СРАВНЕНИЕ ПРОГОНКИ ЧЕТВЁРТОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩЕЙ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

А.С. Дикалюк, С.Т. Суржиков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук,
Москва, 119526, проспект Вернадского 101-1

Аннотация

В данной работе на примере задачи, имеющей аналитическое решение, сравниваются прогонки второго и четвёртого (так же известна как прогонка Петухова) порядков точности. Демонстрируются преимущества метода четвёртого порядка точности, как в одномерном, так и в двумерном случаях. Обращается внимание на ряд особенностей, присущих методу четвёртого порядка точности.

COMPARISON BETWEEN DECOMPOSITION METHODS OF THE FORTH AND SECOND ACCURACY ORDER USING A PROBLEM, WHICH HAS AN ANALYTICAL SOLUTION

In this paper comparison between two decomposition methods is fulfilled using a problem, which has an analytical solution. The advantages of the forth order accuracy method are demonstrated in 1D- and 2D-geometries. Features of the high-order accuracy method are discussed.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задачи вычислительной физики становятся всё более ресурсоемкими. Для получения результатов требуется всё больше машинного времени. Одним из возможных путей решения данной проблемы является использование методов повышенного порядка точности. При использовании подобных методов появляется возможность получать качественные результаты даже на грубых сетках, что позволяет существенно сократить времена расчётов.

В данной работе, являющейся, по сути, логическим продолжением работы [1], производится сравнение двух численных методов на примере задачи, имеющей аналитическое решение, в одномерной и двумерной геометрии. Обсуждаются особенности метода повышенного порядка точности.

2. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В оригинальной работе [2] и в работе [1] можно ознакомиться с выводом математических соотношений, относящихся к методу четвёртого порядка точности в одномерной геометрии. В классических книгах [3-4] можно найти исчерпывающее описание, относящееся к методу классической прогонки. Поэтому в данной работе изложение этого материала будет опущено.

Далее обратимся к рассматриваемой задаче. Решаемое модельное дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2} - \sin(k\pi x) = 0 \\ &U_{x=0} = 0 \\ &U_{x=1} = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Его аналитическое решение:

$$U = -\frac{1}{(\pi k)^2}\sin(k\pi x) \tag{2.2}$$

Как упоминалось выше, уравнение решается двумя методами: классической прогонки и прогонки четвёртого порядка точности, производится сравнение с аналитическим решением.

При использовании прогонки второго порядка точности аппроксимация производится с использованием центрального конечно-разностного соотношения. Полученная трёхточечная схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \\ B_i &= \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} \\ C_i &= \frac{2}{(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1})} \\ F_i &= -\sin(k\pi x_i) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для использования прогонки четвёртого порядка точности необходимо обратится к работе [1] или [2]. Тогда запись уравнения, для его решения этим методом, приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &m_{1,i} = m_{3,i} = m_{0,i} = 0,\ m_{2,i} = 1 \\ &k_{1,i} = k_{2,i} = k_{3,i} = 0,\ k_{0,i} = \sin(k\pi x_i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Далее будет показано, что у прогонки Петухова точность (в смысле отличия от аналитического решения) существенно зависит от способа определения (а точнее от точности определения) коэффициентов в центре элементарного расчётного отрезка (с необходимостью определять значение функции в узлах элементарного расчётного отрезка можно ознакомиться в работах [1–2]).

Производится рассмотрение решения на различных сетках ($N = 11$, $N = 101$, N - число узлов).

При $k = 1$ рассмотрим решение данного уравнения различными методами. Будем исходить из «реальной» постановки задачи (под этим понимается следующее, если функции, входящие в уравнение, заданы не аналитически, а, например, рассчитываются на каждой итерации, то значения таких функций возможно знать только в узлах расчётной сетки). Тогда для прогонки четвёртого порядка точности в центральной точке элементарного расчётного отрезка значение функции F вычислим как полусумму значений в его узлах. Расчёт произведем на однородной сетке с количеством узлов $N = 11$. Рассмотрим результаты. На Рис. 1 приведены решения, даваемые различными методами и аналитическое решение. На Рис. 2 приведены относительные отличия численных решений, выраженные в процентах (в дальнейшем будем называть такие графики, характеризующими «качество» численного решения). Видно, что в данном случае прогонка четвертого порядка точности почти не отличается от прогонки второго порядка точности.

Далее приведём расчёт на той же сетке при том же значении параметра k, с той лишь разницей, что представим значение функции в центральной точке элементарного отрезка в виде (в дальнейшем будем называть этот способ «точным»):

$$k_{0,i+\frac{1}{2}} = \sin(k\pi \frac{(x_i + x_{i+1})}{2}) \qquad (2.5)$$

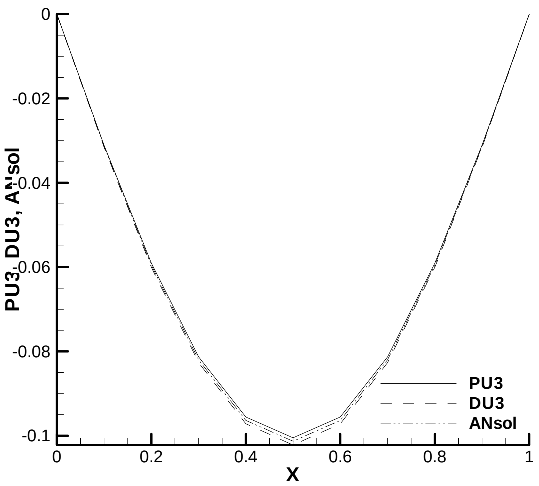

Рис. 1. Численные и аналитическое решение задачи (2.1) при $k = 1$. Сплошная линия – прогонка повышенного порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка, штрих-пунктирная – аналитическое решение

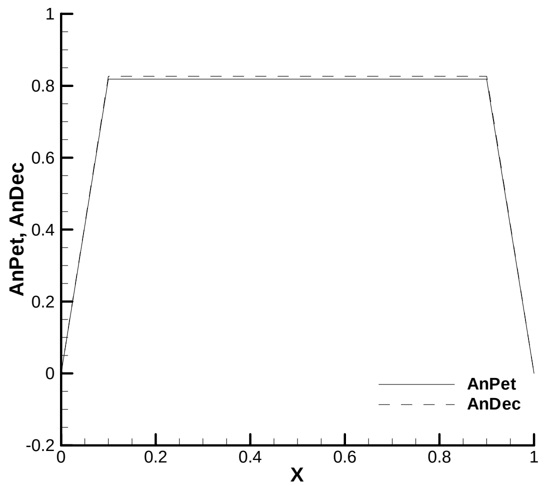

Рис. 2. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

Рассмотрим результаты. Сразу же обратим внимание на Рис. 3, характеризующий качество полученных результатов. Прогонка четвёртого порядка точности дала на сетке $N = 11$ решение, отличающееся от аналитического на 0.001%. Так же по сравнению с предыдущим расчётом прогонка четвёртого порядка точности дала результаты на ~3 порядка более точные.

Далее приведем расчёты на сетке $N = 101$, параметр k имеет прежнее значение. Способ задания функции F выберем «реальным». В данном случае на глаз отличить решения, даваемые различными прогонками друг от друга и от аналитического, невозможно, потому приведём только Рис. 4, характеризующий качество численных решений. Из графика, как и должно быть, видно, что отличие от аналитического решения, даваемое обыкновенной прогонкой, уменьшилось, т.е. наблюдается сходимость. С точки зрения прогонки четвёртого порядка точности ситуация не изменилась: результаты, полученные с её помощью в этом случае (в смысле задания значения функции F в центре элементарного расчётного отрезка) не отличаются от результатов, полученных с использованием стандартной прогонки.

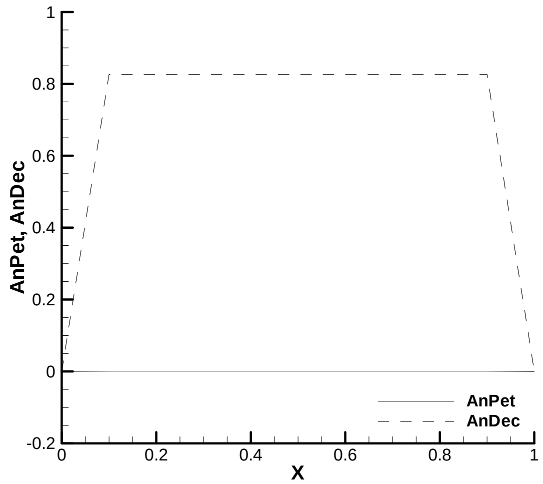

Рис. 3. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка.

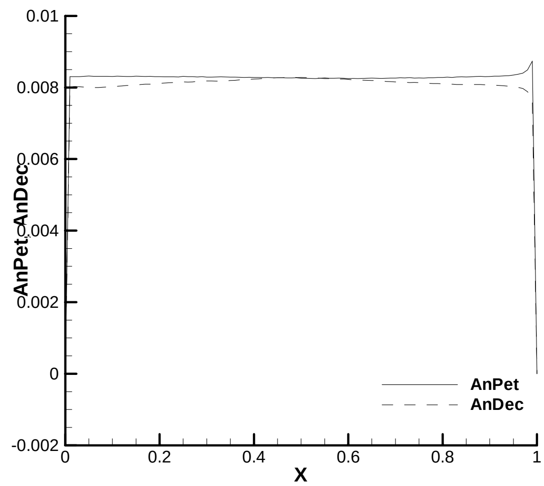

Рис. 4. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

Теперь изменим только способ определения функции F в центральной точке элементарного расчётного отрезка. Снова приведём только Рис. 5, характеризующий «качество» решений. Как видно, наблюдается тот же самый эффект.

Изменим параметр k. Пусть $k=10$. Сетка $N=101$. Так же исследуем оба способа задания значения функции F в центральной точке элементарного расчётного отрезка. Сначала «реальный» способ. Рис. 6 – численные и аналитическое решения. Рис. 7 – относительное отличие численных решений от аналитического, выраженное в процентах. Точки, в которых отличие резко возрастает – точки, в которых решение обращается в 0. Важно тут то, что мы наблюдаем снова тот же эффект: прогонка четвёртого порядка точности демонстрирует те же свойства (в смысле точности), что и прогонка второго порядка.

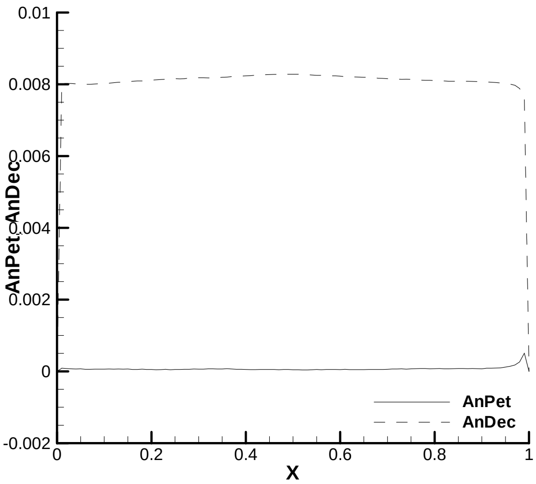

Рис. 5. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

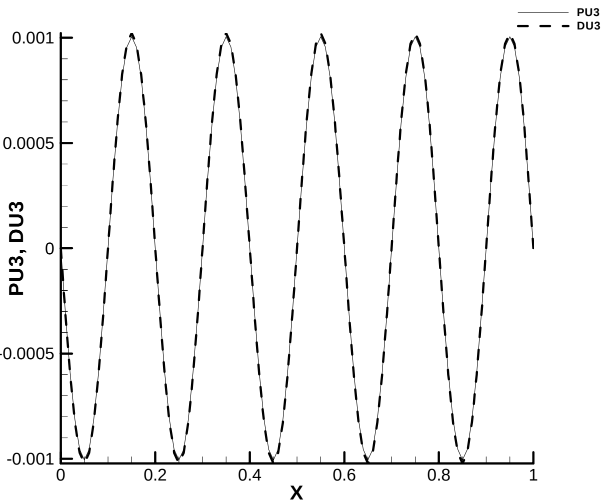

Рис. 6. Численные решения задачи (2.1) при $k=10$ на сетке $N=101$. Сплошная линия – прогонка повышенного порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

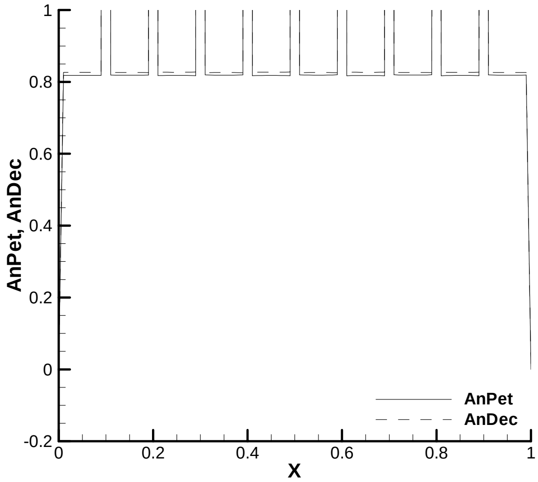

Рис. 7. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

Теперь изменим способ задания функции F в центре элементарного расчётного. Приведём только графики, характеризующие «качество» решений. Снова наблюдаем тот же эффект. «Качество» решения, даваемое прогонкой четвёртого порядка точности заметно возрастает.

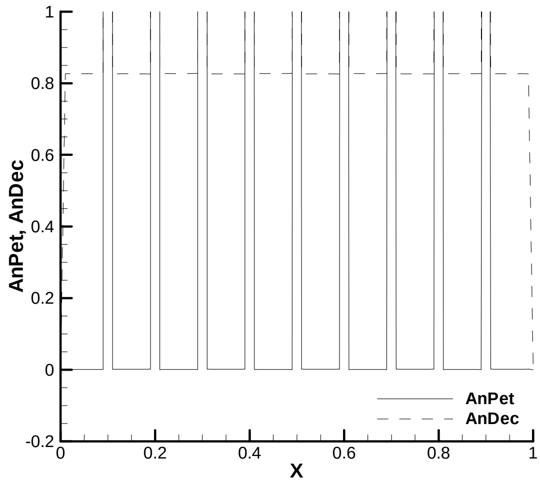

Рис. 8. Относительное отличие численных решений от аналитического. Сплошная линия – прогонка четвёртого порядка точности, пунктирная – обыкновенная прогонка

3. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В работе [1] также можно найти методику использования численного метода четвёртого порядка точности для решения двумерных задач. Метод расщепления по направлениям используется в случае классической прогонки.

Рассматриваемая задача имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\sin(k\pi x)\sin(m\pi y)=0\\
&U_{x=0}=0,\ U_{y=0}=0\\
&U_{x=1}=0,\ U_{y=1}=0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Его аналитическое решение имеет вид

$$U = -\frac{1}{(\pi k)^2 + (\pi m)^2} \sin(k\pi x)\sin(m\pi y) \qquad (3.2)$$

Так же как и в одномерном случае, данное уравнение решается численно двумя методами, производится сравнение. При использовании метода второго порядка точности аппроксимация производные аппроксимируются центральными конечно-разностными соотношениями, записывается трёхточечная схема:

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= \frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} \\
B_{i,j} &= \frac{2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})} \\
C_{i,j} &= \frac{2}{(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})} \\
F_{i,j} &= -\sin(k\pi x_i)*\sin(m\pi y_j) \\
&+\frac{2U_{i,j+1}}{(y_{j+1}-y_{j-1})(y_{j+1}-y_j)} \\
&+\frac{2U_{i,j-1}}{(y_{j+1}-y_{j-1})(y_j-y_{j-1})}
\end{aligned} \qquad (3.3)$$

При использовании прогонки четвёртого порядка точности поступаем в соответствии с работами [1-2]. Тогда коэффициенты прогонки Петухова выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
m_{1,i,j} &= m_{3,i,j} = m_{0,i,j} = 0,\ m_{2,i,j} = 1 \\
k_{1,i,j} &= k_{2,i,j} = 0,\ k_{3,i,j} = \frac{2}{(y_{j+1}-y_j)(y_j-y_{j-1})} \\
k_{0,i,j} &= \sin(k\pi x_i)*\sin(m\pi y_j) \\
&-\frac{2U_{i,j+1}}{(y_{j+1}-y_{j-1})(y_{j+1}-y_j)} \\
&-\frac{2U_{i,j-1}}{(y_{j+1}-y_{j-1})(y_j-y_{j-1})}
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Производится рассмотрение решения на различных сетках (N_xx$N_y = 11$x$11;\ 101$x101 , N_x, N_y - число узлов в направлениях x и y соответственно) и при различных параметрах k и m.

При $k=1$, $m=1$ рассмотрим решение данного уравнения различными методами. Так же вначале будем исходить из «реальной» постановки задачи, что означает для прогонки четвёртого порядка точности в центральной точке элементарного расчётного отрезка вычисление значения функции F как полусуммы значений в его узлах, взятых на фиксированной линии. Расчёт произведем на однородной сетке N_xx$N_y = 11$x11. На Рис. 9 приведём аналитическое решение данной задачи, на Рис. 10 и Рис. 11 – относительное отличие численных решений, даваемых стандартной прогонкой и методом Петухова соответственно, от аналитического, выраженное в процентах (график, характеризующий «качество» численного решения).

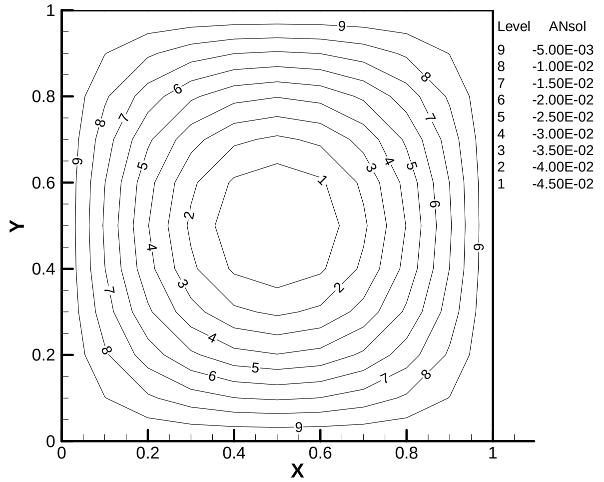

Рис. 9. Аналитическое решение задачи (3.1) при $k=1$ и $m=1$

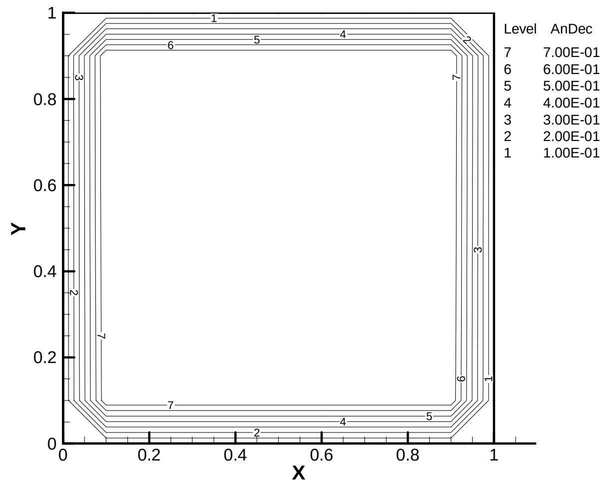

Рис. 10. Относительное отличие численного решения, даваемого стандартной прогонкой, от аналитического

Из Рис. 10 и Рис. 11 можно увидеть, что «качество» решения, даваемого прогонкой четвёртого порядка точности выше в два раза, чем «качество» решения, даваемого стандартной прогонкой. Следует заметить, что в двумерном случае результат не зависит от способа аппроксимации значения функции в центре элементарного расчётного отрезка.

Далее проведём расчёт на сетке N_xx$N_y = 101$x101, при прежних значениях параметров k и m. В данном случае оба численных метода ведут себя примерно одинаково, «качество» решений находится на уровне ~0.5.

Изменим параметры k и m. Пусть $k=10$, $m=10$. Выбор сетки должен быть произведен таким образом, чтобы осцилляции в узлах, где искомая функция обращается в 0 не попадали в расчётные узлы. В противном случае погрешности в данных точках не будут позволять сходиться численным методам. Такому условию удовлетворяет, например, сетка N_xx$N_y = 58$x58. Рис. 12 – аналитическое решение на этой сетке, Рис. 13 и Рис. 14 – характеризуют «качество», полученных численных решений.

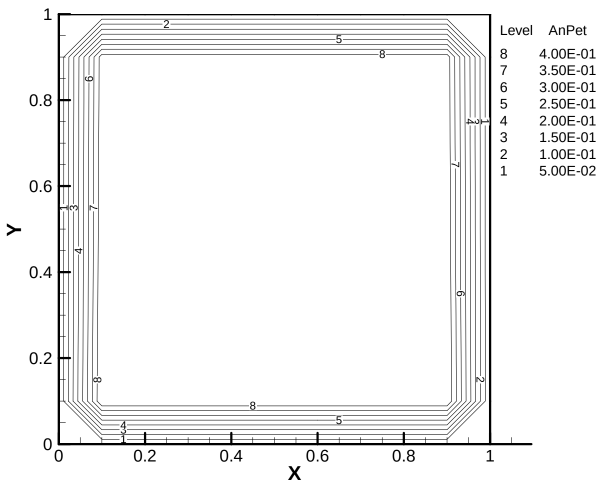

Рис. 11. Относительное отличие численного решения, даваемого прогонкой четвёртого порядка точности, от аналитического

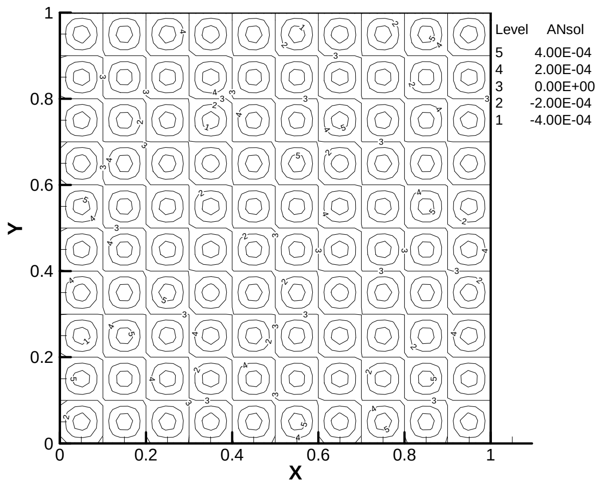

Рис. 12. Аналитическое решение задачи (3.1) при $k = 10$ и $m = 10$

На этих рисунках видно, что решения, получаемые методом Петухова «качественнее» в 2 раза, чем решения, получаемые стандартной прогонкой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнено сравнение двух численных методов в одномерной и двумерной геометриях на примере задач, имеющих аналитическое решение.

В одномерной геометрии выявлен закономерный эффект для методов высокого порядка точности: точность расчёта определяется наименее точно аппроксимированным слагаемым. Этот принцип мы и наблюдали при изменении аппроксимации значения функции в центре элементарного расчётного отрезка. Так же удалось показать, что если значение определено верно, то метод Петухова позволяет производить очень точные расчёты даже на очень грубых сетках.

В двумерной геометрии так же удалось показать, что прогонка чётвёртого порядка точности сохраняет свои свойства, что делает его весьма перспективным методом для выполнения больших объёмов компьютерных расчётов.

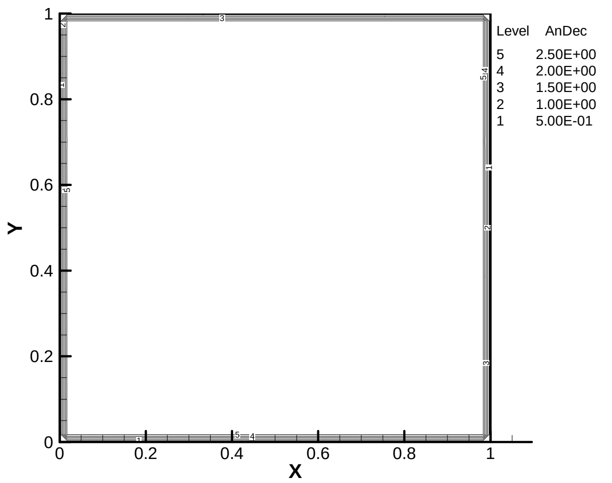

Рис. 13. Относительное отличие численного решения, даваемого стандартной прогонкой, от аналитического

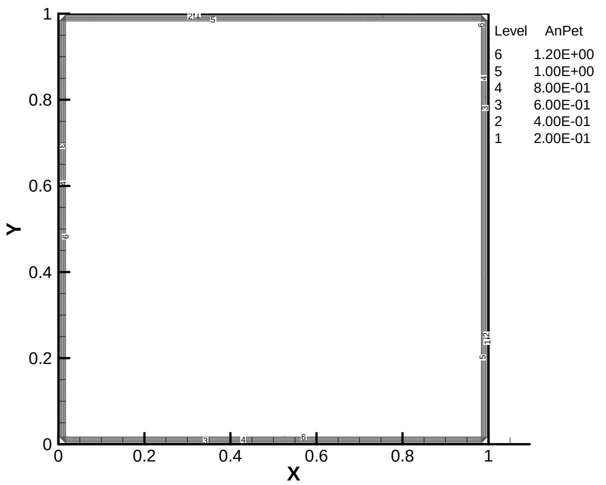

Рис. 14. Относительное отличие численного решения, даваемого прогонкой четвёртого порядка точности, от аналитического

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 07-01-00133 (разработка пространственной модели движения химически реагирующего газа), а также в рамках Программы фундаментальных исследований РАН (создание моделей физико-химической кинетики высокотемпературных газовых потоков) и Программы министерства образования и науки Российской Федерации РНПВШ 2.1.1/4693 (создание гибридных радиационно-столкновительных моделей аэрофизики).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дикалюк А.С., Суржиков С.Т. «Применение прогонки четвёртого порядка точности для решения двумерного уравнения Пуассона» // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Т.7. 2008.
2. Петухов И.В. «Численный расчёт двумерных течений в пограничном слое» // В кн. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений». М.: ВЦ АН СССР. 1964, С. 304-324.
3. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. 528 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука. 1971. 552 с.