Pp. 52–60.
22. Verlet L. Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamic properties of Lennard-Jones molecules // *Phys. Rev*. Vol. 159, 1967. Pp. 98–103.
23. Verlet L. Computer experiments on classical fluids. II. Equilibrium correlation functions // *Phys. Rev*. Vol 165, 1968. Pp. 201–214.
24. Cook S.A. X-33 Reusable Launch Vehicle Structural Technologies // *AIAA Paper 97-10873*, Nov. 1996.

Статья поступила в редакцию 16 ноября 2014 г.