АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

Д.В. Куреннов, А.С. Партин

Институт машиноведения, УрО РАН, Екатеринбург

Аннотация

Рассматриваются некоторые свойства треугольных порций поверхностей Безье и свойства обобщенных полиномов Бернштейна. Использование указанных свойств позволяет получить при аппроксимации криволинейных поверхностей новую конструируемую поверхность низкого порядка.

APPROXIMATION OF SURFACES BY BERNSTEIN'S GENERALIZED POLYNOMS

Some properties of triangular portions of Bezie's surfaces and property of the generalized Bernstein's polynomials are considered. Usage of the specified properties allows receiving a new constructed surface of a low order at approximating of curvilinear surfaces.

1. ВВЕДЕНИЕ

Треугольные порции поверхности являются естественным обобщением метода барицентрических координат на плоскости. Произвольная точка, инцидентная такой порции поверхности, может быть определена с помощью повторяющейся линейной интерполяции. Применяемые при этом алгоритмы линейной интерполяции являются обобщением алгоритмов для одномерного случая. Следовательно, сохранятся и важные свойства геометрических фигур, конструируемых с помощью линейной интерполяции.

2. СВОЙСТВА ТРЕУГОЛЬНЫХ ПОРЦИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗЬЕ

Отметим эти свойства конструируемых треугольных порций поверхности:

1. Поверхности в общем случае принадлежат только три точки характеристического многогранника с барицентрическими координатами (0, 0, 1), (0, 1, 0) и (1, 0, 0).

2. Аффинная инвариантность. Это свойство вытекает из того, что в алгоритме используется линейная интерполяция, являющаяся аффинным преобразованием пространства.

3. Инвариантность при аффинных преобразованиях параметра.

4. Треугольная порция поверхности лежит в выпуклой оболочке своего характеристического многогранника. Это свойство подтверждается тем, что любая точка $r_I^q(u,v,w)$, $0 \le u,v,w \le 1$, определяется с помощью линейной комбинации предыдущих точек $r_I^{q-1}(u,v,w)$.

5. Образом произвольной прямой в плоскости параметров (u,v,w) является кривая n-го порядка на треугольной порции поверхности. Это весьма важное отличие треугольных порций от топологически прямоугольных порций поверхностей.

Треугольную порцию поверхности можно определить, используя обобщенные полиномы Бернштейна:

$$B_I^n(U) = \begin{bmatrix} n \\ I \end{bmatrix} u^i v^i w^k \qquad (1)$$

где $U = U(u,v,w)$ – барицентрические координаты, $I = i + j + k$, $i + j + k = n$, $i, j, k \ge 0$.

3. СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА

Свойства обобщенных полиномов Бернштейна сходны со свойствами одномерных полиномов:

1. Сумма полиномов, определенных на заданном интервале, равна единице $\sum_{|I|=n} B_I^n(U) \equiv 1 \quad \forall U \in [0;1]$.

Это свойство обеспечивает инвариантность полиномов при аффинных преобразованиях. Следовательно, аффинно инвариантны и треугольные порции поверхностей Безье, определяемые этим набором полиномов.

2. Все полиномы положительны на заданном интервале $B_I^n(U) \ge 0 \ \forall U \in [0;1]$.

3. Возможно рекурсивное вычисление полиномов степени n, если известны полиномы степени *(n-1)*:

$$B_I^n(U) = uB_{I-E1}^{n-1}(U) + vB_{I-E2}^{n-1}(U) + wB_{I-E3}^{n-1}(U), \ |I| = n .$$

Решим задачу определения точки, инцидентной треугольной порции поверхности, с заданными барицентрическими координатами на основе повторяющейся линейной интерполяции, используя обобщенные полиномы Бернштейна и их свойства.

Запишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} r_I^q &= ur_{I+E1}^{q-1} + vr_{I+E2}^{q-1} + wr_{I+E3}^{q-1} = \\ &= u\sum_{|J|=q-1} r_{I+J+E1}B_J^q + v\sum_{|J|=q-1} r_{I+J+E2}B_J^q + \\ &+ w\sum_{|J|=q-1} r_{I+J+E3}B_J^q = u\sum_{|J|=q} r_{I+J}B_{J-E1}^q + \\ &+ v\sum_{|J|=q} r_{I+J}B_{J-E2}^q + w\sum_{|J|=q} r_{I+J}B_{J-E3}^q = = \sum_{|J|=q} r_{I+J}B_J^q \end{aligned} \qquad (2)$$

Таким образом, каждый шаг алгоритма связан с линейной интерполяцией, определяемой формулой:

$$r_I^q(U) = \sum_{|J|=q} r_{I+J}B_J^q(U), \ |I| = n - q \qquad (3)$$

Подставляя в предыдущее уравнение $q=n$, получим уравнение треугольной порции поверхности Безье, определенной с помощью обобщенных полиномов Бернштейна:

$$r^n(U) = r_0^n(U) = \sum_{|I|=n} r_I B_I^n(U)$$

или $$r^n(U) = \sum_{|I|=n-q} r_J^q B_J^{n-q}(U);\ \ 0 \le q \le n \tag{4}$$

Угловые точки порции поверхности задаются векторами r_{n00}, r_{0n0} и r_{00n}. Граничные кривые определяются характеристическими ломаными:

$$r^n(u,1-u,0) \to r_{ij0};$$

$$r^n(0,v,1-v) \to r_{0jk};$$

$$r^n(u,0,1-u) \to r_{i0k}.$$

Так же, как и для одномерного случая, перемещение любой из управляющих точек r_I влияет на форму поверхности в окрестности этой точки.

Таким образом, исследование и обобщение методов задания точек, инцидентных кривой, по известным барицентрическим координатам позволили разработать метод определения радиус-вектора точки, инцидентной треугольной порции поверхности Безье, на основе повторяющейся линейной интерполяции трех точек. Треугольную порцию поверхности можно определить, используя обобщенные полиномы Бернштейна. Отличительной особенностью и преимуществом аппроксимации криволинейных поверхностей с помощью обобщенных полиномов Бернштейна является единство с алгоритмами для одномерного случая, а также низкий порядок конструируемых поверхностей (он равен порядку граничных кривых, в отличие от поверхностей тензорного произведения).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия: применение в проектировании и производстве. - М.: Мир, 1982.