

**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕРАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ
МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК**

Д.А. Андриенко^{1,2}, С.Т. Суржиков¹.

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1*

² *Московский Физико-Технический Институт, МО, г. Долгопрудный,
141700, пер. Институтский, 9*

Аннотация

Целью данной работы является нахождение таких радиационных характеристик для космического аппарата при входе в марсианскую атмосферу, как мощность тепловыделения в объеме и плотность потока к поверхности. С этой целью решается система уравнений газовой динамики и химической кинетики в купе с уравнением переноса излучения при помощи программного кода NERAT 2D. В частности, эта работа посвящена решению уравнения переноса излучения в двумерной осесимметричной геометрии методом сферических гармоник (МСГ) в P1 приближении.

**APPLYING THE P1 APPROXIMATION OF SPHERICAL HARMONICS METHOD
FOR HEAT TRANSFER EQUATION”**

Numerical solution of heat transfer equation in the form (20) or (25) has showed, that while decreasing the absorption coefficient the field of heat density takes the form which is quiet different to the form of the energy sources. In addition, at low value absorption coefficient the field of heat density becomes sphere-like and qualitative picture holds on while decreasing absorption coefficient even more. This means, that there is a lower boundary for applying the P1 approximation of spherical harmonics method. Nevertheless, this method is very effective to find out such important characteristics like output heat emission and density flux, because this method is non time intensive. The probable solution of the problem mentioned above is using the approximation of higher order with the P1 approximation, or using ray-tracing method for the layers with the low optical thick.

1. ВВЕДЕНИЕ

Зачастую требуется найти важнейшие радиационные характеристики при спуске космического аппарата в плотные слои атмосферы за максимально короткое время.

Рассматривается поле течения вокруг космического аппарата сферической формы для траектории, определенной как тестовый случай 3 (ТС 3). ТС 3 является упрощением модели Ч. Парка.

Двухмерное уравнение переноса излучения рассматривается в полудивергентной форме, в правой части которой находится слагаемое, отвечающее за то, что уравнение решается в осесимметричной постановке.

Для решения уравнения переноса излучения используется МСГ, в частности его первое (так называемое P1) приближение.

Исследуется сходимость итерационного процесса, а также получаемое решение при различных коэффициентах поглощения излучения в среде.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Система уравнений газовой динамики и химической кинетики, решаемая в программном коде NERAT 2D выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u V) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \text{div} V) +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v V) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\mu \text{div} V) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) + 2 \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p V \text{grad} T =$$

$$= \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \frac{\partial p}{\partial t} + V \text{grad} p + \Phi_\mu + Q_{\text{vib}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_s} \rho c_{p,i} D_i (\text{grad} Y_i \cdot \text{grad} T) - \text{div} q_R - \sum_{i=1}^{N_s} h_i \dot{\omega}_i$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div} \rho_i V = -\text{div} J_i + \dot{\omega}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N_s$$

$$\dot{e}_{v,m} = \rho_{i(m)} \frac{e_{v,m}^0 - e_{v,m}}{\tau_m} - e_{v,m} \dot{\omega}_{i(m)}$$

$$\Omega \frac{\partial J_\omega(r, \Omega)}{\partial r} + \kappa_\omega(r) J_\omega(r, \Omega) = j_\omega(r)$$

3. МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Уравнение переноса излучения в нерассеивающей среде имеет следующий вид:

$$\frac{\partial J_\nu(s, \Omega)}{\partial s} + k_\nu(s) J_\nu(s, \Omega) = k_\nu(s) J_\nu^{em}(s), \quad (1)$$

где J_ν – спектральная интенсивность излучения; $J_\nu^{em}(s)$ – спектральная интенсивность излучения; $k_\nu(s)$ – спектральный коэффициент поглощения.

Для решения уравнения переноса излучения в декартовой системе координат совершается переход в криволинейную систему координат, связанную с конкретной формой космического аппарата. В цилиндрической системе координат уравнение переноса излучения (1) имеет следующий вид:

$$\sqrt{1-\mu^2} \left[\gamma \frac{\partial J(r, z, \mu, \gamma)}{\partial r} + \frac{(1-\gamma^2)}{r} \frac{\partial J(r, z, \mu, \gamma)}{\partial \gamma} \right] + \mu \frac{\partial J}{\partial z} + \chi J(r, z, \mu, \gamma) = \chi J^{em}(r, z, \mu, \gamma) \quad (2)$$

где $\mu = \cos \theta$, $\gamma = \cos \varphi$.

Граничные условия для уравнения (2):

$$\begin{aligned} z = 0, \mu > 0: J(r, 0, \mu, \gamma) &= J_0^+(r, \mu, \gamma), \\ z = H, \mu < 0: J(r, H, \mu, \gamma) &= J_0^-(r, \mu, \gamma), \\ r = R, \gamma < 0: J(R, z, \mu, \gamma) &= J_R^-(z, \mu, \gamma), \end{aligned} \quad (3)$$

где функции $J_0^+(r, \mu, \gamma)$, $J_0^-(r, \mu, \gamma)$, $J_R^-(z, \mu, \gamma)$ являются внешними по отношению к изучаемому объему источниками излучения. Основное положение МСГ заключается в том, что спектральную интенсивность излучения можно разложить в ряд по сферическим гармоникам [1]:

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_{l,0} P_l^0(\mu) + \sum_{m=1}^l P_l^m(\mu) (\alpha_{l,m} \cos m\varphi + \beta_{l,m} \sin m\varphi) \right], \quad (4)$$

где $\alpha_{l,m}$, $\beta_{l,m}$ – функции, зависящие от пространственных координат; $P_l^m(\mu)$ – присоединенные полиному Лежандра. Далее, уравнение (4) подставляется в уравнение (1) и к полученному выражению применяется интегральный оператор

$$\Lambda_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{ \bullet \} P_l^m(\mu) (\alpha_{l,m} \cos m\varphi + \beta_{l,m} \sin m\varphi) d\varphi d\mu \quad (5)$$

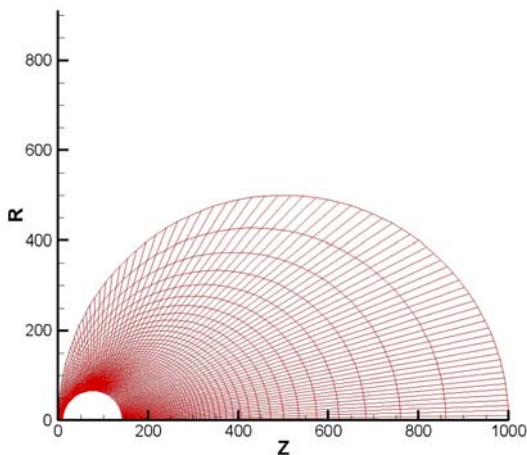


Рис.1. Расчетная сетка в двумерной осесимметричной геометрии

Принимая во внимание то, что решаемая задача обладает свойством аксиальной симметрии, можно положить $J(r, z, \mu, \varphi) = J(r, z, \mu, -\varphi)$, и, таким образом,

$\beta_{l,m} = 0$. Задача заключается в нахождении коэффициентов $\alpha_{l,m}$.

Используя свойство ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^1 P_l^m P_l^m d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'},$$

результат применения интегрального оператора (5) имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{1+\delta}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l+1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{l+1}^{m+1}}{r} \right] - \\ & \frac{1+\delta}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l-1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{l-1}^{m+1}}{r} \right] + \\ & \frac{(l+m-1)(l+m)(1-\delta)}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l-1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{l-1}^{m-1}}{r} \right] - \\ & \frac{(l-m+1)(l+m)(1-\delta)}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l+1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{l+1}^{m-1}}{r} \right] + \\ & \frac{l-m+1}{2l+1} \frac{\partial F_{l+1}^m}{\partial z} + \frac{l+m}{2l+1} \frac{\partial F_{l-1}^m}{\partial z} + \chi F_l^m = 4\pi\chi J_b \delta_{l,0} \delta_{m,0}, \end{aligned}$$

где $0 \leq l \leq N$,

$$\begin{aligned} & - \frac{1+\delta}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{l-1}^{m+1}}{\partial r} + (m+1) \frac{F_{l-1}^{m+1}}{r} \right] + \\ & \frac{(N+m-1)(N+m)(1-\delta)}{2(2l+1)} \left[\frac{\partial F_{N-1}^{m-1}}{\partial r} - (m-1) \frac{F_{N-1}^{m-1}}{r} \right] + \\ & \frac{l-m+1}{2l+1} \frac{\partial F_{l+1}^m}{\partial z} + \frac{l+m}{2l+1} \frac{\partial F_{l-1}^m}{\partial z} + \chi F_l^m = 4\pi\chi J_b \delta_{l,0} \delta_{m,0}, \end{aligned}$$

где $l = N$, $F_l^m = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J P_l^m(\mu) \cos m\varphi d\varphi d\mu$.

Полученная система дифференциальных уравнений является незамкнутой, и для сведения количества уравнений к конечному числу используется предположение: $\frac{\partial \alpha_{N+1}}{\partial s} = 0$, где s – пространственная координата. Число N называется порядком приближения.

Далее предполагается, что $N = 1$. Это так называемое P1 приближение. Система уравнений P1 приближения имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r F_1^1}{\partial r} + \frac{\partial F_1^0}{\partial z} + \chi F_0^0 = 4\pi\chi J_b, \quad (6)$$

$$F_1^0 = -\frac{1}{3\chi} \frac{\partial F_0^0}{\partial z}, \quad (7)$$

$$F_1^1 = -\frac{1}{3\chi} \frac{\partial F_0^0}{\partial r}, \quad (8)$$

Функции F_l^m имеют простую связь с физическими характеристиками теории радиационного переноса, в частности:

$$F_0^0 = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 JP_0^0(\mu) d\varphi d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 J d\mu = cU, \quad (9)$$

$$F_1^0 = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 JP_1^0(\mu) \cos m\varphi d\varphi d\mu = W_z, \quad (10)$$

$$F_1^1 = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 JP_1^1(\mu) \cos m\varphi d\varphi d\mu = W_r, \quad (11)$$

где W_r, W_z – проекции плотности радиационного потока на оси декартовой системы координат, U – объемная плотность энергии излучения.

Подставляя соотношения (9)–(11) в (6)–(8), решаемая система уравнений принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r W^r}{\partial r} + \frac{\partial W^z}{\partial z} + \chi cU = 4\pi\chi J_b, \quad (12)$$

$$\frac{c}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial r} + W^r = 0, \quad (13)$$

$$\frac{c}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial z} + W^z = 0. \quad (14)$$

Можно свести систему уравнений (12)–(14) к одному эквивалентному уравнению, выразив из уравнений (12) и (13) проекции W_r и W_z , и подставив их в уравнение (14):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \chi U_b = \chi U, \quad (15)$$

где введено обозначение $U_b = 4\pi\chi J_b$ – локальная излучательная способность.

Граничные условия на оси симметрии ($r = 0$) имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (16)$$

На внешней границе L и внутренней границе сферы граничное условие имеет асимптотический вид:

$$U(r)|_L = U_b(r)|_L. \quad (17)$$

Для повышения сходимости в уравнение (15) добавляется эффективное слагаемое $\partial U / \partial \tau$. Это позволяет увеличить число обусловленности уравнения (15), и решаемое уравнение приобретает конечный вид в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{c}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{c}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \chi U_b = \chi U \quad (18)$$

Уравнение (18) решается не в декартовой системе координат, а в криволинейной. Это делается для ортогонализации расчетной сетки. Для этого осуществляется замена координат:

$$\xi = \xi(r, z), \eta = \eta(r, z). \quad (19)$$

Производные в уравнении (18) $\frac{\partial U}{\partial z}$ и $\frac{\partial U}{\partial r}$ заменяются на $\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_z$ и $\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_r + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_r$, соответ-

ственно, дифференциалы $\frac{\partial}{\partial z}(\bullet)$ и $\frac{\partial}{\partial r}(\bullet)$ заменяются на

$\frac{\partial}{\partial \xi}(\bullet) \xi_z + \frac{\partial}{\partial \eta}(\bullet) \eta_z$ и $\frac{\partial}{\partial \xi}(\bullet) \xi_r + \frac{\partial}{\partial \eta}(\bullet) \eta_r$, соответ-

ственно. Кроме этого, используются соотношения

$$z_\xi = \frac{\eta_r}{J}, \quad z_\eta = -\frac{\xi_r}{J}, \quad r_\xi = -\frac{\xi_z}{J}, \quad r_\eta = -\frac{\eta_z}{J}, \quad \text{где}$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \xi_r & \xi_z \\ \eta_r & \eta_z \end{pmatrix} - \text{якобиан преобразования (19).}$$

Якобиан преобразования $J \neq 0$, что гарантирует взаимно-однозначный обратный переход к переменным при отображении полученных результатов в переменных (r, z) . Уравнение (18) принимает вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\lambda \xi_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\lambda \eta_r}{J} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \chi U_b = \chi U \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь, для краткости опущен аргумент и спектральный индекс у функции $U(\xi, \eta)$.

4. ПЛОТНОСТЬ РАДИАЦИОННОГО ПОТОКА

Плотность радиационного потока к поверхности космического аппарата вычисляется по следующей формуле:

$$W = -\frac{c}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (21)$$

где $\frac{\partial U}{\partial n} = (\vec{n} \cdot \nabla U)$; \vec{n} – единичный вектор нормали к

поверхности; c – скорость света; χ – коэффициент поглощения излучения в среде. Как известно

$$\begin{aligned} \nabla U &= \frac{\partial U}{\partial r} \vec{r} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{z} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_r + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_r \right) \vec{r} + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_z \right) \vec{z}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_r + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_r \right) \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}_r \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \xi_z + \frac{\partial U}{\partial \eta} \eta_z \right) \left(\frac{\vec{z}}{z} \cdot \vec{n}_z \right).$$

Для расчета координат нормали можно использовать следующий способ: нормаль к поверхности, проходящая через точку (i, j) должна быть перпендикулярна вектору с координатами $((i, j), (i, j+1))$. Здесь меняется только индекс i , потому что поток вычисляется прямо к поверхности, а криволинейная сетка ортогональна. Следовательно, координаты единичной нормали принимают вид

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{ij+1} - r_{ij}}{z_{ij+1} - z_{ij}} \right)^2}}, - \frac{\frac{r_{ij+1} - r_{ij}}{z_{ij+1} - z_{ij}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_{ij+1} - r_{ij}}{z_{ij+1} - z_{ij}} \right)^2}} \right),$$

где учтено, что $n_r^2 + n_z^2 = 1$.

Дивергенция объемной плотности энергии излучения находится просто:

$$\operatorname{div}U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\chi} \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (22)$$

и, учитывая уравнение (18),

$$\operatorname{div}U = kU_b - kU. \quad (23)$$

5. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Для последующего решения поставленной задачи при реальном поле коэффициента поглощения (и в особенности в инфракрасном диапазоне, где преимущественно преобладает поглощение CO_2) спектральный диапазон от 1400 см^{-1} до 100000 см^{-1} был разбит на 90 спектральных групп, в каждой из которых решалось уравнение (20). Объемная плотность энергии излучения источниками вычислялась следующим образом:

$$U_b = \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \Delta\omega} J_{b,\omega_0}^0 d\omega, \quad (24)$$

где $J_{b,\omega_0}^0(\omega) = \frac{119.25 \times 10^{-7} \omega_0^3}{\exp(1.44\omega_0/T) - 1}$.

Подынтегральное выражение в (24) предполагается постоянным в спектральном интервале $(\omega_0, \omega_0 + \Delta\omega)$ и равным $J_{b,\omega_0}^0 = J_{b,\omega_0}^0(\omega_0 + \Delta\omega/2)$. Интегральная функция U_b находится суммированием спектральных составляющих по всему частотному диапазону:

$$U_{b,i,j} = \sum_{n=1}^{90} U_{b,i,j,n}.$$

6. ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА

Для получения конечно-разностной схемы уравнение (20) интегрируется элементарной ячейки по объему криволинейной системы координат:

$$V_0 = (\xi_{j-1/2} - \xi_{j+1/2})(\eta_{i-1/2} - \eta_{i+1/2})$$

В результате интегрирования получается пятиугольная схема:

$$A_{i,j} U_{i-1,j} + B_{i,j} U_{i+1,j} + \bar{A}_{i,j} U_{i,j-1} + \bar{B}_{i,j} U_{i,j+1} - C_{i,j} U_{i,j+1} + F_{i,j} = 0,$$

где

$$A_{i,j} = \frac{1}{2P^+P} \left[\frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i+1,j} + \frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right],$$

$$B_{i,j} = \frac{1}{2P^-P} \left[\frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i-1,j} + \frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right],$$

$$\bar{A}_{i,j} = \frac{1}{2Q^+Q} \left[\frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i-1,j} + \frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right],$$

$$\bar{B}_{i,j} = \frac{1}{2Q^-Q} \left[\frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i+1,j} + \frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \Big|_{i,j} \right],$$

$$C_{i,j} = \frac{1}{J\tau} \Big|_{i,j} + A_{i,j} + B_{i,j} + \bar{A}_{i,j} + \bar{B}_{i,j} + \frac{\chi}{J} \Big|_{i,j},$$

$$F_{i,j} = 2k_{i,j} \frac{U_{i+1,j+1} + U_{i-1,j-1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1}}{4PQ} +$$

$$(k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{4PQ} + (k_{i+1,j} - k_{i-1,j}) \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{4PQ} +$$

$$\frac{\lambda_{i,j}}{r_{i,j} J_{i,j}} \left[\frac{\xi_r(U_{i,j+1} - U_{i,j-1})}{2Q} + \frac{\eta_r(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})}{2P} \right],$$

$$k_{i,j} = \lambda_{i,j} \frac{(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)_{i,j}}{J_{i,j}},$$

$$Q = \frac{1}{2}(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1}), P = \frac{1}{2}(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}),$$

$$Q^+ = \frac{1}{2}(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j}), P^+ = \frac{1}{2}(\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j}),$$

$$Q^- = \frac{1}{2}(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}), P^- = \frac{1}{2}(\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}),$$

$$\lambda_{i,j} = \frac{1}{3\chi_{i,j}}.$$

Параметр τ вводился для увеличения числа обусловленности решаемого уравнение и равнялся 10^5 . Из-за наличия радиуса в знаменателе в слагаемом $\frac{\lambda_{i,j}}{r_{i,j} J_{i,j}} \left[\frac{\xi_r(U_{i,j+1} - U_{i,j-1})}{2Q} + \frac{\eta_r(U_{i+1,j} - U_{i-1,j})}{2P} \right]$, вблизи оси симметрии, там, где $r = 0$, возникает погрешность при делении на малое число, и с увеличением количества итераций, теоретически, накапливается большая погрешность. С целью устранения этой погрешности была введена замена

$$\Phi = \frac{Ur}{U_{b\max}}, \quad (25)$$

Здесь $U_{b\max}$ – максимальное значение объемной плотности энергии излучения источниками в каждой спектральной группе или в поле проинтегрированной по всему спектру функции Планка. Используя замену (25), уравнение (20) представляется в виде

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda(\xi_r^2 + \xi_z^2)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda(\eta_r^2 + \eta_z^2)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda(\xi_r \eta_r + \xi_z \eta_z)}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\lambda \xi_r \Phi}{J r} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\lambda \eta_r \Phi}{J r} \right) + k\Phi = \frac{kU_b}{U_{b\max}} \quad (26)$$

с граничным условием на оси симметрии $\Phi = 0$, а на внешней границе $L - \Phi(r)|_L = \frac{U_b(r)r}{U_{b\max}}|_L$. Теперь пяти-точечная схема записывается относительно функции Φ , коэффициенты пятиточечной $A, B, \bar{A}, \bar{B}, C$ схемы остаются неизменными, а свободный коэффициент F приобретает вид

$$F_{i,j} = 2k_{i,j} \frac{\Phi_{i+1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1} - \Phi_{i+1,j-1} - \Phi_{i-1,j+1}}{4PQ} + (k_{i,j+1} - k_{i,j-1}) \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{4PQ} + (k_{i+1,j} - k_{i-1,j}) \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{4PQ} - \frac{\lambda_{i,j}}{J_{i,j} 2Q} \left[\frac{\xi_{i,j+1} \Phi_{i,j+1}}{r_{i,j+1}} - \frac{\xi_{i,j-1} \Phi_{i,j-1}}{r_{i,j-1}} \right] - \frac{\lambda_{i,j}}{J_{i,j} 2P} \left[\frac{\eta_{i+1,j} \Phi_{i+1,j}}{r_{i+1,j}} - \frac{\eta_{i-1,j} \Phi_{i-1,j}}{r_{i-1,j}} \right] \quad (27)$$

Стоит обратить внимание на последние два слагаемых в выражении (27): они содержат отношения вида $\frac{\Phi}{r}$. Хотя на оси симметрии и числитель и знаменатель этой дроби обращаются в нуль, их отношение остается

величиной фиксированной и равной $\frac{\Phi}{r} = \frac{U}{U_{b\max}}$. Таким образом, последние два слагаемых в выражении (27) приобретают вид

$$\frac{\lambda_{i,j}}{J_{i,j} 2Q} \left[\frac{\xi_{i,j+1} U_{i,j+1}}{U_{b\max}} - \frac{\xi_{i,j-1} U_{i,j-1}}{U_{b\max}} \right] - \frac{\lambda_{i,j}}{J_{i,j} 2P} \left[\frac{\eta_{i+1,j} U_{i+1,j}}{U_{b\max}} - \frac{\eta_{i-1,j} U_{i-1,j}}{U_{b\max}} \right].$$

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Температурное поле вблизи спускаемой сферы меняло значение от 500 К на внешней границе моделируемой области до 12500 К на переднем фронте критической линии тока [3]. Именно такое относительно низкое значение температуры на внешней границе позволяло задать “холодное” граничное условие асимптотического вида (17).

Приведем сравнительные графики объемной плотности энергии излучения для постоянного коэффициента поглощения $\chi = 1 \text{ см}^{-1}$, полученные при решении уравнения (26) с заменой функции U на функцию Φ и без замены (уравнение (20)).

Верхняя половина рис. 2 получена при решении уравнения (26), нижняя – при решении уравнения (20). Полученное различие в решении объясняется в различной сходимости итерационных процессов. Ниже приводятся графики зависимости относительной ошибки итерационного процесса от времени.

Были проведены численные эксперименты решения уравнения (26) при трех различных постоянных коэффициентах поглощения: $\chi = 10 \text{ см}^{-1}$, 1 см^{-1} и 0.1 см^{-1} с целью выяснения поведения объемной плотности энергии излучения в зависимости от толщины

оптического слоя. Также, для $\chi = 1 \text{ см}^{-1}$ были вычислены потоки к поверхности сферы по формуле (21) и мощность тепловыделения согласно (23).

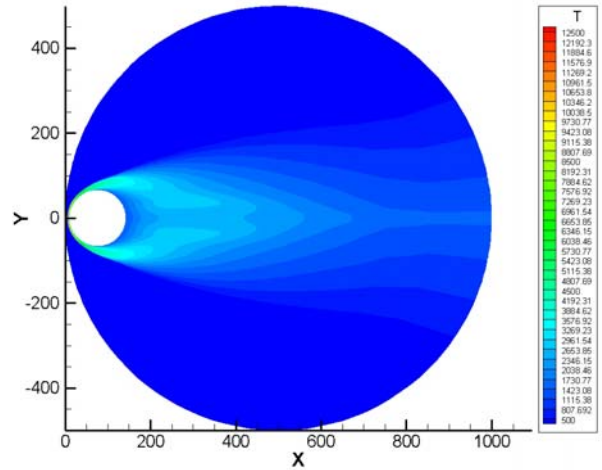


Рис. 2. Температурное поле, используемое в расчетах, К

Анализируя рис. 3 и 4 можно заметить, что итерационные процессы обладают различной сходимостью. По всей видимости, введение замены способствует уменьшению накопления арифметической ошибки. Решение уравнение переноса излучения в оптически толстой среде дает профиль объемной плотности энергии излучения, подобный профилю температуры.

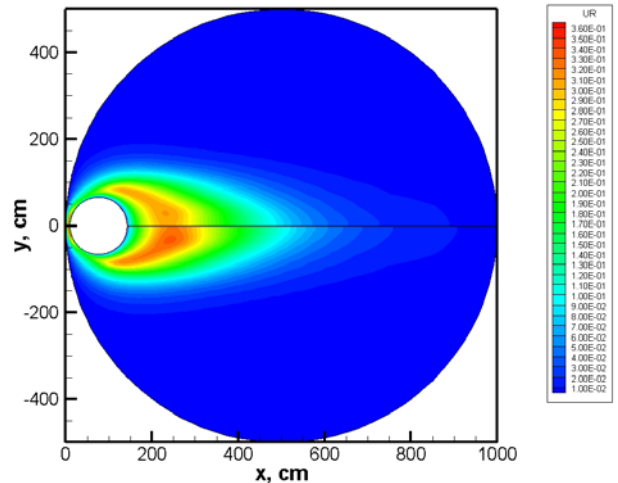


Рис. 3. Объемная плотность энергии излучения, $\chi = 1 \text{ см}^{-1}$

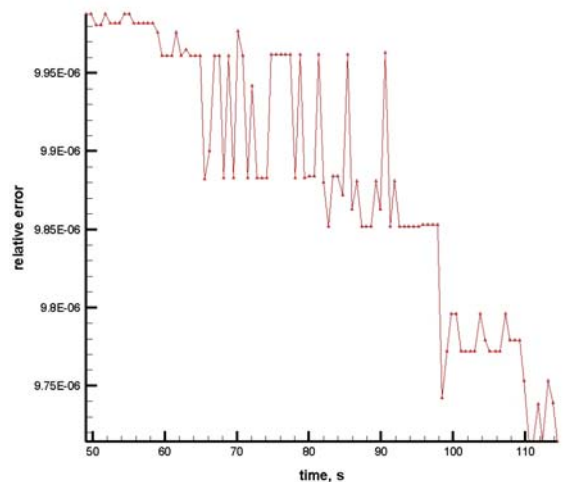


Рис. 4. Относительная ошибка для решения (20)

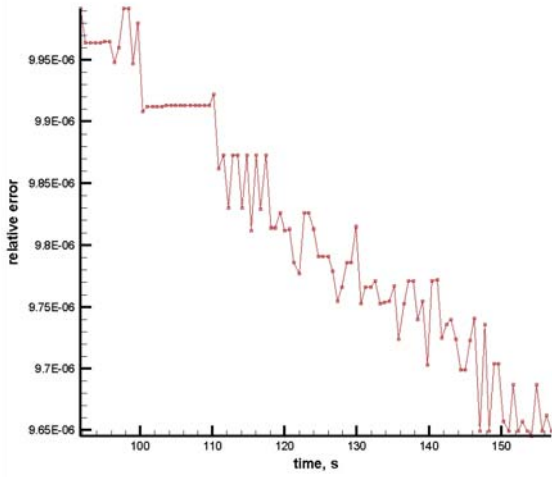


Рис. 5. Относительная ошибка для решения (26)

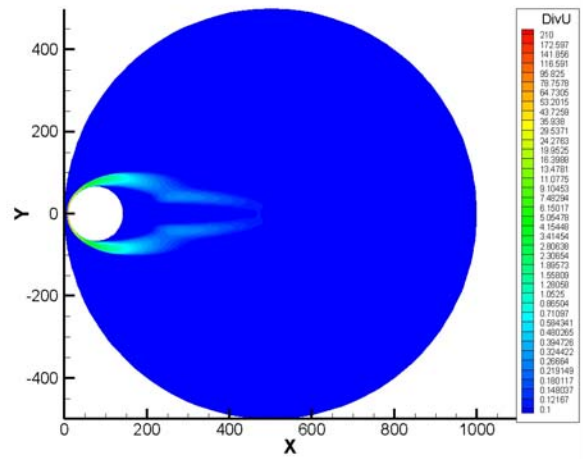


Рис. 8. Мощность тепловыделения, W/cm^3 , $\chi = 1\text{ см}^{-1}$

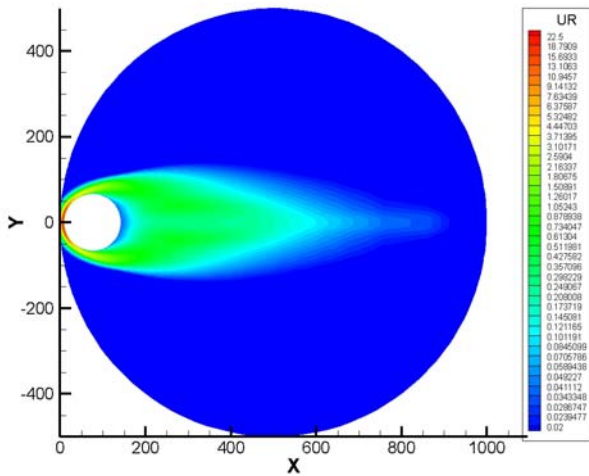


Рис. 6. Объемная плотность энергии излучения, $\text{эрг}/\text{см}^3$, $\chi = 10\text{ см}^{-1}$

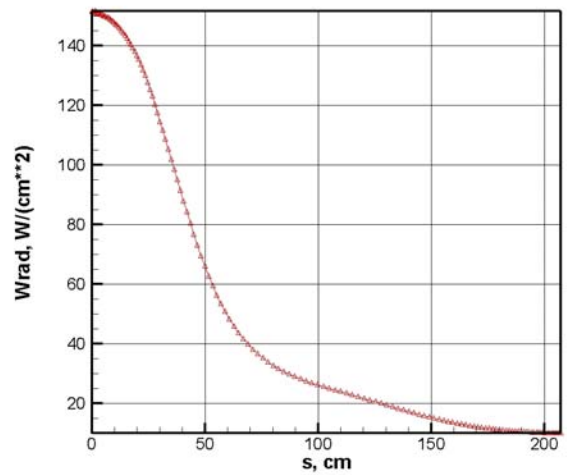


Рис.9. Плотность потока к поверхности, $\chi = 1\text{ см}^{-1}$

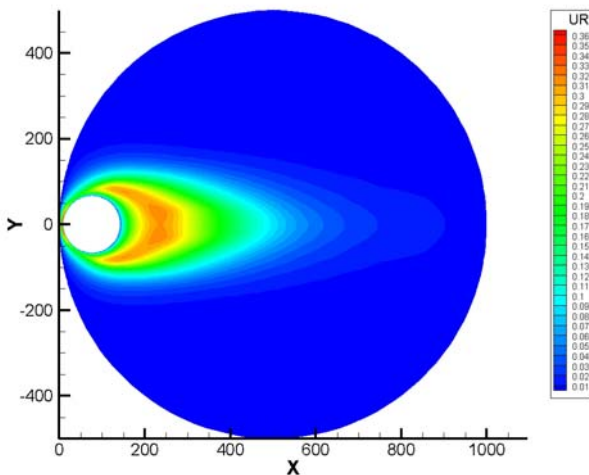


Рис. 7. Объемная плотность энергии излучения, $\text{эрг}/\text{см}^3$, $\chi = 1\text{ см}^{-1}$

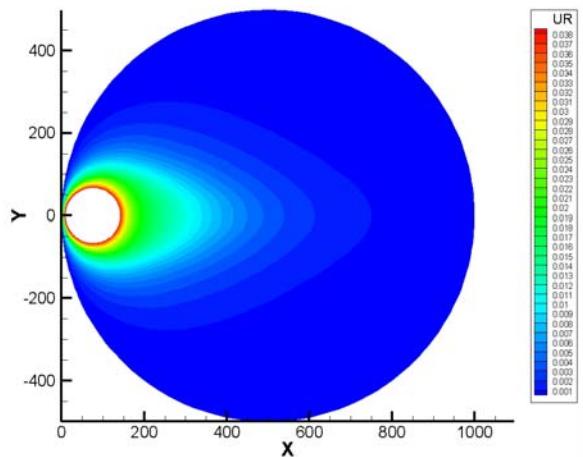


Рис. 10. Объемная плотность энергии излучения, $\text{эрг}/\text{см}^3$, $\chi = 0.1\text{ см}^{-1}$

При малом коэффициенте поглощения $\chi = 0.1\text{ см}^{-1}$ поле объемной плотности энергии излучения приобретает сферообразную форму, и при дальнейшем уменьшении коэффициента поглощения поле качественно не меняется.

Можно сделать вывод, что в данном случае коэффициент поглощения порядка $\chi = 1\text{ см}^{-1}$ является нижней границей области применимости P1 приближения МСГ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное решение уравнение переноса излучения в виде (20) показало, что итерационная процедура дает достаточно существенную ошибку из-за наличия малой величины в знаменателе в виде радиуса. При замене функции объемной плотности излучения на ее аналог (25) было получено некоторое различие в сходимостях этих двух итерационных процессов. Проведены численные эксперименты при различных постоянных коэффициентах поглощения излучения в среде, которые показали, что при достаточно большом поглощении в среде ($\chi = 10 \text{ см}^{-1}$) поле объемной плотности энергии излучения подобно полю температур. Это означает, что практически все излучения поглощается в той же элементарной ячейке. При дальнейшем уменьшении коэффициента поглощения установлено вырождение поля объемной плотности энергии излучения вплоть до сферообразной формы при коэффициенте поглощения $\chi = 0.1 \text{ см}^{-1}$. Таким образом, область применимости P1 приближения метода сферических гармоник ограничивается коэффициентами поглощения порядка $\chi = 0.1 \text{ см}^{-1}$. Тем не менее, данный способ решения очень эффективен для нахождения таких важнейших радиационных характеристик, как мощность тепловыделения в объеме или плотности радиационного потока к поверхности из-за отсутствия требования к наличию большого временного ресурса. Возможным решением проблемы применимости данного приближения в широком диапазоне коэффициентов поглощения излучения в среде является применение P1 приближение вкупе с более высоким приближением метода сферических гармоник или методом дискретных направлений.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 07-01-00133 (разработка пространственной модели движения химически реагирующего газа), а также в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (создание моделей физико-химической кинетики высокотемпературных газовых потоков) и Программы министерства образования и науки Российской Федерации РНПВШ 2.1.1/4693 (создание гибридных радиационно-столкновительных моделей аэрофизики).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суржиков С.Т. “Тепловые свойства газов и плазмы”, изд. МГТУ им. Баумана, Москва, 2004, С. 155.
2. Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H. Computational fluid mechanics and heat transfer, С. 266
3. Milos F.S., Chen Y.-K. “Mars Pathfinder Entry Data, Aerothermal Heating, and Heatshield material Response.”