

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ФИЗИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

М.К. Ермаков

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Россия, Москва, 119526, проспект Вернадского, д.101-1*

Аннотация

В работе анализируются методы решения линейных систем для разностных уравнений, содержащих оператор Лапласа. Для уравнения Пуассона для давления, используемого в проекционном методе решения уравнений Навье-Стокса в системе COMGA, сравниваются эффективности метода последовательной верхней релаксации, быстрого преобразования Фурье и алгебраического многосеточного метода. На основе применения алгебраического многосеточного метода проведено двумерное моделирование течения в жидком мосте при числе Прандтля 68, соответствующего космическому эксперименту MEIS, и воспроизведено появление трехмерной неустойчивости подъемно-опускного течения в вертикальном слое при наличии горизонтального градиента температуры. Продемонстрирована высокая эффективность нового подхода для решения задачи распространения излучения в методе сферических гармоник и решения уравнений с оператором Лапласа на пространственных неструктурированных сетках. Обсуждаются вопросы распараллеливания алгебраического многосеточного метода для решения уравнения Пуассона на перспективной параллельной архитектуре GPU.

A USE OF MULTIGRID METHOD FOR PHYSICAL MECHANICS PROBLEMS

M.K. Ermakov

Institute for Problems in Mechanics Russian Academy of Sciences, Russia, Moscow, 119526

Linear system solution methods for discretized equations with the Laplace operator are analyzed in the paper. Efficiency of successive over relaxation method, fast Fourier transform and algebraic multigrid method are compared for the Poisson equation for pressure being used in COMGA software code. 2D modeling of a flow in a liquid bridge at Prandtl number equals 68, being corresponded to MEIS space experiment, is fulfilled on a basis of algebraic multigrid method and an appearance of three-dimensional instability in Hadley circulation flow under horizontal thermal gradient is reproduced. High efficiency of a new approach for radiation spreading in spherical harmonics method and high efficiency of equations with the Laplace operator on unstructured spacial grids is demonstrated. Parallelization problems of the algebraic multigrid method for the Poisson equation on a perspective GPU parallel hardware architecture are discussed.

1. ВЕДЕНИЕ

Решение современных задач математической физики характеризуется увеличением сложности систем определяющих уравнений и размерности векторов неизвестных, подлежащих определению. Сравнительно простые алгоритмы, такие как широко распространенные в недавнем прошлом, методы Гаусса – Зейделя, последовательной верхней релаксации и прогонки теряют свою эффективность с увеличением размерности решаемых линейных систем. Более широкое использование нерегулярных сеток и метода конечных элементов также требует использования более эффективных методов решения систем. В настоящее время все чаще используется метод Ньютона в матричной форме для решения систем нелинейных уравнений, составной частью которого является решение системы линейных уравнений высокой размерности [1]. В работе обсуждаются современные методы решения линейных систем высокой размерности и исследуются возможности алгебраического многосеточного метода для решения уравнений, содержащих оператор эллиптического типа.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Среди различных уравнений, решаемых разностными методами, важное место занимают уравнений эллиптического типа. Уравнения с оператором Лапласа возникают в теории гравитационного потенциала, при описании процессов типа диффузии в уравнениях Навье – Стокса, уравнениях Максвелла, переноса излучения и др. Несмотря на кажущуюся простоту оператора Лапласа и возникающие симметричные матрицы при его аппроксимации, отсутствие диагонального преобладания матриц и то, что областью зависимости решения в каждой точке является вся область решения, делает его одним из ключевых объектов исследования и совершенствования численных методов [2]. Необходимость развития численных методов, для уравнений, содержащих оператор Лапласа, например, для уравнения Пуассона, связана с тем, что характерные сетки для решения задач математической физики достигают 1000×1000 расчетных точек для двумерных задач и $100 \times 100 \times 100$ для трехмерных задач, для которых простые традиционные методы неэффективны.

Значительное количество методов решения уравнения Пуассона связано с тем, что при определенных ограничениях на используемые сетки возможно применение существенно более эффективных методов, связанных с быстрым преобразованием Фурье, блочной циклической редукцией [3] и многосеточным методом [4, 5]. В частности, при использовании разложения в ряд Фурье коэффициенты гармоник решения получаются простым масштабированием коэффициентов гармоник правой части. Эффективное использование многосеточного метода для оператора Лапласа связано с тем, что высокочастотные гармоники сильно демпфируются на подробной сетке, а низкочастотные гармоники можно вычислять на достаточно грубой сетке.

Общий обзор методов решения линейных систем для двумерного уравнения Лапласа на сетке $N \times N$ (количество неизвестных равно $n = N^2$) представлены в табл. 1. (см. [2], глава 6.4). В столбцах 2 и 3 указаны оценки количества операций (или времени) и памяти, необходимые для метода на последовательной машине. В столбце 4 отмечено, является ли данный метод прямым (П) или итерационным (И).

Таблица 1

Сравнительная сложность решения уравнения Пуассона на сетке $N \times N$ ($n = N^2$)

Метод	Время	Память	Тип
Холесского для плотных матриц	N^3	n^2	П
Явного обращения	n^2	n^2	П
Холесского для ленточных матриц	n^2	$n^{3/2}$	П
Якоби	n^2	n	И
Гаусса – Зейделя	n^2	n	И
Холесского для разреженных матриц	$n^{3/2}$	$n \log n$	П
Сопряженных градиентов	$n^{3/2}$	n	И
Последовательной верхней релаксации	$n^{3/2}$	n	И
Чебышевское ускорение с SSOR	$n^{5/4}$	n	И
Быстрое преобразование Фурье	$n \log n$	n	П
Блочная циклическая редукция	$n \log n$	n	П
Многосеточный	n	n	И
Нижняя оценка	n	n	

Методы перечислены в порядке возрастания их скорости от самого медленного (алгоритм Гаусса для плотных матриц) до самого быстрого (многосеточный метод). Упорядочение методов также примерно соответствует убыванию их общности: плотная версия метода Холесского применима к любой симметричной положительно определенной матрице, а прочие алгоритмы приложимы (или, по крайней мере, имеют гарантированную сходимость) лишь к специальным классам матриц. Таблица, однако, не дает полной кар-

тины, поскольку в ней отсутствуют константы. Для задачи конкретного порядка и конкретной машины из таблицы нельзя усмотреть непосредственно, какой метод работает быстрее всего. Все же ясно, что для достаточно больших n такие итерационные методы, как алгоритмы Якоби, Гаусса-Зейделя, сопряженных градиентов и последовательной верхней релаксации уступают методам FFT и блочной циклической редукции, а также многосеточному методу. Тем не менее, интерес к этим алгоритмам сохраняется, поскольку из них строятся некоторые более быстрые методы, а также потому, что они применяются к большому кругу задач по сравнению с быстрыми методами.

Несмотря на наличие большого количества общедоступных пакетов [6–9], найти готовую эффективную программу для решения даже уравнения Пуассона для отличающейся от декартовой системы координат и равномерной сетки практически невозможно.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В РАМКАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРИИ COMGA/2D

Виртуальная (компьютерная) лаборатория COMGA реализована для решения классических задач тепловой конвекции для уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска в двухмерных и трехмерных постановках [10–13]. В системе предполагается решение внутренних задач в областях простой формы для термогравитационной и термокапиллярной конвекции. Термокапиллярную конвекцию иначе называют конвекцией Марангони, подразумевая под последней и концентрационно-капиллярную конвекцию.

Удобный интерфейс, быстрые современные схемы и большой опыт решения задач разработчиков системы позволили создать компьютерную лабораторию как средство оперативного решения задач при одновременном наблюдении и, при необходимости, управлении, процессом моделирования задачи. Удобный интерфейс включает в себя достаточно широкий список заранее поставленных задач, для запуска которых достаточно задать 2–3 безразмерных определяющих параметра задачи. Система COMGA благодаря большому количеству решенных задач и успешно повторенных расчетов из статей основных журналов в области механики жидкости и газа может служить средством сертификации расчетов в данной области и других аналогичных программных средств.

В компьютерной лаборатории COMGA реализованы современные схемы решения разностных уравнений, содержащих оператор Лапласа. Стандартная схема решения уравнения движения включает в себя предиктор по скорости, решение уравнения Пуассона для давления (или поправки к давлению) и коррекция скорости для удовлетворения уравнения неразрывности. Для предиктора по скорости используется неявная схема переменных направлений (ADI) или схема, основанная на применении алгебраического многосеточного метода (AMG), используемого для построения переобуславливателя для метода сопряженных градиентов (CG). Описание методов можно найти в [8, 4]. Для решения уравнения Пуассона для давления используются схемы последовательной верхней релакса-

ции (SOR), быстрого преобразования Фурье (FFT) или комбинации алгебраического многосеточного метода с методом сопряженных градиентов. Для уравнения притока тепла (распространения концентрации примеси) обычно используется стандартная неявная схема переменных направлений. Кроме указанных методов для нестационарных уравнений используется расчет по явным схемам, носящих главным образом образовательный характер.

В табл. 2 приведены временные затраты на каждую операцию на одном временном шаге для двумерной задачи тепловой конвекции с размером сетки 128x128 узлов на компьютере Pentium-IV/3.2 ГГц.

Таблица 2

Времена выполнения алгоритмов: явного (Explicit), метода переменных направлений (ADI), алгебраического многосеточного метода (AMG), быстрого преобразования Фурье (FFT) и последовательной верхней релаксации (SOR) для уравнения притока тепла, шага предиктора для скорости, уравнения для давления и шага корректора для скорости, соответственно, для одного шага по времени в секундах

	T	\hat{u}	P	U
Explicit	0.001	0.003	—	0.001
ADI	0.005	0.011	—	—
AMG	0.015	0.043	0.041	—
FFT	—	—	0.004	—
SOR	—	—	0.208	—

Из таблицы следует, что для уравнения для давления, например, наиболее эффективным является метод быстрого преобразования Фурье, которое, однако, можно применять, только если в одном из направлений сетка равномерная и число узлов вдоль этого направления является степенью двойки. Понятно, что далеко не во всех задачах это возможно, и, например, при термокапиллярной конвекции при высоком числе Прандтля возможны течения с очень узкими зонами больших градиентов функций – пограничными слоями в каждом из направлений (рис. 1). В этом случае весьма эффективным методом является комбинация алгебраического многосеточного метода и метода сопряженных градиентов. Эта комбинация может использоваться и для корректора скорости и уравнения притока тепла, хотя в данном варианте, в отличие от метода переменных направлений ADI, неявно аппроксимируется только оператор Лапласа, а оператор конвективного переноса аппроксимируется явно. В обоих случаях, однако, возможны расчеты с числами Куранта, достигающими десяти. Вместе с тем, многосеточный метод, проигрывая в три раза методу ADI, позволяет добиваться меньшей невязки в разностном уравнении, из-за того, что в схеме ADI используется всего одна итерация.

Рассмотрим теперь затраты на один шаг по времени для спектра используемых методов. Наиболее быстрым является первая в табл. 3 комбинация, включающая метод переменных направлений для корректора по скорости и уравнения притока тепла и быстрое преобразование Фурье для уравнения давления, применение которой ограничено вышеупомянутыми ограничениями. Отметим, что для него затраты на наибо-

лее трудоемкое часто уравнение Пуассона составляет 20 %. При необходимости использования многосеточного метода затраты на шаг по времени возрастают в три раза, а на решение уравнения Пуассона для давления затрачивается уже 70 % временных затрат. Эти две, как и третья комбинация являются неявными схемами, допускающими безразмерный шаг по времени 10^{-3} в данной задаче, явные же схемы, к которым относятся четвертая и пятая комбинации методов, допускают шаг по времени только 10^{-5} , поэтому несмотря на существенно меньшие затраты на шаг, явные методы существенно проигрывают неявным, как следует из последней колонки табл. 3.

Таблица 3

Времена выполнения одного временного шага, время расчета до физического времени 0.05 и ускорение расчетов по сравнению с явными методами

	Метод	τ	время шага, с	время выполнения	Ускорение
1	ADI,ADI,FFT	10^{-3}	0.021	1''	1100
2	ADI,ADI,AMG	10^{-3}	0.060	3''	370
3	AMG,AMG,AMG	10^{-3}	0.100	5''	220
4	Exp,Exp,FFT	10^{-5}	0.009	46''	24
5	Exp,Exp,SOR	10^{-5}	0.208	18' 24''	1

Таким образом, алгебраический многосеточный метод в данной реализации компьютерной лаборатории позволяет снять ограничения на равномерность и количество шагов сетки. Время расчетов при этом увеличится от 3 до 5 раз, что все равно существенно быстрее, чем при переходе к явным методам.

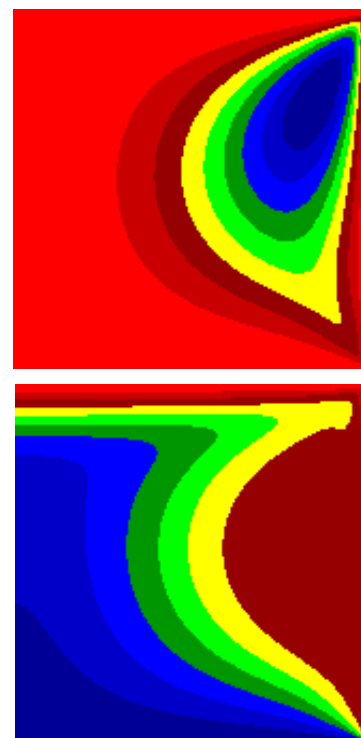


Рис. 1. Изолинии функции тока и изотермы в жидком мосте при $H/D = 0.5$, числе Прандтля 68, числе Марангони 60000

В заключение приведем пример моделирования термокапиллярной конвекции, наиболее сильно прояв-

ляющейся по сравнению с термогравитационной в условиях невесомости и тонких слоях жидкости, в котором демонстрируется необходимость применения существенно неравномерной сетки в обоих направлениях. Приведенный на рис. 1 расчет соответствует термокапиллярной конвекции в цилиндрической зоне (свободная поверхность - справа) с отношением сторон $H/D = 0.5$, число Прандтля жидкости 68 (силиконовое масло) и число Марангони 60000. На изотермах отчетливо видны области тепловых пограничных слоев в точках контакта твердой и свободной поверхностей. Сильное искривление изолиний функции тока в тех же областях свидетельствует о наличии тонких пограничных слоев динамической природы.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

Аналогичным образом многосеточная методика решения систем линейных уравнений, содержащих оператор Лапласа, успешно используется в версии компьютерной лаборатории COMGA для трехмерных течений. Рассмотрим задачу о потере устойчивости течения в вертикальном канале при наличии горизонтального градиента температуры в поле силы тяжести [15]. Для бесконечного вертикального слоя течение является двумерным плоскопараллельным. Профили скорости и температуры в вертикальном слое имеют вид:

$$u = 0,$$

$$v = \frac{Gr}{6}(x^3 - x),$$

$$T = -x,$$

где x – горизонтальная координата (между вертикальными стенками); u , v – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости; T – температура;

$$Gr = \frac{g\beta\Theta h^2}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{a};$$

Pr – число Прандтля; Gr – число Грасгофа; g – ускорение силы тяжести; β – тепловой коэффициент объемного расширения; ν – коэффициент кинематической вязкости; a – коэффициент температуропроводности; h – половина ширины канала; Θ – половина перепада температур.

Согласно анализу линейной устойчивости [15] потеря устойчивости происходит по отношению к трехмерным возмущениям и носит монотонный характер; критическое число Грасгофа равно $Gr = 495$ при числе Прандтля $Pr = 0$.

Рассмотрим трехмерную вертикальную ячейку конечных размеров при отношении высоты (и ширины) к толщине, равному 10. Если на боковых границах поставить условия симметрии, то для докритических чисел Грасгофа течение будет строго двумерным.

При превышении критического числа Грасгофа течение становится трехмерным, отклонения которого от стационарного течения носят регулярный характер. Пример развитого течения в вертикальной ячейке после потери устойчивости представлен на рис. 2 в качестве успешного использования многосеточной методики решения систем линейных уравнений с разност-

ным оператором Лапласа в рамках компьютерной лаборатории для трехмерных течений.

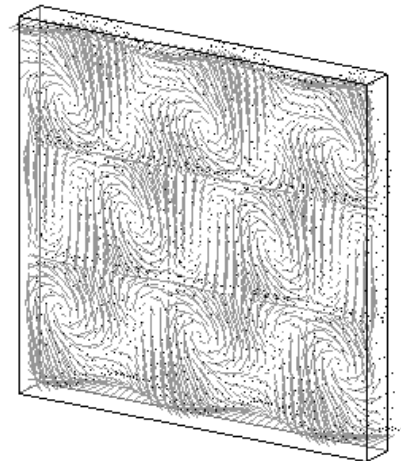


Рис. 2. Вид течения в вертикальной ячейке с горизонтальным градиентом температуры при значении числа Грасгофа, превышающего критическое

5. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЖИДКОМ МОСТЕ ПРИ ВЫСОКОМ ЧИСЛЕ ПРАНДТЛЯ

Как ранее было продемонстрировано в части 3 статьи, термокапиллярные течения при больших числах Прандтля требуют очень подробных, а, следовательно, неравномерных сеток при моделировании ввиду наличия тонких тепловых и динамических пограничных слоев в месте контакта твердых и свободных поверхностей. Реальной трехмерной задачей, потребовавшей эффективно работающего кода на неравномерной сетке, стала задача о потере устойчивости термокапиллярного течения в жидком мосте (полузоне) в рамках космического эксперимента MEIS-1,2 проведенных в японском блоке Международной космической станции в 2008-2009 г. В эксперименте использовалось силиконовое масло с кинематической вязкостью 5 сСт (соответствующее число Прандтля равно примерно 68), и точки нейтральной кривой, полученные в эксперименте, представлены красными угольниками на рис.3 [16, 17]. На том же рисунке представлены точки нейтральной кривой в виде синих квадратов, полученные автором работы исследованием линейной устойчивости уравнений Буссинеска с граничными условиями теплоизоляции и баланса касательных напряжений на свободной поверхности, описывающих термокапиллярный эффект. В то время, как для длинных жидких мостов ($H/D > 1.2$) согласие между экспериментом и линейной устойчивостью можно считать удовлетворительным, то для коротких жидких мостов количественное согласие отсутствует. Вместе с тем, линейный анализ устойчивости предсказывает наличие локального максимума для удлинения $H/D = 1.2$, которому также соответствует разрыв частоты критического возмущения. Возможной причиной немонотонности поведения нейтральной кривой может быть изменение конфигурации основного течения, которое при увеличении удлинения приобретает второй максимум (минимум) функции тока, что можно увидеть, сравнив

распределения функции тока на рис. 1 и 4. Анализ линейной устойчивости показывает также наличие еще одного локального максимума, которое по отношению сторон и критическому числу Мараногни сильно отличается от наблюдаемого в эксперименте.

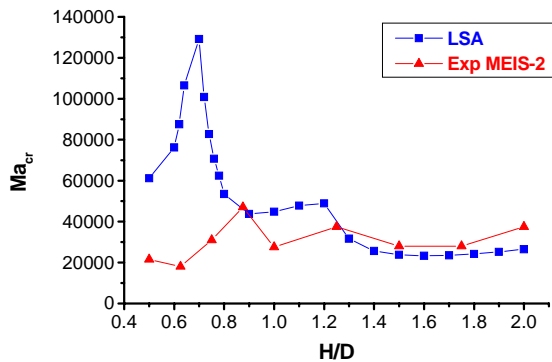


Рис. 3. Нейтральные кривые, полученные в эксперименте MEIS и методом анализа линейной устойчивости

Таким образом, прямое численное моделирование должно ответить на вопросы о корректности решения задачи о линейной устойчивости и собственно физической модели, в которой используются предположение о форме свободной поверхности, как кругового цилиндра, теплоизолированности свободной поверхности и постоянства физических характеристик, кроме поверхностного натяжения, которое считается линейно зависящим от температуры. Следует заметить также, что граничные условия на свободной поверхности, вообще говоря, неизвестны, и, строго говоря, следует решать сопряженную задачу, описывающую движение и теплообмен в окружающем газе.

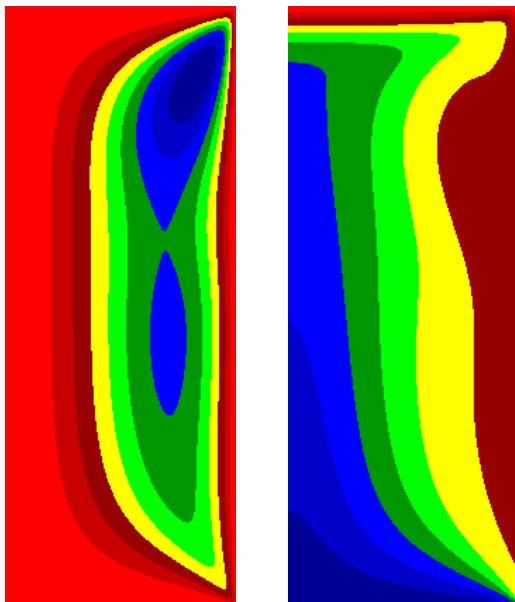


Рис. 4. Изолинии функции тока и изотермы в жидком мосте при $H/D = 1.4$, числе Прандтля 68, числе Мараногни 25000

Однако прямое численное моделирование даже при малых числах Прандтля представляет собой достаточно сложную задачу [18], а для высоких чисел Прандтля апробированных расчетов в научной литературе

просто не существует. Разработка надежного кода для термокапиллярной конвекции в цилиндрической системе координат представляет собой насущную потребность для разрешения описанной проблемы.

6. ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В МЕТОДЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Распространение излучения в методе сферических гармоник описывается уравнением в частных производных эллиптического типа [19, 20]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3k} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = k(U - U_b),$$

где U – плотность энергии излучения; k – объемный коэффициент поглощения излучения. В табл. 4 представлены результаты сравнения времени выполнения расчета дискретного аналога уравнения методом прогонки по линиям с последовательной верхней релаксацией и алгебраическим многосеточным методом на регулярной сетке 100×200 узлов.

Таблица 4

Времена выполнения алгоритмов: прогонки по линиям с последовательной верхней релаксацией и алгебраического многосеточного метода

	ADI+SOR	AMG
Предварительные вычисления	0 с	0.062 с
Решение уравнения	2.031 с	0.047 с

С учетом предварительных вычислений выигрыш в скорости многосеточного метода составил 18.6, а без учета предварительных вычислений – 43.2. Следует отметить, что эффективность многосеточного метода будет повышаться с увеличением размерности сетки, при переходе к трехмерным задачам и ужесточении требования к точности решения разностных уравнений.

7. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

Хотя наличие оператора Лапласа в уравнении движения или притока тепла носит сглаживающий характер, тем не менее, при использовании явных схем он дает более жесткое ограничение на шаг по времени $\tau < h^2/2$, чем конвективный член. В силу этого для аппроксимации оператора Лапласа используются неявные схемы, представляющие собой, как правило, вариант расщепления по направлениям. Такой прием, однако, не применим для неструктурированных сеток, используемых при расчетах в областях сложной формы. В этом случае использованию алгебраического многосеточного метода практически нет альтернатив, например, в задачах гиперзвукового обтекания летательных аппаратов на неструктурированных сетках [21]. В качестве примера был проведен расчет стационарного уравнения диффузии на существенно неоднородной нерегулярной тетраэдральной сетке. При количестве тетраэдров 1.2 млн. время расчета составило 15 секунд на компьютере с процессором Intel Core i7/920, что является очень хорошим результатом.

8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Стандартным способом увеличения производительности систем является переход от однопроцессорных компьютеров к многоядерным и многопроцессорным конфигурациям и графическим ускорителям. Многоядерные технологии реализованы во всех современных массовых процессорах, однако, их количество не превышает, как правило, 8-ми на один процессор. Недостатком многопроцессорных конфигураций является высокое время обмена данными между процессорными элементами, каждый из которых обладает собственной памятью. Среди “графических” процессоров наиболее развита серия Tesla фирмы NVIDIA [22]. Стандартный блок GPU Tesla K40 содержит 2880 процессорных ядер CUDA, поддерживающих “плавающие” вычисления с одинарной и двойной точностью. В качестве инструментального средства используется платформа CUDA. Наличие собственной памяти объемом 12 GB типа GDDR5 позволяет эффективно использовать GPU Tesla для задач, обладающих внутренним параллелизмом. При умеренной стоимости такого “графического” процессора (в 3-5 раз превышающую стоимость системного блока) ускорение для ряда задач вычислительной гидродинамики и молекулярной динамики достигает десятков и сотен раз [22–24]. Свидетельством эффективности GPU является то, что GPU Tesla используются в 40 % наиболее мощных суперкомпьютерах мира согласно последней 42-й версии списка Top 500.

Если для задач с внутренним параллелизмом использование многопроцессорных систем, в частности, GPU, приводит к существенному увеличению производительности, то для решения систем линейных уравнений с разреженными матрицами, к которым сводятся описанные в работе матричные алгоритмы, построение эффективных методов является актуальной проблемой. В случае ее успешного решения технология GPU Tesla будет предоставлять пользователю настольный суперкомпьютер для задач вычислительной гидродинамики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены методы решения линейных уравнений, содержащих разностный оператор Лапласа. Для компьютерной лаборатории COMGA проведено тестирование различных методов решения таких уравнений: метод переменных направлений, быстрое преобразование Фурье, метод последовательной верхней релаксации, алгебраический многосеточный метод. Для них определены условия применения и временные затраты. Продемонстрирована высокая эффективность алгебраического многосеточного метода для решения уравнения Пуассона на неравномерных сетках, распространения излучения в методе сферических гармоник и уравнения диффузии на трехмерной неструктурированной сетке. Отмечено, что развитие GPU позволяет создавать настольный суперкомпьютер с параллельной архитектурой для задач вычислительной гидродинамики. Для задачи о потери устойчивости термокапиллярного течения в жидком мосте при высоких числах Прандтля в области коротких жидких мос-

тов отмечается существенное различие в критических числах Марангони, полученных в космическом эксперименте и методом анализа линейной устойчивости.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

ADI	– alternative directions implicit;
AMG	– algebraic multigrid method;
CG	– conjugate gradiets;
Exp	– explicit;
FFT	– fast fourier transform;
MEIS	– Marangoni Experiment in Space;
SOR	– sucessive over relaxation;
SSOR	– symmetric sucessive over relaxation;
D	– диаметр жидкого моста;
Gr	– число Грасгофа;
H	– высота жидкого моста;
K	– объемный коэффициент поглощения излучения;
Ma	– число Марангони;
u, v	– компоненты скорости в декартовой системе координат;
U	– плотность энергии излучения;
Pr	– число Прандтля;
T	– температура;
r, z	– полярные координаты;
x, y	– декартовы координаты

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермаков М.К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье–Стокса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2010, Т.9. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/010-01-12-031.pdf>
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. – 430 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
5. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М: Физматлит, 2005. – 168 с.
6. Василевский Ю.В., Капырин И.В. Практикум по современным вычислительным технологиям и основам математического моделирования. М: МАКС Пресс, 2009. – 61 с.
7. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T, Flannery B.P. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, 2007.
8. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd edition, SIAM, 2003.
9. <http://www.netlib.org>
10. <http://www.comga.ru>
11. Ермаков М.К., Никитин С.А., Полежаев В.И. Система и компьютерная лаборатория для моделирования процессов тепло- и массообмена. Изв. РАН, Механика жидкости и газа, 1997, №3, с. 22–38.
12. Ермаков М.К., Мяхшина М.Н., Никитин С.А. и др. Компьютерная лаборатория и компьютерный практикум по тепло- и массообмену. Труды Третьей Российской национальной конференции по теплообмену. Т. 3. Свободная конвекция. Теплообмен при химических превращениях. М.: Изд-во МЭИ, 2002, с. 72–75.
13. Ermakov M.K., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. Yaremchuk V.P. Education and tutorial in modeling of elementary flows, heat and mass transfer during crystal growth in ground based and microgravity environment. JCG 266 (2004) 388–395.
14. Stuben K. A Review of Algebraic Multigrid. J. Comp. Appl. Math. 128 (2001) 281.

15. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М., Наука, 1989. – 320 с.
16. Kawamura H., Nishino K., Matsumoto S., Ueno I. Sapce experiment of Marangoni convection on International Space Station. Proc. Int. Heat Transfer Conf. IHTC14, 2010, Washington, USA. Paper IHTC14-23346.
17. Ermakov M.K. Flow stability in liquid bridges at high Prandtl numbers. The fifth Conference of International Marangoni Association “Interfacial Fluid Dynamics and Processes”, 2010, Florence, Italy. Pp. 36–37.
18. Shevtsova V. Thermal convection in liquid bridges with curved free surfaces: Benchmark of numerical solutions. JCG 280 (2005) 632–651.
19. Суржиков С.Т. Тепловое излучение газов и плазмы. М., МГТУ, 2004. – 544 с.
20. Суржиков С.Т. Перспективы многоуровневого подхода к задачам компьютерной аэрофизики // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2008. Том 7. <http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-002.pdf>
21. Железнякова А.Л., Суржиков С.Т. Численное моделирование гиперзвукового обтекания модели летательного аппарата X-43 // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2011. Том 11. <http://chemphys.edu.ru/pdf/2011-02-01-030.pdf>
22. <http://www.nvidia.com>
23. Thibault J., Senocak I. CUDA implementation of a Navier-Stokes solver on multi-GPU desktop platform for incompressible flows. 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Orlando, FL, 2009, paper AIAA-2009-758.
24. Jacobsen D.A., Senosac I. A full-depth amalgamated parallel 3D geometric multigrid solver for GPU clusters. 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Orlando, FL, 2011, paper AIAA-2011-946.